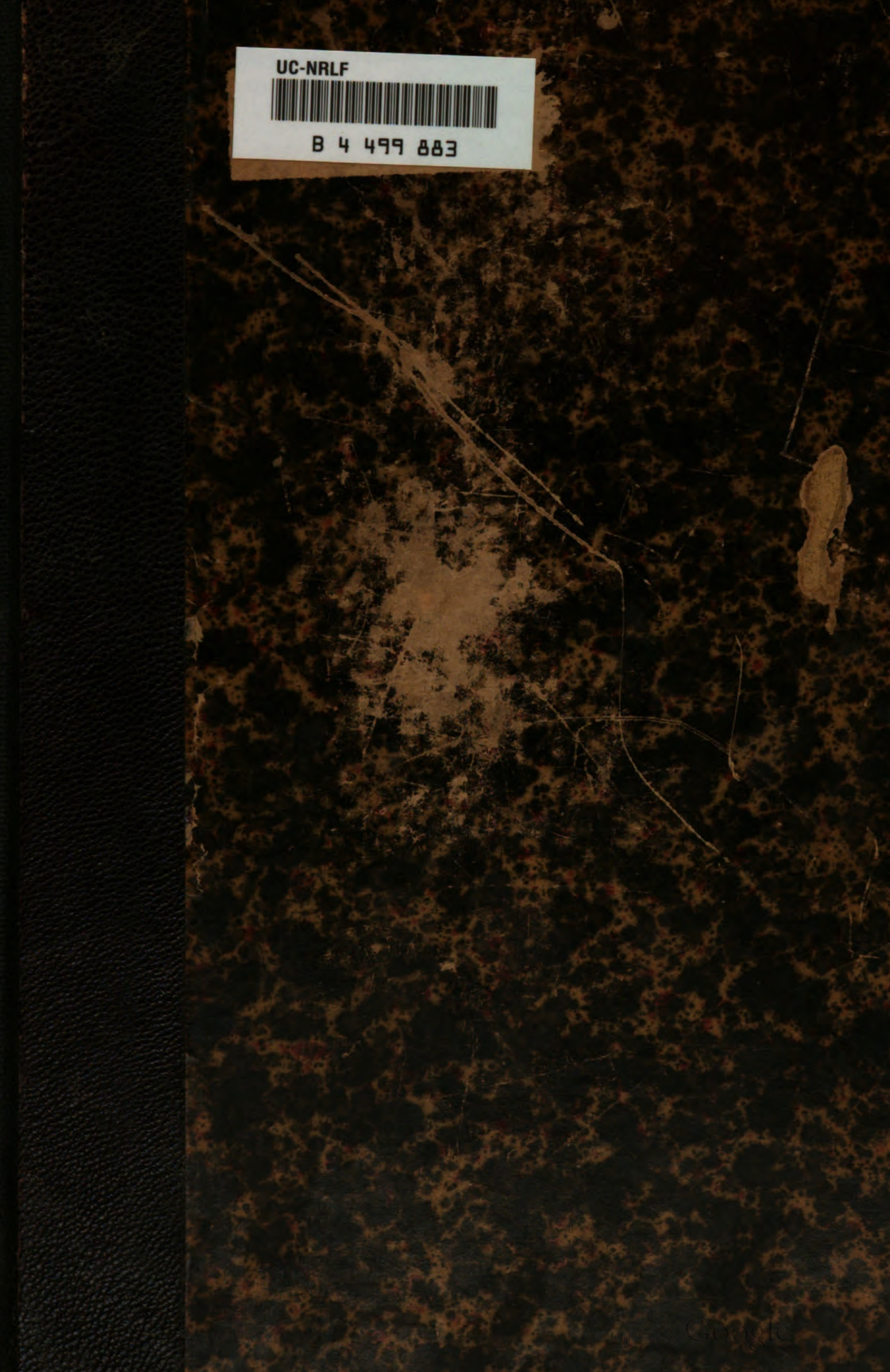
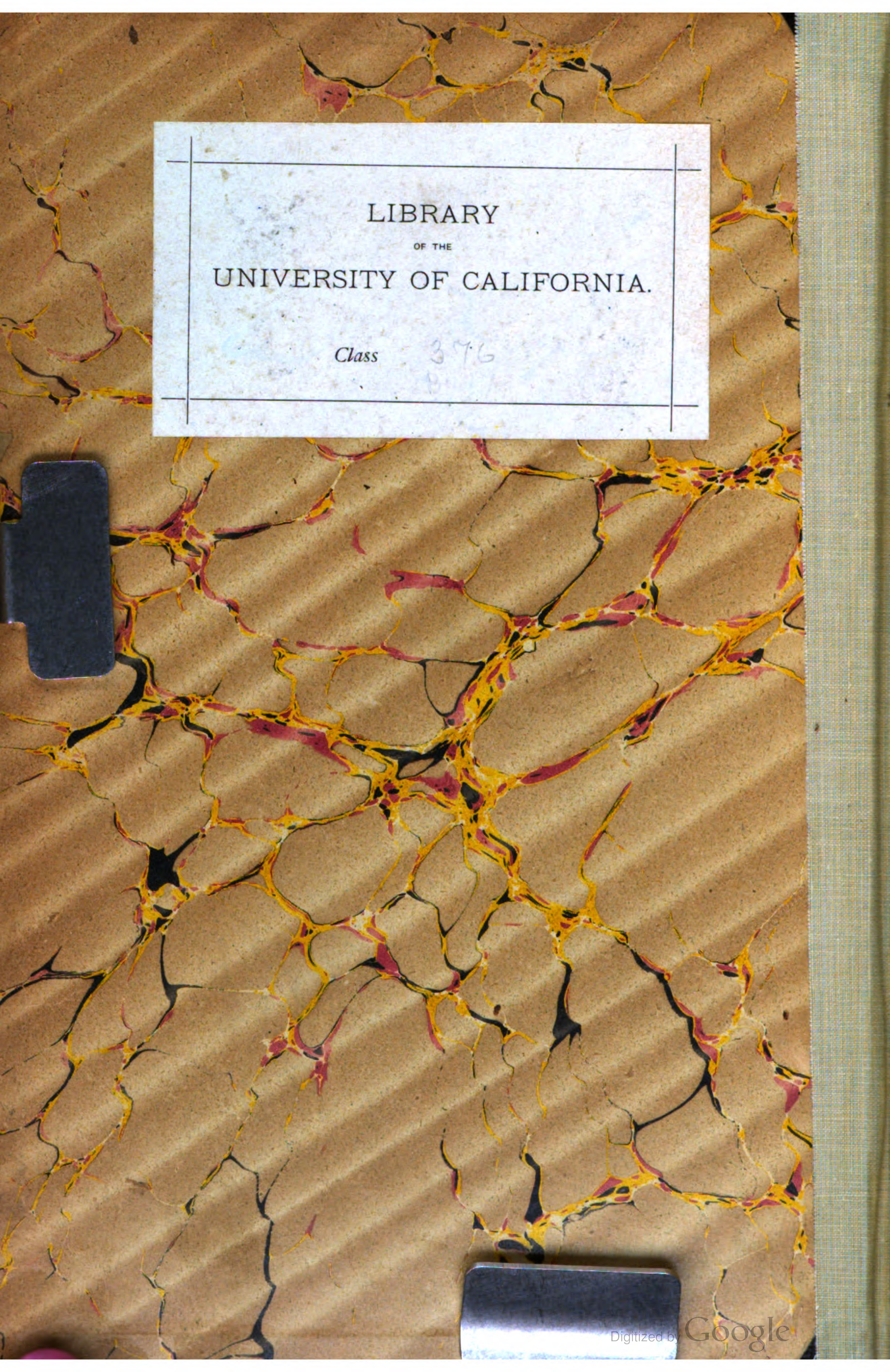




LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
Class 376
Digitized by Google



PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
20589 Quai des Grands-Augustins, 55.

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

THÉORIE ANALYTIQUE
DE
LA CHALEUR

MISE EN HARMONIE

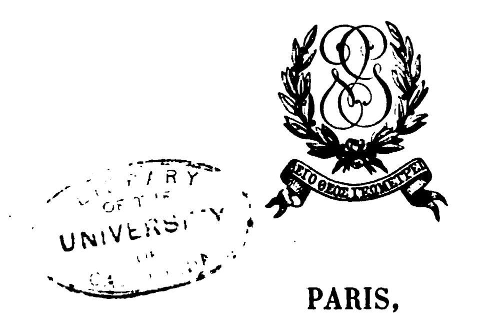
AVEC LA THERMODYNAMIQUE

ET AVEC LA THÉORIE MÉCANIQUE DE LA LUMIÈRE,

PAR J. BOUSSINESQ,
MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

TOME II

REFROIDISSEMENT ET ÉCHAUFFEMENT PAR RAYONNEMENT
CONDUCTIBILITÉ DES TIGES, LAMES ET MASSES CRISTALLINES
COURANTS DE CONVECTION
THÉORIE MÉCANIQUE DE LA LUMIÈRE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1903

Turq.

AVERTISSEMENT.

L'Introduction mise en tête du premier Volume a indiqué l'objet et le plan de l'Ouvrage entier. Elle a fait, en particulier, connaître au lecteur que le Tome II contiendrait, d'abord, la réduction de plusieurs problèmes de refroidissement ou d'échauffement par rayonnement, dont quelques-uns sont célèbres, aux problèmes analogues, beaucoup plus simples, de refroidissement ou d'échauffement par contact; en deuxième lieu, la théorie de la propagation de la chaleur autour d'un centre d'émanation, dans les milieux indéfinis cristallisés à une, deux ou trois dimensions (barres, plaques et corps massifs); enfin, deux Mémoires étendus, consacrés, l'un, à l'étude des résistances exercées sur tout fluide oscillant par un solide immergé à son intérieur et qui paraissent être, dans les phénomènes à notre portée, le véritable type des actions des molécules pondérables sur l'éther vibrant autour d'elles, ou donner, par suite, la clef des faits optiques et même calorifiques, l'autre, à la théorie détaillée des phénomènes de lumière.

Je ne pensais donc pas, quand j'écrivis cette Introduction, avoir à faire précéder le Tome II d'aucun avertissement spécial. Mais il est difficile que l'auteur d'un Ouvrage comme celui-ci n'ait pas, au cours de l'impression, l'idée de le compléter, notamment sur des points qu'il avait jugés d'abord trop peu élucidés pour en entretenir ses lecteurs, mais qu'il se décide tardivement à aborder quand même. C'est ce qui m'est arrivé dès le premier Volume, dans la seconde partie de la XXe Leçon (p. 324 à 332), où j'ai exposé une théorie que l'Introduction ne mentionnait pas. Cette théorie, d'un intérêt plutôt rétrospectif, puisqu'elle nous reporte

à l'hypothèse justement abandonnée du *calorique,* est une explication *fictive* de la propagation de la chaleur, ou des équations de Fourier (et même de Duhamel pour les cristaux), par l'assimilation de la chaleur à un fluide expansif filtrant dans les corps et soumis à la loi de Mariotte, bref, pareil à ceux que semblent constituer les solutions salines étendues, se diffusant dans un liquide ou un solide.

De même, dans le présent Tome II, j'ai jugé devoir ajouter trois Leçons (les XXXIIIe, XXXIVe et XXXVe), pour ébaucher un sujet capital, celui de la propagation de la chaleur dans les corps en mouvement, comme sont des fluides coulant par filets inégalement rapides et des solides qui se déforment ou vibrent.

L'influence réciproque du mouvement visible et de l'agitation calorifique étant peu marquée chez les solides, on peut, à une première approximation, s'y contenter d'hypothèses simples qui reviennent, au fond, à admettre l'indépendance mutuelle de ces deux sortes de mouvements. J'y ai ajouté l'exposé sommaire d'une seconde approximation, où apparaît leur influence réciproque et où, en particulier, l'on retrouve, d'une manière rapide, les équations aux dérivées partielles obtenues vers 1835 par Duhamel, pour les mouvements vibratoires visibles que provoquent, chez les solides élastiques, d'assez larges variations de la température.

Quant aux fluides, où les mouvements visibles peuvent être très étendus, même sous l'influence de faibles causes, l'équation caractéristique de leurs températures, à adjoindre aux équations ordinaires de l'Hydrodynamique, a été donnée en premier lieu par Fourier (dans un Mémoire posthume) sous une forme au fond suffisante pour les questions abordables, mais qu'une légère inadvertance de son immortel auteur a inutilement compliquée quelque peu.

Poisson l'a retrouvée sous sa forme exacte et réduite. Mais, pour pouvoir tirer dans les problèmes les plus intéressants quelque chose du système, encore trop complexe, qu'elle fournit par son adjonction aux équations ordinaires de l'Hydrodynamique ou d'Euler, il ne suffisait pas d'y faire l'hypothèse, bien permise, de

la permanence du mouvement et de la température en chaque point de l'espace entourant le corps : il fallait encore observer que, dans la plupart des mouvements provoqués par la chaleur sur nos fluides pesants, les volumes ou les densités se conservent à très peu près, quoique la variation correspondante du *poids* de l'unité de volume fluide soit justement la cause des phénomènes qu'il s'agit d'analyser. De là résulte la possibilité de négliger les variations de la densité, là où elles ne sont pas multipliées par la gravité g, tout en conservant, dans les calculs, leur produit par celle-ci. Grâce aux simplifications alors obtenues, la question, encore très difficile et presque toujours rebelle à l'intégration, n'est plus inabordable.

On voit que les mouvements dont il s'agit ici sont ceux dits de *convection calorifique* ou produits, autour d'un corps chaud immergé dans un fluide, par l'échauffement et l'*allègement,* à volume égal, des couches fluides avoisinantes. Deux cas extrêmes, tout au moins, y sont accessibles à une étude théorique, savoir, celui où l'ensemble de la masse fluide est en repos, et celui où elle est animée d'une translation uniforme : ils font l'objet de la XXXV[e] Leçon.

Dans le premier, expérimenté par les physiciens, les intégrations ne semblent pas possibles. Mais la forme même des équations implique, entre autres résultats, certaines lois de proportionnalité ou de similitude, qui donnent la raison des belles formules empiriques trouvées, vers 1818, par Dulong et Petit, pour le pouvoir refroidissant des gaz.

L'autre cas extrême est plus simple, quand le courant général enveloppant le corps a une vitesse suffisante pour que les mouvements n'y soient pas sensiblement modifiés par l'échauffement. Alors le pouvoir refroidissant de la masse fluide est, notamment, proportionnel à l'excès de température du corps sur elle, comme l'avait pressenti Newton. L'intégration y est possible et conduit à des résultats simples, pleins d'intérêt, lorsque le corps immergé n'a que des courbures modérées (sauf, si l'on veut, à sa *proue* et à sa *poupe*); elle indique, notamment, pour le courant proposé,

un pouvoir refroidissant en raison directe de la racine carrée de sa vitesse générale. Les récentes expériences d'un jeune physicien de Montpellier, M. Paul Compan ([1]), où les excès de température atteignaient 300°, ont vérifié ces lois et apporté en outre, dans des limites très étendues de température et de pression, une confirmation nouvelle à celles de Dulong et Petit pour une masse gazeuse indéfinie en repos.

C'est surtout l'exposé de la théorie mécanique de la lumière annoncé au Tome I (dans l'Introduction), qui a reçu ici un développement considérable. Citons, parmi les additions que j'y ai faites : la preuve de la détermination complète de la suite des mouvements vibratoires de l'éther, dans un ensemble de milieux transparents contigus, par l'adjonction, aux trois équations indéfinies, des quatre conditions définies consistant à égaler de part et d'autre, aux surfaces séparatives, les déplacements tangentiels et les rotations moyennes; la démonstration de la perpendicularité de la vibration au rayon, par les expériences de Seebeck touchant l'angle de polarisation de la lumière réfléchie sur un cristal uniaxe et dans une section principale; l'explication, sur les bases posées par M. Potier, des particularités que présente la réflexion vitreuse aux environs de l'angle de polarisation; le calcul théorique de la rotation, étudiée expérimentalement par Fizeau, que la translation du corps transparent imprime au plan de polarisation du rayon réfracté; l'explication des dispersions anomales accompagnant l'absorption des radiations par les corps; la démonstration de l'obliquité sur les plans d'onde, dans les corps opaques isotropes, du rayon lumineux, qu'attire, en quelque sorte, la normale à la face d'entrée; le calcul de la dispersion des rayons réfractés par

---

([1]) Mort le 9 décembre 1902, cinq mois seulement après avoir soutenu (le 30 juin), devant la Faculté des Sciences de Montpellier, sa Thèse pour le Doctorat ès sciences physiques ! Cette Thèse, intitulée *Essai sur le pouvoir refroidissant de l'air et sur les lois du rayonnement*, contient le détail des expériences dont il est parlé ci-après (p. 189 et 190). Elle a été reproduite, en août 1902, par les *Annales de Chimie et de Physique* (7e série, t. XXVI, p. 488 à 574); et le *Journal de Physique théorique et appliquée* (4e série, t. I, p. 708 à 715) en a donné une analyse assez développée dans son numéro de novembre 1902.

un corps transparent isotrope en mouvement, reconnue identique à celle qui aurait lieu, dans le même corps en repos, pour des radiations ayant très sensiblement mêmes *périodes apparentes* respectives que celles dont il s'agit, conformément à une assertion de M. Mascart; la théorie des doubles réfractions circulaire et elliptique des ondes planes *latéralement limitées,* avec la démonstration générale du principe d'Huygens sur la construction des rayons par le moyen des surfaces d'onde courbes, cette démonstration comprenant soit le cas où les vibrations sont *pendulaires,* mais régies par des équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque, soit même le cas d'ébranlements *isolés* ou de forme arbitraire, quand les équations linéaires du mouvement ne contiennent que les dérivées du second ordre des déplacements, mais les contiennent affectées de coefficients constants quelconques, ou sans qu'il existe aucun potentiel; la théorie de l'absorption par les cristaux translucides et par les milieux dissymétriques modérément opaques; celles des dispersion et absorption rotatoires; la formule des vitesses de propagation des ondes, en fonction rationnelle de l'orientation moyenne des mouvements de l'éther, dans les corps transparents dissymétriques; enfin, l'extension du principe de Fermat sur l'économie du temps au mouvement relatif de la lumière dans les milieux hétérogènes transparents, animés d'une translation rapide.

Dans toutes ces questions, comme dans celles que j'avais traitées antérieurement, les phénomènes lumineux offrent ce caractère remarquable d'avoir les lois élémentaires les plus simples que l'on puisse imaginer. L'éther, soit à l'état libre, soit parsemé de molécules pondérables, paraît, en effet, réaliser dans ses équations de mouvement, bien plus que tous les autres milieux élastiques, le maximum de la simplicité compatible avec le pouvoir de vibrer transversalement ([1]). C'est, à chaque pas, dans tout ordre nouveau

---

([1]) Pour la comparaison à en faire avec les solides élastiques, *voir* les pages 274 et 276 du Volume en ce qui concerne les équations indéfinies, et les pages 338

de questions que l'on y aborde, l'hypothèse la plus naturelle, s'offrant, en quelque sorte, la première à l'esprit, qui explique et prévoit les phénomènes.

à 346, ou encore 384, touchant les relations définies, spéciales aux surfaces limites.

Même quand il s'agit seulement de milieux isotropes indéfinis, les lois du mouvement sont notablement simplifiées, dans l'éther, par l'absence de vibrations longitudinales, absence entraînant, comme on sait, la *séparation* des trois fonctions ξ, η, ζ, petits déplacements suivant les x, y, z, à l'époque t, des diverses particules d'éther, distinguées les unes des autres par leurs situations mêmes (x, y, z) d'*état naturel*. Une seule de ces fonctions figure donc dans chacune des trois équations aux dérivées partielles.

Celles-ci sont, par exemple, pour l'éther libre,

$$\rho\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mu\Delta_2\xi, \qquad \rho\frac{d^2\eta}{dt^2} = \mu\Delta_2\eta, \qquad \rho\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \mu\Delta_2\zeta,$$

ρ et μ désignant respectivement la densité et le coefficient d'élasticité de l'éther. Or comme, d'une part, ξ, η, ζ expriment l'*état statique* du milieu et que leur paramètre différentiel Δ_2 est leur dérivée naturelle *dans l'espace* ou la mesure de leur rapidité même d'accroissement *autour* du point (x, y, z) (ainsi que je le démontre dans mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, au Tome I, *Compléments*, p. 72*), comme, d'autre part, les vitesses $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ définissent l'*état dynamique* du milieu et que les accélérations $\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2}$ en sont la dérivée par rapport au temps, ces équations signifient que *la dérivée, par rapport au temps, de l'état dynamique, est proportionnelle à la dérivée, par rapport à l'espace, de l'état statique.*

Il ne serait évidemment pas possible d'imaginer des équations de mouvement plus simples, sachant que de telles équations doivent donner l'accélération de la particule (x, y, z) en fonction de l'état actuel de la matière *environnante* ou, plus précisément (à raison de la nature élastique du milieu), en fonction des déplacements relatifs de cette matière (par rapport à la particule même).

Quant aux cas d'hétérotropie, les solides les moins compliqués sont les solides *primitivement* isotropes, *déformés* d'une manière permanente par des actions temporaires soit déjà disparues, soit partiellement subsistantes encore. Or, comparés à l'éther d'un cristal dans leur manière de vibrer, ces solides sont bien plus éloignés que lui d'être isotropes; car la transformation *anamorphique*, consistant à remplacer les coordonnées d'état naturel et les déplacements par trois variables et trois fonctions respectivement proportionnelles à ces quantités (avec six coefficients de proportionnalité différents), qui réduit les équations indéfinies d'équilibre de ces corps à celles des corps isotropes, réduit les équations indéfinies de leurs mouvements à une forme comme celle des équations de mouvement de l'éther des cristaux. En d'autres termes, il y a à faire, pour passer des corps hétérotropes *les plus simples* à l'éther des cristaux transpa-

Aussi Fresnel a-t-il pu, sur les indications fournies par quelques faits d'expérience le plus souvent très vulgaires, deviner au moyen de ce principe de simplicité maxima les phénomènes les plus déli-

---

rents *les plus complexes,* un pas considérable vers la simplicité, qui serait même suffisant, à l'état statique, pour atteindre l'isotropie.

On peut voir, sur ce sujet des solides isotropes déformés, considérés dans les lois de leur équilibre et de leurs vibrations, comparativement aux solides isotropes et à l'éther des cristaux biréfringents, les pages 665 à 673 de mon Volume de 1885 intitulé *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, etc.;* et mon *Mémoire sur les ondes dans les milieux isotropes déformés,* résumé, dès le 3 juillet 1865, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. LXI, p. 19), mais publié, en 1868 seulement, au *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (2ᵉ série, t. XIII, p. 209 à 241).

Le principe, mis en vue ci-après (p. XIII), de Fresnel, touchant la dépendance exclusive où serait, de la direction des vibrations, la vitesse ω de propagation des ondes planes, ne s'applique pas entièrement à ces milieux, quoique les formules (13) et (18) du Mémoire cité y donnent (avec les notations du présent Ouvrage), entre la direction (approchée) (l'_1, m'_1, n'_1) de la vibration et celle (l, m, n) de la normale aux ondes, une double proportion, *de forme rationnelle,*

$$(\varepsilon)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{l}{l'_1(a^2l'^2_1+b^2m'^2_1+c^2n'^2_1-a^2)} &= \frac{m}{m'_1(a^2l'^2_1+b^2m'^2_1+c^2n'^2_1-b^2)} \\ &= \frac{n}{n'_1(a^2l'^2_1+b^2m'^2_1+c^2n'^2_1-c^2)}, \end{aligned} \right.$$

définissant généralement la direction des ondes en fonction de celle des vibrations et, par suite, faisant, en définitive, tout dépendre de celle-ci. En effet, dans le cas le plus intéressant, point de départ indispensable de la généralisation qui a conduit Fresnel aux lois de la double réfraction, et qui est le cas d'isotropie autour d'un axe, comme l'axe des z par exemple, où $b = a$, cette double proportion devient indéterminée, du moins en partie, à raison de la forme qu'elle prend alors et qui est, comme on le reconnaît aisément,

$$\frac{l}{l'_1 n'^2_1} = \frac{m}{m'_1 n^2_1} = \frac{n}{n'_1(n'^2_1-1)}.$$

Elle se trouve satisfaite, quelle que soit la direction (l, m, n) de la normale à l'onde, par les deux vibrations (l'_1, m'_1, n'_1) se faisant, dans le plan de l'onde, l'une perpendiculairement à l'axe, ou avec $n'_1 = 0$, l'autre dans le plan de l'axe et de la normale à l'onde, ou rendant l, m respectivement proportionnels à l'_1, m'_1. Or, si l'on considère la première, où l'_1, m'_1, n'_1 sont entre eux comme $-m$, l, 0, mais qui fait un angle constant avec l'axe, sa vitesse ω de propagation varie avec l'inclinaison de l'axe sur le plan de l'onde et dépend ainsi d'autre chose que de la direction de la vibration par rapport à l'axe ; car c'est seulement dans un cas particulier, où les pressions déformatrices subsistent encore, savoir, pour une loi d'actions moléculaires très spéciale, que cette vitesse de propagation se réduit à une constante. Quant à l'autre vibration, d'inclinaison variable par rapport à

cats et les plus cachés. Parmi les mémorables applications qu'il en fit durant sa brève carrière, il faut signaler surtout le double postulatum, si bien confirmé par la théorie mécanique (p. 420

---

l'axe et à laquelle la principe de Fresnel ferait supposer une vitesse ω de propagation variable aussi, c'est justement elle qui a vitesse de propagation constante, du moins dans un milieu désormais soustrait aux pressions déformatrices ayant altéré d'une manière permanente son isotropie. Ces détails sont démontrés au Paragraphe VIII du Mémoire cité du *Journal de Mathématiques* : j'y reviendrai d'ailleurs à la fin de cette Note.

Le principe de Fresnel ne s'applique donc pas aux solides primitivement isotropes, déformés pareillement tout autour d'un axe.

Mais insistons un instant sur le cas, plus général, d'un milieu isotrope déformé où a, b, c sont inégaux, et où ce principe s'applique à très peu près. L'on remarque, en remplaçant $l_1'^2$ par $1 - m_1'^2 - n_1'^2$ dans le premier rapport de la double proportion (ε) ci-dessus, et, de même, $m_1'^2$, $n_1'^2$ par les valeurs analogues dans les deux autres rapports, que cette double proportion (ε) prend la forme suivante, où entrent seulement par leurs différences les constantes a^2, b^2, c^2 du milieu et seulement par leurs rapports les cosinus directeurs l_1', m_1', n_1' :

$$(\varepsilon')\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{l}{(c^2-a^2)\dfrac{n_1'}{m_1'}-(a^2-b^2)\dfrac{m_1'}{n_1'}} &= \frac{m}{(a^2-b^2)\dfrac{l_1'}{n_1'}-(b^2-c^2)\dfrac{n_1'}{l_1'}} \\ &= \frac{n}{(b^2-c^2)\dfrac{m_1'}{l_1'}-(c^2-a^2)\dfrac{l_1'}{m_1'}}. \end{aligned} \right.$$

Alors les carrés des trois dénominateurs binomes ont pour leur somme, figurant par sa racine carrée dans les formules correspondantes des trois cosinus directeurs $l\omega$, $m\omega$, $n\omega$, ou $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, de la normale à l'onde, l'expression simple

$$(\varepsilon'')\qquad \left(\frac{b^2-c^2}{l_1'}\right)^2+\left(\frac{c^2-a^2}{m_1'}\right)^2+\left(\frac{a^2-b^2}{n_1'}\right)^2.$$

Quant à la vitesse ω de propagation des ondes dans le même milieu isotrope déformé, elle a pour carré, à des écarts près comparables aux carrés des petites différences existant entre a^2, b^2 et c^2,

$$(\zeta)\quad \omega^2 = a^2 l_1'^2 + b^2 m_1'^2 + c^2 n_1'^2 + \frac{\sigma}{\rho}\left(a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma - \frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right):$$

σ, ρ y désignent deux certains coefficients, spécifiés dans le Mémoire cité et caractéristiques, l'un, ρ, de la nature du milieu isotrope primitif, l'autre, σ, *par son excédent sur* ρ, de la partie des pressions déformatrices qui subsiste encore. Enfin, les constantes positives peu différentes a^2, b^2, c^2 dépendent de la nature du corps isotrope primitif et des déformations qu'il a subies : elles auraient, avec les notations du Mémoire cité de 1865 ou de 1868, les expressions respectives $\mu + \sigma\dfrac{a+b+c}{3} + \rho(a, b, c)$, où a, b, c sont alors de très petites quantités de l'ordre des dilatations permanentes produites, et ayant entre elles les rapports

et 486) que, dans les corps non isotropes, la vitesse de propagation des ondes et leur absorption graduelle varient seulement avec la direction des vibrations : hypothèse éminemment naturelle, mais des plus hardies à force d'être simple ([1]), et sans laquelle lui aurait été impossible sa magnifique découverte des cristaux biaxes, par une induction (p. 419) également merveilleuse de simplicité.

---

constants *supposés gardés, durant tout le temps de leur action,* par les trois pressions déformatrices principales ou mutuellement rectangulaires. Ainsi, *tandis que le carré de la vitesse de propagation est, dans l'éther des cristaux transparents, fonction linéaire des carrés des trois cosinus directeurs approchés de la vibration, il l'est à la fois, dans les solides isotropes déformés, de ces trois carrés et de ceux des cosinus directeurs de la normale aux ondes.*

L'hypothèse $\sigma = 0$, qui réduit l'expression (ζ) de ω^2 à la forme convenant pour l'éther des cristaux, suppose donc, comme j'ai dit plus haut (p. XI) dans le cas particulier d'un axe d'isotropie, une relation très spéciale entre le coefficient spécifique ρ et la partie encore subsistante des actions déformatrices. En réalité, lorsque celles-ci ont disparu, ou qu'il reste seulement la *déformation permanente* pour altérer l'isotropie primitive, la différence $\sigma - \rho$ s'annule; et la relation (ζ) devient

$$(\zeta')\quad \omega^2 = a^2(l_1'^2 + \cos^2\alpha) + b^2(m_1'^2 + \cos^2\beta) + c^2(n_1'^2 + \cos^2\gamma) - \frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Ainsi, les cosinus directeurs de la normale aux ondes et ceux de la direction approchée de la vibration entrent alors ensemble, *de la même manière,* dans la formule rationnelle approchée, *linéaire par rapport à leurs carrés,* de ω^2.

Faisons $b = a$, ou supposons que l'isotropie autour de l'axe des z se soit conservée. Il viendra

$$(\zeta'')\qquad \omega^2 = a^2 + (c^2 - a^2)\left(n_1'^2 + \cos^2\gamma - \frac{1}{3}\right).$$

Et la vibration perpendiculaire à l'axe, ou pour laquelle s'annule le cosinus directeur n_1', se comportera tout autrement que celle du rayon lumineux *ordinaire* des cristaux uniaxes; car sa vitesse ω de propagation restera variable avec $\cos\gamma$, c'est-à-dire avec l'inclinaison de l'axe sur le plan des ondes. Mais, comme il a été dit également ci-dessus, l'autre vibration, située dans le plan de l'axe et de la normale aux ondes, ou pour laquelle n_1' est sensiblement le cosinus du complément de γ, aura sa vitesse de propagation constante; car l'hypothèse $n_1' = \sin\gamma$ donne

$$\omega^2 = a^2 + \frac{2}{3}(c^2 - a^2) = \frac{a^2 + 2c^2}{3}.$$

([1]) Même pour l'éther, elle a besoin d'être convenablement interprétée. C'est, par exemple, en fonction non pas précisément des cosinus directeurs de la vibration, mais de ceux de sa projection sur le plan de l'onde, que la vitesse de propagation de celle-ci s'exprime simplement. Il est vrai que les deux directions de la vibration et de sa projection sur le plan de l'onde peuvent, dans la pratique, être presque toujours confondues, comme le faisait Fresnel.



Ce second Volume contient, à raison même des questions qui s'y trouvent traitées, plus de formules que le Tome I. Mais il est fidèle au même esprit, consistant à ne faire intervenir l'Analyse que dans la mesure où elle semble nécessaire pour fixer l'intuition et arriver aux résultats numériques. Les questions y sont donc, comme dans le premier Volume, présentées autant que possible d'une manière concrète, à la fois géométrique et physique.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME II.

VINGT-SEPTIÈME LEÇON. — *Propagation de la chaleur dans un solide homogène indéfini, à une, deux ou trois dimensions (barre prismatique mince, plaque plane à faces parallèles, corps massif) : équations du problème dans les cas de trois et de deux dimensions.*

VINGT-HUITIÈME LEÇON. — *Suite : conductibilités principales d'une plaque; équation du problème dans le cas d'une seule dimension notable.*

VINGT-NEUVIÈME LEÇON. — *Suite : intégration des équations pour les trois cas, lorsque le corps ne reçoit plus de chaleur.*

Trente-cinquième Leçon. — *Sur le pouvoir refroidissant d'une masse fluide indéfinie, soit dépourvue de tout mouvement général, soit à l'état de courant uniforme.*

NOTE I. — Sur la résistance opposée aux petits mouvements d'un fluide indéfini, par un solide immergé dans ce fluide.

Première Partie. — *Lois générales de la résistance, dans l'hypothèse d'une fluidité parfaite.*

NOTE II. — Exposé de la théorie des ondes lumineuses contenue en germe dans les troisième et quatrième leçons.

Première Partie. — *Formules générales et équation des forces vives.*

Deuxième Partie. — *Constitution d'un pinceau de lumière, dans un milieu ou isotrope, ou biréfringent.*

SIXIÈME PARTIE. — *Dispersion.*

SEPTIÈME PARTIE. — *Polarisation rotatoire; double réfraction circulaire et elliptique; polychroïsme.*

HUITIÈME PARTIE. — *Propagation d'un pinceau de lumière dans un milieu hétérogène; principe de Fermat.*

NEUVIÈME PARTIE. — *Transmission des mouvements non pendulaires, dans les cas les plus simples de non-homogénéité de leurs équations aux dérivées partielles.*

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME II.

ERRATA AUX TOMES I ET II.

ERRATA SUPPLÉMENTAIRE POUR LE TOME I.

Page 6, ligne 4, après « Laplace », ajouter « et Poisson ».

Page 32, ligne 6 en remontant, ajouter la phrase suivante :

« Ces équations, des petits mouvements des corps *élastiques*, isotropes et homogènes, s'y appliqueront même bien mieux (aux fluides vibrant très rapidement) qu'aux solides pour lesquels elles semblaient avoir été exclusivement établies; car la solidification des corps ne s'opère jamais avec la lenteur, l'uniformité, qui seraient nécessaires pour produire une homogénéité et une isotropie comparables à celle d'un fluide en repos, supposé que, par lui-même ou absolument parlant, l'état solide les admette à un aussi haut degré. »

Page 55, ligne 11 en remontant, après « vitesse », ajouter « V ».

Page 56, ligne 8 en remontant, *au lieu de* « la première partie », *lire* « les deux premières parties », et ligne 7 en remontant, *au lieu de* « la seconde partie », *lire* « les deux dernières parties ».

Page 62, ligne 5 en remontant, *au lieu de* « n° 37 », *lire* « n° 60 ».

Page 151, ligne 2 en remontant, *au lieu des mots* « des quatre dernières leçons », *lire* « de six des dernières leçons ».

Page 154, à la Note, *lire* « aux n°s 132, 210 et 212 ».

Page 158, à la première Note, *lire* « dans les XXVIIe et XXVIIIe leçons (n°s 201 à 208) », et, à la dernière Note, *lire* « la XXIIe leçon (n° 237) ».

Page 159, ligne 2 en remontant, *lire* « dans les XXVIIe et XXVIIIe leçons ».

Page 171, ligne 5 en remontant, *voir* l'errata du t. I, p. XXVII.

Page 215, ligne 10, *au lieu des mots* « le quatrième quadrant de la circonférence », *lire* « un quadrant de la circonférence différent du premier ».

Page 255, ligne 23, *au lieu de* « ayant leurs valeurs moyennes nulles », *lire* « ayant leurs produits moyens par U_0 nuls ».

Page 288, ajouter, en Note : « Une facilité de circulation un peu plus grande, pour les courants de convection, autour de la sphère qu'autour du cube, explique naturellement cette légère augmentation apparente de la conductibilité exté-

rieure k de la sphère, même à égalité de son degré de poli avec le cube (*voir*, à ce sujet, le Tome II, p. 196). »

ERRATA AU TOME II.

Page 51, à la ligne 2 de la Note, rétablir l'exposant 2 de R.

Page 87, ligne 13, *au lieu de* « $d\sigma$ », *lire* « $d\sigma$ ».

Page 96, dernière ligne, *au lieu de* « dernière partie », *lire* « IXe partie ».

Page 107, ligne 9 en remontant, *au lieu de* « première et dernière », *lire* « IIe et IXe ».

Page 156, ligne 4 en remontant, ajouter en Note ceci : « A une approximation plus élevée, on pourrait, appelant θ_e la température de l'éther en (x, y, z) et $L(\theta_e - \theta)$ la chaleur que cède directement l'éther à l'unité de volume du fluide, ajouter au second membre de l'équation indéfinie (3) le terme $L(\theta_e - \theta)$. Mais l'excédent de complication introduit par ce terme rendrait sans doute l'équation bien plus difficile encore à utiliser qu'elle ne l'est déjà. »

Page 192, à la fin de la formule (42), le radical porte sur la différence $z - Z$.

Page 268, à la fin de la Note concernant mes premiers travaux sur la lumière, j'aurais pu ajouter les deux alinéas suivants :

« Je n'avais, à cette époque, aucune connaissance des expériences ou des idées de du Buat sur les *poupes* et *proues* fluides, non plus que de la théorie corrélative de Poisson sur les oscillations simultanées d'un pendule et de l'air ambiant ; de sorte que, tout en assimilant à la résistance d'un solide, immergé dans un fluide en mouvement, celle des molécules pondérables aux vibrations de l'éther, je ne pouvais m'appuyer simplement, comme je le fais ici, sur cette analogie, pour attribuer à chaque molécule pondérable une résistance proportionnelle à l'accélération relative de l'éther par rapport à elle. Et je suppléais à mon ignorance de la loi de du Buat, en admettant que, dans les corps transparents, chaque molécule pondérable vibre, sous l'action de l'éther ambiant, à l'unisson de cet éther, ou synchroniquement avec lui, les déplacements propres ξ_1, η_1, ζ_1 de la molécule dont la situation d'état naturel est (x, y, z), se trouvant ainsi fonctions linéaires des déplacements, ξ, η, ζ, de l'éther de même situation *naturelle* : hypothèse que nous savons (t. I, p. 66) revenir au principe de du Buat. A une approximation plus élevée, comme, par exemple, dans l'explication des phénomènes de dispersion et de polarisation rotatoire, ξ_1, η_1, ζ_1 étaient censés dépendre des déplacements de l'éther non seulement en (x, y, z), mais aussi tout autour, dans une très petite étendue ; de sorte que ξ_1, η_1, ζ_1 devenaient des fonctions linéaires de ξ, η, ζ et des dérivées de ξ, η, ζ en x, y, z.

» J'ai donné à ma théorie des ondes lumineuses sa forme actuelle, d'abord en juin 1885, dans la *Notice* supplémentaire, sur mes Travaux, distribuée aux Membres de l'Académie des Sciences pour ma candidature à cette Académie (p. 18), puis, avec plus de détails, dans mes Notes de 1893 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXVII, p. 80, 138 et 193), c'est-à-dire quand je suis revenu à l'Optique, après des études nombreuses d'Hydrodynamique et, en particulier, après deux Articles d'avril 1885 sur la résistance des fluides aux petits mouvements d'un solide immergé (mêmes *Comptes rendus*, t. C, p. 935 et 974). »

Page 315, à la fin de la Note, ajouter l'alinéa suivant :

« Il est possible, toutefois, que le motif purement extrinsèque, donné ici, du rejet de la théorie des ondes par Newton, soit resté implicite dans son esprit, bien que des plus naturels. Mais l'objection capitale qu'il adresse à cette théorie,

et qui n'avait pas arrêté Huygens tout en lui paraissant insoluble, savoir, l'impossibilité d'expliquer par des vibrations *longitudinales*, *les seules que l'on connût* chez les milieux élastiques, la décomposition de la lumière, dans le spath, en deux rayons polarisés suivant deux plans rectangulaires, tenait justement à la même cause, c'est-à-dire à l'ignorance où l'on était des équations (aux dérivées partielles) du mouvement d'un tel milieu. Car leur connaissance et celle de leur intégration ont suffi pour rendre évidente l'existence, devinée par Fresnel, des vibrations *transversales*, qui ont pleinement éclairci le mystère. »

Page 375, à la fin de la ligne 7, *lire* « du côté des x positifs ».

Page 379, ligne 6 en remontant, *au lieu de* « cos ν », *lire* « cos ν_0 ».

Page 384, ligne 23, ôter le mot « même ».

Page 397, à la ligne 4 en remontant, ajouter l'alinéa :

« Il n'est pas inutile de remarquer que l'impulsion vibratoire de l'éther. ainsi évaluée, sur chaque molécule pondérable, imprime à la molécule un mouvement synchrone à celui de l'éther, sans cesse nouveau, qui l'entoure; car les accélérations, *proportionnelles*, de la molécule pondérable autour de sa situation moyenne *actuelle* (x, y, z), effets de l'impulsion dont il s'agit, sont aussi, précisément, des dérivées secondes *complètes* par rapport au temps. Par suite, si le coefficient de résistance pouvait être assez grand, et les actions intermoléculaires du corps rester négligeables, le mouvement vibratoire d'une molécule pondérable *isotrope* serait constamment identique à celui de l'éther ambiant. »

Page 402, ligne 12, ajouter : « Voir aux *Compléments* la Note de la page 570 ».

Page 412, ajouter au texte l'alinéa suivant :

« Toutefois, les mesures les plus précises des indices de réfraction semblent indiquer qu'une augmentation de pression, à température constante, en produisant le rapprochement des molécules du corps, accroît généralement quelque peu la résistance proportionnelle ϖa de chacune, comme si les molécules prenaient alors, par l'effet combiné de leurs actions atomiques individuelles et de leurs répulsions ou attractions physiques réciproques, une forme moins arrondie et plus résistante, ou un volume légèrement plus grand. »

Page 414, au dernier terme de la formule (169), *lire* « d » *au lieu de* « d ».

Page 442, à la fin du n° 64, ajouter : « La question sera traitée plus complètement dans la Xe partie, p. 581 à 583 ».

Page 452, ligne 4, mettre en Note ceci :

« On verra, dans la Xe partie (p. 583 à 587), que, sauf sous l'incidence normale, le rayon lumineux, dans un milieu opaque, est oblique aux ondes, et qu'il résulte de cette circonstance un accroissement de l'anomalie de dispersion. »

Page 461, effacer ce qui suit le mot « période » aux lignes 6 et 7; puis modifier ainsi les lignes 13 à 18 : « Il en sera de même, d'après la seconde formule (219), du quotient $\frac{g}{a}$ figurant dans (230), quotient égal à $\frac{\rho\alpha}{2\mu}$. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'une solution, saline ou autre. Si donc elle ne contient.... »

Page 461, ligne 20, remplacer le coefficient g par α.

Page 463, ligne 4 en remontant, *au lieu de* « relations définies », *lire* « équations indéfinies ».

Page 464, aux lignes 10 et 18, les deux produits $l\omega$ et $m\omega$ ont été intervertis. De plus, à la ligne 18, ajouter en Note :

« Ces formules résultent des deux relations

$$l\xi + m\eta + n\zeta = 0, \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0,$$

que l'on obtient en ajoutant les équations (220) (p. 458), préalablement multi-

pliées soit par l, m, n, soit par ξ, η, ζ, et en attribuant à ξ, η, ζ, comme unique facteur variable, l'exponentielle $e^{k(t-lx-my-nz)\sqrt{-1}}$. Car, ici où $n=0$ et où l, m sont entre eux comme $\cos i$, $\sin i$, ces deux relations donnent ξ, η, ζ proportionnels à $-\sin i$, $\cos i$, $\mp\sqrt{-1}$; après quoi, chacune des trois équations (220) se réduit à la double équation (225) en ω .»

Page 465, aux lignes 14 et 15, pareille interversion a été faite entre $l'\omega'$ et $m\omega'$, $l''\omega''$ et $m\omega''$, $l_1\omega_1$ et $m\omega_1$, $l_2\omega_2$ et $m\omega_2$.

Page 469, à la fin de la seconde formule (235), *lire* « $\frac{d^2\eta}{dz^2}$ ».

Pages 478 et 479, aux formules (α') et suivantes, changer partout le signe de ν.

Page 483, ligne 23, *au lieu de* « présente Note », *lire* « présent numéro ».

Page 487, ligne 6 en remontant, ajouter en Note ce qui suit :

« Les formules (107) de Fresnel (p. 354), quoique relatives aux corps transparents, indiquent un résultat général assez semblable au précédent, c'est-à-dire une réduction plus grande des *courtes* que des *longues* radiations, dans la lumière traversant, avec de nombreuses réfractions, un amas de tels corps, disséminés dans le vide ou dans l'air. Ces formules donnent, en effet, des vibrations réfléchies d'autant plus sensibles et, par suite, des vibrations réfractées d'autant moins *fortes*, que l'indice N, supposé d'abord égal à l'unité, s'en éloigne davantage soit dans un sens, soit dans le sens contraire : or on sait qu'il s'en éloigne plus, dans les deux cas, pour le violet que pour le rouge, à la surface libre d'un corps transparent.

» Ce fait n'expliquerait-il pas, *sommairement*, la prédominance du rouge dans la lumière des astres à l'horizon, qui nous arrive réfractée, en quelque sorte, et une infinité de fois, par les fines poussières, solides ou liquides, existant toujours (en proportion variable) dans les couches inférieures de l'atmosphère? Et n'expliquerait-il pas de même, ou en tant que simple aperçu, la couleur *bleue* du ciel, c'est-à-dire une proportion notable, prépondérante, de radiations à courte période, dans la lumière diffuse qui a été *surtout réfléchie*, ou qui, ayant comme rasé inférieurement les mêmes couches, nous en vient, pendant le jour, en quantité appréciable, après une multitude de réflexions sur ces poussières atmosphériques? »

Page 489, à la fin, ajouter en Note : « Voir aux *Compléments*, relativement à la formule (ε'''), le haut de la page 601. »

Page 574, ligne 13, *au lieu de* « $\frac{d\xi'}{dx}$ », *lire* « $\frac{\partial\xi'}{\partial x}$ ».

Page 575, dernière ligne, *au lieu de* « $\frac{\partial m'}{dx}$ », *lire* « $\frac{\partial m'}{\partial x}$ ».

Page 576, ligne 8 en remontant, *au lieu de* « (θ) », *lire* « (θ') ».

Page 622, ligne 9, ajouter : « Et, dans le cas contraire, la petitesse supposée du coefficient φ d'asymétrie permet de prendre, là où il figure, a^2, b^2, c^2 égaux à leur moyenne, c'est-à-dire de réduire le dernier terme de (49) au produit du carré de cette moyenne par $\frac{\varphi S}{k^2}$: la dissymétrie n'ajoute donc à l'expression usuelle de ω^2, c'est-à-dire à la première (50), qu'un petit terme, proportionnel à la seconde expression (50) ou, tout à la fois, à l'axe φ d'asymétrie et *au degré d'arrondissement* (en quelque sorte) des trajectoires dans le plan qui lui est perpendiculaire, degré que mesure le demi-quotient de la constante S des aires par le carré moyen des vitesses successives de l'éther, ou ce qu'on peut appeler *l'aire décrite dans l'unité de temps par unité de vitesse effective*. »

THÉORIE ANALYTIQUE

DE

LA CHALEUR.

TOME II.

VINGT ET UNIÈME LEÇON.

RÉDUCTION DE CERTAINS PROBLÈMES DE REFROIDISSEMENT OU D'ÉCHAUFFEMENT PAR RAYONNEMENT, AU CAS PLUS SIMPLE DU REFROIDISSEMENT OU DE L'ÉCHAUFFEMENT DES MÊMES CORPS PAR CONTACT : REFROIDISSEMENT D'UN MUR D'ÉPAISSEUR INDÉFINIE.

161. Différence des deux modes, par contact et par rayonnement, de refroidissement ou d'échauffement des corps. — En général, le calcul des températures d'un corps, refroidi ou chauffé par le rayonnement, positif ou négatif, des divers éléments de sa surface vers les parties en regard d'une enceinte extérieure portées à des températures données, est beaucoup plus complexe qu'il ne serait, si le refroidissement ou l'échauffement avaient lieu par contact, c'est-à-dire si ces températures extérieures étaient directement communiquées aux éléments en question de la surface. Il peut donc être utile de remarquer les cas où le premier de ces problèmes est réductible au second, d'autant plus que ces cas se

trouvent comprendre justement quelques-unes des questions les plus intéressantes de la théorie analytique de la chaleur, celles qui concernent soit le refroidissement séculaire de la croûte terrestre, dans un espace interstellaire supposé à une température constante (abstraction faite de l'action du Soleil, qui s'évalue à part), soit les températures invariables que tendent à prendre les divers points de cette croûte, ou même du noyau terrestre sous-jacent, sous l'influence de températures extérieures fixes et connues, mais inégales, réalisées au-dessus des divers éléments de la surface.

Que le refroidissement et l'échauffement d'un corps aient lieu par contact ou qu'ils aient lieu par rayonnement, les équations déterminant les températures u de ce corps sont les mêmes, sauf la relation qui exprime les influences, sur sa couche superficielle, de l'enceinte, ou des températures extérieures u_e. Dans le cas simple du contact, cette relation se réduit à $u = u_e$; et c'est la température interne u, sous la surface, qui est connue.

Au contraire, dans le cas du rayonnement, le flux de chaleur, F_n, absorbé par l'unité d'aire de la surface et dans l'unité de temps, égale le produit d'un coefficient fini, k, de conductibilité superficielle, par l'excédent $u_e - u$ de la température extérieure sur la température interne; et c'est, par conséquent, l'expression

$$u + \frac{1}{k} F_n,$$

égale à u_e, qui se trouve seule donnée directement.

Pour simplifier, supposons le corps homogène et isotrope. Alors le flux F_n est le produit du coefficient constant K de la conductibilité intérieure par la dérivée $\frac{du}{dn}$ de la température le long d'une petite normale dn menée du dedans à la surface; et, si l'on appelle h le rapport $\frac{k}{K}$ des deux conductibilités superficielle et interne, on pourra regarder comme donnée sur toute la surface rayonnante l'expression $u + \frac{1}{h}\frac{du}{dn}$, puisqu'elle y égalera la température extérieure connue u_e. Or, la dérivée $\frac{du}{dn}$ étant la somme des dérivées respectives $\frac{du}{d(x, y, z)}$, multipliées par les cosinus directeurs

correspondants de la normale dn, cette expression $u + \frac{1}{h}\frac{du}{dn}$ est une certaine fonction linéaire

$$\varphi = u + G\frac{du}{dx} + H\frac{du}{dy} + I\frac{du}{dz} \tag{1}$$

de u et de ses trois dérivées premières en x, y, z, avec coefficients G, H, I connus sur toute la surface rayonnante. On pourrra, d'ailleurs, considérer cette fonction φ, même à l'intérieur du corps : alors on fera G, H, I soit constants, soit dépendants de x, y, z, suivant que tous les éléments de la surface rayonnante auront ou n'auront pas même orientation ; et G, H, I, dans ce dernier cas, seront, à l'intérieur, des fonctions continues de x, y, z dont on disposera librement en vue du but à atteindre, pourvu qu'elles prennent, sur la surface rayonnante, leurs valeurs effectives connues.

Ainsi, la seule différence qu'il y ait, dans les équations du problème, entre le cas du contact et celui du rayonnement, consiste en ce que, sur la couche superficielle en rapport avec l'enceinte, on donne la température interne u, en fonction de t, x, y, z, dans le cas du contact, mais seulement une certaine fonction linéaire φ de u et de ses dérivées premières en x, y, z, dans le cas du rayonnement.

162. Manière dont se fera la réduction du cas de rayonnement au cas de contact. — Or l'équation indéfinie que vérifie u dans le corps est ordinairement, comme on sait, de l'une ou de l'autre des deux formes

$$\left(\frac{d}{dt} - a^2\Delta_2\right)u = 0, \qquad \Delta_2 u = 0, \tag{2}$$

suivant qu'il s'agit d'un état calorifique variable avec le temps t, ou d'un état permanent ; et il pourra bien se faire que la fonction φ satisfasse à la même équation indéfinie. Cela arrivera, notamment, si tous les éléments de la surface rayonnante sont orientés de même ; car alors, G, H, I étant constants, chacun des quatre termes (1) de φ vérifiera séparément l'équation voulue (2). Si, en outre, le corps a des parties profondes où u soit astreint à

prendre asymptotiquement une certaine valeur constante u_0, la fonction φ s'y réduira très sensiblement à u, vu l'évanouissement qu'y éprouveront les dérivées premières de u; et cette fonction y vérifiera la même relation que u, savoir $\varphi = u_0$. Enfin, dans le cas de températures variables avec le temps t, il y aura une condition d'état initial, $u = f(x, y, z)$ avec f fonction arbitraire donnée, que u devra vérifier à l'instant de début du phénomène; et alors φ prendra évidemment les valeurs initiales, également connues,

$$(3) \qquad \varphi = f + \mathrm{G}\frac{df}{dx} + \mathrm{H}\frac{df}{dy} + \mathrm{I}\frac{df}{dz}.$$

Ces valeurs se réduiraient même à f, ou donneraient $\varphi = u$ au début, si la température initiale était constante, comme il arrivera dans les problèmes les plus intéressants.

La fonction φ prenant d'ailleurs, à la surface, dans le cas considéré du rayonnement, les valeurs données u_e, exactement comme le fait u dans le cas du contact, on voit que φ, *dans le refroidissement ou l'échauffement par rayonnement, sera régi par des équations exactement analogues, sinon même identiques, à celles qui déterminent u dans le refroidissement ou l'échauffement par contact*. Donc il suffira de savoir calculer u dans le cas du contact, pour pouvoir obtenir φ dans le cas du rayonnement. Or, une fois φ connu, on n'aura plus, pour avoir u, qu'à intégrer l'équation linéaire (1), aux dérivées partielles du premier ordre et prises seulement par rapport à x, y, z, en déterminant par la condition $u = u_0$ relative aux régions profondes, ou par quelque autre équivalente, la fonction arbitraire qu'introduit cette dernière intégration.

En général, celle-ci ne se fait pas sous forme finie, et la formule de u contient, par suite, un signe $\int$ de plus que celle de φ. L'expression de la température u emploiera donc des intégrales définies d'un degré de multiplicité plus élevé (d'une unité), dans le refroidissement ou l'échauffement par rayonnement, que dans le refroidissement ou l'échauffement par contact.

Je donnerai, de cette théorie, cinq exemples, dont trois se rapporteront à des états variables avec le temps t, et, deux, à des états permanents.

163. **Premier exemple : refroidissement, par rayonnement, d'un mur d'épaisseur indéfinie ; calcul de la fonction auxiliaire φ.** — Soit d'abord un mur ayant pour face, indéfinie en longueur et largeur, le plan des yz, et s'étendant sous une épaisseur ou profondeur très grande, du côté des x positifs, avec ses températures u fonction seulement du temps t et de la distance x à la surface libre. On donne, à l'époque $t = 0$, ses températures $u = f(x)$; et celles-ci sont supposées avoir sensiblement, pour x assez grand, une valeur u_0 constante, que l'on pourra regarder comme se conservant, à ces grandes profondeurs x, durant un temps illimité. Dès que t excède zéro, les espaces situés du côté des x négatifs sont censés tenus constamment à la température $u_e = 0$; et la surface $x = 0$ du mur rayonne désormais vers ces espaces, par unité d'aire, un flux $K\frac{du}{dx}$ égal à $k(u - u_e)$, ou à ku. On a donc ici $u_e = u - \frac{1}{h}\frac{du}{dx} = 0$; et il y a lieu de poser

$$(4) \qquad \varphi = u - \frac{1}{h}\frac{du}{dx}.$$

Cette fonction φ vérifie évidemment, comme u : 1° la première équation indéfinie (2), où Δ_2 se réduit à $\frac{d^2}{dx^2}$; et 2° la condition définie $\varphi = u_0$ pour x très grand (là où u ne varie plus sensiblement avec x et où, par suite, φ se confond avec u). Mais, de plus, elle satisfait à la relation spéciale $\varphi = 0$ (pour $x = 0$), qui est celle que vérifierait u à la surface si le refroidissement avait lieu par contact. Donc, le seul caractère qui distingue φ, de ce que serait u dans ce cas du refroidissement par contact, consiste en ce que l'état initial y est, d'après (4), $\varphi = f(x) - \frac{1}{h}f'(x)$, et non $\varphi = f(x)$. Par conséquent, φ prend l'expression qu'aurait u, dans un refroidissement par contact où les valeurs initiales de la température seraient celles de la fonction

$$(5) \qquad F(x) = f(x) - \frac{1}{h}f'(x).$$

Formons u pour un tel cas. La condition $u = 0$ sur la face $x = 0$ se trouvera vérifiée d'elle-même, si l'on imagine un massif occupant tout l'espace, par l'adjonction idéale, au mur proposé, de son

symétrique relativement au plan $x=0$, avec attribution à ce symétrique de températures initiales $F(x)$ égales et contraires à celles, $F(x')$, du mur réel, où nous supposons l'abscisse positive x' prise égale à $-x$. Alors, en effet, les changements simultanés de x en $-x$ et de u en $-u$ laisseront évidemment vérifiées, tout à la fois, l'équation indéfinie (2), la condition accessoire $u=\pm u_0$ pour les grandes valeurs de $\pm x$, et la relation d'état initial $u=F(x)$. La fonction u est donc identique à ce qu'elle devient quand on y change à la fois son signe et celui de x. Autrement dit, elle est fonction *impaire* de x; ce qui constitue la *symétrie calorifique inverse* par rapport au plan $x=0$. Et la fonction u, continue (sauf peut-être à l'instant initial), changeant de signe à la traversée du plan $x=0$, s'y annulera [1].

Il suffit donc de former u, ou φ, pour un massif indéfini en tous sens, où l'on aurait $F(-x)=-F(x)$. Or, alors, x variant de $-\infty$ à $+\infty$, et $F(x)$ se réduisant sensiblement aux deux constantes $\pm u_0$ pour les très grandes valeurs absolues de x, la formule de Fourier [2] permet de donner à la fonction d'état initial $F(x)$ la forme de l'intégrale définie

$$(6)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\int_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty}\cos(\alpha x-\alpha\xi)F(\xi)\,d\alpha\,d\xi.$$

D'ailleurs, tous les éléments de cette intégrale, sans changer de valeur à l'époque $t=0$, deviendront solutions simples de l'équation indéfinie (2) du problème, par l'adjonction du facteur $e^{-a^2\alpha^2 t}$. On aura donc, pour vérifier tout à la fois l'équation indéfinie et l'état initial, la formule

$$(7)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\int_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty}e^{-a^2\alpha^2 t}\cos(\alpha x-\alpha\xi)F(\xi)\,d\alpha\,d\xi.$$

---

(1) Si les valeurs initiales de $F(x)$ étaient prises égales et de même signe de part et d'autre du plan $x=0$, ou qu'on eût $F(-x)=F(x)$, le simple changement de x en $-x$ laisserait vérifiées les trois équations ou conditions du problème; et u serait, à toute époque, fonction *paire* de x. Il y aurait alors *symétrie calorifique directe* par rapport au plan $x=0$; et la dérivée $\frac{du}{dx}$ s'annulerait sur ce plan, que ne traverserait dès lors aucun flux de chaleur.

(2) *Voir*, par exemple, mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* [*Calcul intégral, Compléments*, p. 169*, formule (48)].

Or, si l'on effectue, dans son second membre, l'intégration en α, il devient visible que, pour les grandes valeurs absolues de x, u se réduit bien à $F(\pm\infty)$, ou à $\pm u_0$, de sorte que toutes les conditions du problème se trouvent satisfaites. En effet, l'on a (¹)

$$(7\,bis) \qquad \int_0^\infty e^{-(a^2t)\alpha^2}\cos[(x-\xi)\alpha]\,d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}};$$

et l'expression (7) de u revient à la suivante, obtenue en premier lieu par Laplace,

$$(8) \quad u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}F(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}F(x+2a\omega\sqrt{t})\,d\omega,$$

où le troisième membre se déduit du second en adoptant la nouvelle variable d'intégration $\omega = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$. Les seuls éléments influents de l'intégrale en ω sont évidemment ceux où l'exponentielle $e^{-\omega^2}$ est sensible et où, par conséquent, la variable ω ne se trouve pas très éloignée de zéro. Or, dans ces conditions, si x est très grand en valeur absolue, $F(x+2a\omega\sqrt{t})$ se confond avec $F(\pm\infty)$ ou avec $\pm u_0$; et il vient bien $u = \pm u_0$, vu la valeur connue, $\sqrt{\pi}$, de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2}\,d\omega$.

La formule (7) de u convenant ainsi pour φ, sous la condition $F(-x) = -F(x)$, développons-y le facteur $F(\xi)\cos(\alpha x - \alpha\xi)$ par la formule du cosinus d'une différence; et séparons, dans le produit, la partie en $F(\xi)\cos\alpha\xi$, *impaire* par rapport à ξ, ou qui aura sa valeur moyenne nulle et disparaîtra, de la partie *paire*, en $F(\xi)\sin\alpha\xi$, qui aura même valeur moyenne pour ξ négatif que pour ξ positif. Il suffira donc, en doublant le résultat, d'intégrer la partie subsistante entre les limites $\xi = 0$, $\xi = \infty$, qui sont celles où la fonction $F(\xi)$ est donnée directement dans notre mur; et la substitution finale, à F, de son expression (5), donnera, comme formule de φ utilisable pour le problème posé, si nous désignons

(¹) Même *Cours d'Analyse infinitésimale* [*Calcul intégral, Compléments*, p. 532*, formule (131)].



d'ailleurs plus explicitement par $\varphi(x, t)$ cette fonction φ,

$$(9) \quad \varphi(x, t) = \frac{2}{\pi} \overline{\int \int_0^{+\infty}} e^{-a^2\alpha^2 t} \sin \alpha x \sin \alpha\xi \left[f(\xi) - \frac{1}{h} f'(\xi)\right] d\alpha \, d\xi.$$

164. Formules de Fourier et de Poisson pour les températures du mur. — La température u s'obtiendra maintenant par l'intégration de l'équation linéaire (4), devenue

$$(10) \qquad \frac{du}{dx} - hu = -h\varphi(x, t),$$

et qui est simplement différentielle, mais à second membre. Son intégrale avec constante arbitraire c est, en remplaçant sous le signe $\int$, pour plus de clarté, la variable d'intégration x par ξ,

$$u = ce^{hx} - he^{hx} \int_\infty^x \varphi(\xi, t)\, e^{-h\xi}\, d\xi.$$

Posons-y, pour rendre constantes les limites d'intégration,

$$\xi = x + \zeta;$$

et elle prendra la forme assez simple

$$(10\,bis) \qquad u = ce^{hx} + h \int_0^\infty \varphi(x + \zeta, t) e^{-h\zeta}\, d\zeta.$$

Si l'on fait très grands x et, à plus forte raison, $x + \zeta$, la fonction φ se réduit à u_0 quel que soit t; et le dernier terme de (10 *bis*) devient $hu_0 \int_0^\infty e^{-h\zeta} d\zeta$, c'est-à-dire u_0. Comme la température u doit alors se réduire elle-même à u_0, son premier terme, ce^{hx}, ne peut pas y devenir infini; et l'on est tenu de poser $c = 0$.

On aura donc, en définitive,

$$(11) \qquad u = h \int_0^\infty \varphi(x + \zeta, t) e^{-h\zeta}\, d\zeta.$$

Il n'est pas inutile de reconnaître que cette formule de u vérifie bien les équations du problème. Et, d'abord, elle satisfait, on vient de le voir, à la condition $u = u_0$ pour x infini. De plus, d'après l'équation même (10) dont on l'a déduite, elle vérifie la

condition de rayonnement spéciale à $x = 0$, et même la condition d'état initial, $u = f(x)$ pour $t = 0$. Car, donnant à cette époque, d'après (4) où φ est alors $f(x) - \frac{1}{h}f'(x)$,

$$[u - f(x)] - \frac{1}{h}\frac{d}{dx}[u - f(x)] = 0,$$

elle conduit par l'intégration de cette équation différentielle à poser, si C désigne une constante,

$$u - f(x) = Ce^{hx}.$$

Or, pour x infini, u et $f(x)$ se réduisent à u_0; ce qui oblige à faire $C = 0$. Il vient donc $u = f(x)$ à l'époque considérée $t = 0$.

Enfin, u vérifie l'équation indéfinie du problème, qui est la première (2). Car, φ y satisfaisant, son expression (4), portée dans cette équation (2), donnera

$$\left(\frac{du}{dt} - a^2\Delta_2 u\right) - \frac{1}{h}\frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dt} - a^2\Delta_2 u\right) = 0,$$

ou bien, en intégrant par rapport à x et appelant $\psi(t)$ la constante arbitraire introduite,

$$\frac{du}{dt} - a^2\Delta_2 u = \psi(t)e^{hx}.$$

Or, pour x infini, u se réduit à u_0, et le premier membre s'annule quel que soit t; ce qui oblige, pour empêcher le second membre de devenir alors infini, à poser $\psi(t) = 0$. C'est dire que u vérifie l'équation indéfinie (2), comme les autres conditions ou relations du problème.

La formule (11) de u contient donc la solution cherchée; et nous pouvons y substituer à $\varphi(x + \zeta, t)$ son expression tirée de (9). Il vient

$$(12)\quad u = \frac{2}{\pi}\overline{\int\int\int}_0^{+\infty} e^{-h\zeta - a^2\alpha^2 t}\sin(\alpha x + \alpha\zeta)\sin\alpha\xi[hf(\xi) - f'(\xi)]\,d\zeta\,d\alpha\,d\xi.$$

L'intégration relative à ζ porte sur l'expression

$$e^{-h\zeta}\sin(\alpha x + \alpha\zeta)\,d\zeta = (\sin\alpha x)(e^{-h\zeta}\cos\alpha\zeta\,d\zeta) + (\cos\alpha x)(e^{-h\zeta}\sin\alpha\zeta\,d\zeta);$$

et elle s'effectue immédiatement : car on sait que

$$\int_0^\infty e^{-h\zeta}\cos\alpha\zeta\,d\zeta = \frac{h}{h^2+\alpha^2}, \qquad \int_0^\infty e^{-h\zeta}\sin\alpha\zeta\,d\zeta = \frac{\alpha}{h^2+\alpha^2}.$$

Elle donne ainsi, comme résultat total,

$$\frac{\alpha\cos\alpha x + h\sin\alpha x}{\alpha^2+h^2}.$$

Et la formule (12) devient celle dont Fourier s'est servi dans la question, sans indiquer comment il y était parvenu (¹),

$$(13)\qquad u = \frac{2}{\pi}\int\!\!\int_0^{+\infty} [hf(\xi) - f'(\xi)]\,e^{-a^2\alpha^2 t}\sin\alpha\xi\,\frac{\alpha\cos\alpha x + h\sin\alpha x}{\alpha^2+h^2}\,d\alpha\,d\xi.$$

Il convient d'en éliminer la dérivée f'; car l'état initial, qu'exprime la fonction arbitraire f, peut n'être donné que d'une manière empirique, au moyen, par exemple, d'une suite de valeurs numériques difficile à différentier, ou peu propre à fournir f'. Cette élimination se fera en considérant à part, dans le second membre de (13), l'intégrale où figure $f'(\xi)$. On peut, en appelant ξ_1 une quantité très grande, indépendante de α et que, finalement, l'on fera croître sans limite, l'écrire

$$(14)\qquad \frac{2}{\pi}\int_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} e^{-a^2\alpha^2 t}\,\frac{\alpha\cos\alpha x + h\sin\alpha x}{\alpha^2+h^2}\,d\alpha \int_{\xi=0}^{\xi=\xi_1} (\sin\alpha\xi)\,d[-f(\xi)].$$

Effectuons par parties l'intégration en ξ, et observons que $f(\xi_1)$ se confond sensiblement avec $f(\infty)$, qui est la constante donnée u_0. L'expression (14) devient

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} &-\frac{2u_0}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2\alpha^2 t}\,\frac{\alpha\cos\alpha x + h\sin\alpha x}{\alpha^2+h^2}\,\sin(\xi_1\alpha)\,d\alpha \\ &+\frac{2}{\pi}\int\!\!\int_0^{+\infty} f(\xi)\,e^{-a^2\alpha^2 t}\,\frac{\alpha\cos\alpha x + h\sin\alpha x}{\alpha^2+h^2}\,\alpha\cos\alpha\xi\,d\alpha\,d\xi. \end{aligned}\right.$$

Or, ici, le premier terme est annihilé par le facteur $\sin(\xi_1\alpha)$,

(¹) *Extrait d'un Mémoire sur le refroidissement séculaire du globe terrestre* (1820), t. II des *Œuvres de Fourier*, p. 275. Dans un autre Mémoire, ultérieur (de 1827), il semble (même t. II, p. 117), mettre en doute cette formule, qui est cependant exacte.

qui, à la limite $\xi_1 = \infty$, change de signe pour des valeurs de α infiniment rapprochées et réduit à zéro, dans les plus petits intervalles assignables, la valeur moyenne de la fonction sous le signe $\int$. Il ne reste ainsi, dans (15), que la dernière partie, celle qui constitue une intégrale double. En la joignant au terme en $f(\xi)$ du second membre de (13), il vient l'expression suivante de u, plus directement utilisable que (13) et aussi plus symétrique :

$$(16) \qquad u = \frac{2}{\pi}\int\int_0^{+\infty} f(\xi)\, e^{-a^2\alpha^2 t}\, \frac{(\alpha\cos\alpha x + h\sin\alpha x)(\alpha\cos\alpha\xi + h\sin\alpha\xi)}{\alpha^2 + h^2}\, d\alpha\, d\xi.$$

Fourier l'avait déduite de (13) dans le cas de $f(\xi)$ constant depuis $\xi = 0$ jusqu'à une limite ξ_1 très grande, et Poisson (¹) en a donné une démonstration générale (moins simple que la précédente).

(¹) *Théorie mathématique de la chaleur*, p. 323.

VINGT-DEUXIÈME LEÇON.

APPLICATION, FAITE PAR FOURIER, DU PROBLÈME PRÉCÉDENT, AU REFROIDISSEMENT SÉCULAIRE DE LA CROUTE TERRESTRE.

165. Cas d'une température initiale constante : première réduction. — Supposons maintenant, avec Fourier, que la température initiale $f(x)$ ait été u_0 dans tout le mur, et non pas seulement aux grandes profondeurs x. La formule (16) devient alors

$$(17)\quad u = \frac{2u_0}{\pi}\overline{\int\!\!\int_0^{+\infty}} e^{-a^2\alpha^2 t}\frac{(\alpha\cos\alpha x + h\sin\alpha x)(\alpha\cos\alpha\xi + h\sin\alpha\xi)}{\alpha^2+h^2}\,d\alpha\,d\xi;$$

et l'on peut y faire immédiatement l'intégration relative à ξ. Effectuons-la d'abord de zéro à une valeur fixe très grande ξ_1, que nous rendrons plus tard indéfiniment croissante. Nous aurons

$$(18)\quad u = \frac{2u_0}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-a^2\alpha^2 t}\frac{\alpha\cos\alpha x + h\sin\alpha x}{\alpha^2+h^2}\left(\sin\xi_1\alpha + h\,\frac{1-\cos\xi_1\alpha}{\alpha}\right)d\alpha.$$

A mesure que ξ_1 grandira, le facteur entre parenthèses $\left(\text{sous le signe} \int\right)$, affecté de courtes oscillations, variera de plus en plus vite avec α, de manière à prendre finalement pour valeur moyenne, dans les plus petits intervalles sensibles, la valeur même de son seul terme non oscillant, qui est $\frac{h}{\alpha}$. Ce facteur équivaut donc, en définitive, dans l'intégrale, à $\frac{h}{\alpha}$; et il vient l'expression de u, due à Fourier,

$$(19)\quad u = \frac{2hu_0}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-a^2\alpha^2 t}}{\alpha^2+h^2}\left(\cos\alpha x + h\,\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right)d\alpha.$$

166. Expression des températures successives du mur par l'intégrale $\int_\omega^\infty e^{-\omega^2}\,d\omega$. — Pour réduire plus complètement l'intégrale définie simple qui y figure, différentions u par rapport à t, et remplaçons dans le résultat, sous le signe $\int$, le facteur $\frac{-\alpha^2}{\alpha^2+h^2}$ par $\frac{h^2}{\alpha^2+h^2}-1$. Nous décomposerons ainsi l'intégrale obtenue en deux, dont l'une sera proportionnelle au second membre de (19), ou à u. Et il viendra, par la transposition de celle-ci, l'équation simplement différentielle en u et t, mais avec second membre,

$$(20)\qquad \frac{du}{dt}-a^2h^2u=-\frac{2a^2hu_0}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2\alpha^2t}\left(\cos\alpha x+h\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right)d\alpha.$$

Son second membre peut se simplifier. Pour abréger, appelons I l'intégrale définie, fonction de x et de t, la plus compliquée qui y figure, ou plutôt posons

$$(21)\qquad \mathrm{I}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-a^2\alpha^2t}\frac{\sin\alpha x}{\alpha}\,d\alpha;$$

d'où

$$(21\ bis)\qquad \frac{d\mathrm{I}}{dx}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-a^2\alpha^2t}\cos(\alpha x)\,d\alpha.$$

Cette dernière intégrale définie sera donnée par (7 *bis*) (p. 7), où l'on fera $\xi=0$; et l'on aura

$$(22)\qquad \frac{d\mathrm{I}}{dx}=\frac{1}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

Comme l'intégrale I s'annule, dans tous ses éléments, pour $x=0$, elle n'est pas autre chose que $\int_0^x\frac{d\mathrm{I}}{dx}dx$; et il vient, en adoptant, sous le signe $\int$, la variable d'intégration $\omega=\frac{x}{2a\sqrt{t}}$,

$$(23)\qquad \mathrm{I}=\int_0^x e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\frac{dx}{2a\sqrt{t}}=\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-\omega^2}\,d\omega.$$

Cela posé, le dernier membre de (20) s'exprime, d'après (21)

et (21 *bis*), au moyen de I; et cette équation différentielle (20) revient à

$$\frac{du}{dt} - a^2h^2u = -\frac{2a^2h^2u_0}{\sqrt{\pi}}\left(\text{I} + \frac{1}{h}\frac{d\text{I}}{dx}\right). \tag{24}$$

Intégrons-la par la méthode ordinaire de la variation des constantes, c'est-à-dire en posant $u = ce^{a^2h^2t}$, avec c variable. L'on aura

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{2a^2h^2u_0}{\sqrt{\pi}}\left(\text{I} + \frac{1}{h}\frac{d\text{I}}{dx}\right)e^{-a^2h^2t} = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\left(\text{I}\frac{de^{-a^2h^2t}}{dt} - a^2he^{-a^2h^2t}\frac{d\text{I}}{dx}\right).$$

Multipliée par dt, et intégrée en chaque point (c'est-à-dire sans faire varier x) à partir de l'époque $t = 0$ où l'on avait évidemment $c = u = u_0$, cette relation donne

$$c = u_0 + \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\left(\int_{t=0}^{t=t}\text{I}\,de^{-a^2h^2t} - a^2h\int_0^t e^{-a^2h^2t}\frac{d\text{I}}{dx}dt\right). \tag{25}$$

Effectuons par parties la première intégration indiquée au second membre; et observons que, I, pour t nul, étant $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ [vu sa dernière expression (23)], le terme intégré correspondant à la limite inférieure détruit justement le premier terme, u_0, du second membre. Il viendra

$$c = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\left[\text{I}e^{-a^2h^2t} - \int_0^t e^{-a^2h^2t}\left(a^2h\frac{d\text{I}}{dx} + \frac{d\text{I}}{dt}\right)dt\right]. \tag{26}$$

Enfin, $a^2h\frac{d\text{I}}{dx}$ et $\frac{d\text{I}}{dt}$ sont, d'après le troisième membre de (23), les produits respectifs de $e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$ par $\frac{ah}{2\sqrt{t}} = \frac{d.ah\sqrt{t}}{dt}$ et par $\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$; de sorte que la fonction sous le dernier signe $\int$, au second membre de (26), est, en posant finalement $ah\sqrt{t} + \frac{x}{2a\sqrt{t}} = \omega$,

$$e^{-\left(a^2h^2t + \frac{x^2}{4a^2t}\right)}d\left(ah\sqrt{t} + \frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$
$$= e^{hx}e^{-\left(ah\sqrt{t} + \frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)^2}d\left(ah\sqrt{t} + \frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = e^{hx}e^{-\omega^2}d\omega.$$

Et, d'ailleurs, quand t y croît de zéro à t, ω y varie avec continuité de ∞ à $ah\sqrt{t}+\frac{x}{2a\sqrt{t}}$. En résumé, il viendra, vu la signification (23) de I,

$$(27)\qquad c=\frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-a^2h^2t}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-\omega^2}\,d\omega+e^{hx}\int_{ah\sqrt{t}+\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-\omega^2}\,d\omega\right].$$

Il suffira de multiplier par $e^{a^2h^2t}$, pour avoir les températures cherchées u ([1]). Afin d'abréger l'écriture, appelons $\psi(\omega)$ la fonction

$$(28)\qquad \psi(\omega)=\int_{\omega}^{\infty}e^{-\omega^2}\,d\omega,$$

([1]) **Possibilité d'une réduction analogue, dans le cas de températures initiales non uniformes.** — Je m'aperçois qu'on arrive plus simplement à l'équation différentielle (24), étendue même à l'hypothèse de températures initiales $f(x)$ quelconques, en partant de l'équation (10) (p. 8). Celle-ci, différentiée en x, donne

$$\frac{d^2u}{dx^2}=h\frac{du}{dx}-h\frac{d\varphi}{dx},$$

et, par l'élimination de $\frac{du}{dx}$ au moyen de (10),

$$\frac{d^2u}{dx^2}=h^2u-h^2\left(\varphi+\frac{1}{h}\frac{d\varphi}{dx}\right).$$

Portons cette valeur de la dérivée seconde de u en x dans l'équation

$$\frac{du}{dt}=a^2\frac{d^2u}{dx^2}$$

du problème; et nous aurons l'équation différentielle cherchée :

$$(\alpha)\qquad \frac{du}{dt}-a^2h^2u=-a^2h^2\left(\varphi+\frac{1}{h}\frac{d\varphi}{dx}\right).$$

Elle comprend bien (24); car, lorsque $f(x)=u_0$, il faut, dans l'intégrale (8) de Laplace (p. 7), où u a été changé en φ, poser

$$F(x+2a\omega\sqrt{t})=u_0\quad\text{pour}\quad \omega>\frac{-x}{2a\sqrt{t}},$$

$$F(x+2a\omega\sqrt{t})=-u_0\quad\text{pour}\quad \omega<\frac{-x}{2a\sqrt{t}};$$

et, alors, si l'on remplace les éléments de l'intégrale définie où ω est négatif par

dont une Table, calculée par Kramp (dans son Mémoire *Sur les réfractions atmosphériques*), donne les valeurs numériques, et

---

ceux de champ égal où ω est positif, il vient bien

$$(\beta) \qquad [\text{quand } f(x) = u_0] \qquad \varphi = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\omega^2} d\omega = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \mathrm{I}.$$

Traitons l'équation (α) comme l'a été (24), c'est-à-dire, au fond, en multipliant (α) par le facteur d'intégrabilité $e^{-a^2h^2t}\,dt$ et intégrant par rapport à t, toujours à partir de l'époque $t = 0$, où $u = f(x)$ et où $\varphi = f(x) - \frac{1}{h} f'(x)$; puis multiplions les résultats par $e^{a^2h^2t}$, après avoir effectué la même intégration par parties que sur (25). Nous aurons

$$(\gamma) \qquad u = \varphi + \frac{1}{h} f'(x)\, e^{a^2h^2t} - e^{a^2h^2t} \int_0^t e^{-a^2h^2t} \left(a^2 h \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dt} \right) dt.$$

Mais la réduction de l'intégrale définie par laquelle se termine le second membre, à la forme de celle qui exprime φ, comme il arrive dans (27), est propre au cas où $f(x) = \text{const.}$; car ce cas est le seul où φ dépende de la variable unique $\frac{x}{2a\sqrt{t}}$ et où s'applique le raisonnement fait après la formule (26).

Pour x très petit, c'est-à-dire sous la couche superficielle, où φ devient négligeable dès que t a des valeurs sensibles, l'équation (α) se simplifie par la réduction de son second membre au terme $-a^2 h \frac{d\varphi}{dx}$, qui, dans le cas de la formule (β), y devient $-\frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} \frac{d.ah\sqrt{t}}{dt}$. Et l'équation ($\alpha$) ainsi réduite, multipliée encore par $e^{-a^2h^2t}\,dt$, puis intégrée à partir de l'époque $t = 0$, où $u = f(x)$, donne alors immédiatement

$$u e^{-a^2h^2t} - f(x) = -\int_0^t a^2 h \frac{d\varphi}{dx} e^{-a^2h^2t}\, dt,$$

c'est-à-dire

$$(\delta) \qquad (\text{pour } x = 0) \qquad u = e^{a^2h^2t} \left[f(x) - \int_0^t \frac{d\varphi}{dx} e^{-a^2h^2t} a^2 h\, dt \right].$$

Dans le cas où $f(x) = u_0$, φ admettant l'expression (β), il vient tout de suite, si l'on pose $ah\sqrt{t} = \omega$ sous le signe $\int$, la formule utilisée par Fourier et qui porte ci-après le n° 31, savoir

$$u = u_0 e^{a^2h^2t} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ah\sqrt{t}} e^{-\omega^2} d\omega \right) = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} e^{a^2h^2t} \int_{ah\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega.$$

dont la valeur initiale $\psi(0)$ est l'intégrale de Poisson $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (¹). On voit que la formule, sous forme finie, des températures successives u du mur sera

(29) $$u = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\left[\psi(0) - \psi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + e^{a^2h^2t+hx}\psi\left(ah\sqrt{t} + \frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

Des différentiations immédiates permettent de constater que cette expression de u satisfait bien : 1° à l'équation indéfinie $\frac{du}{dt} = a^2\frac{d^2u}{dx^2}$; 2° à la condition $\frac{du}{dx} = hu$ (pour $x = 0$), exprimant le rayonnement à la surface. Et l'on reconnaît, d'ailleurs, directement qu'elle vérifie, 3° la relation d'état initial, $u = u_0$ (pour $t = 0$), 4° enfin, la condition $u = u_0$ aux grandes profondeurs x, où la fonction $\psi(\omega)$ est réductible à son expression asymptotique $\frac{e^{-\omega^2}}{2\omega}$ donnée ci-après. Retenons seulement, de ces différentiations et vérifications, la formule de la dérivée première de u en x :

(30) $$\frac{du}{dx} = \frac{2hu_0}{\sqrt{\pi}}e^{a^2h^2t+hx}\psi\left(ah\sqrt{t} + \frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

167. Formule asymptotique des températures de la surface. — Appelons u' les températures successives du mur à la surface $x = 0$. Leur expression, obtenue en premier lieu par Fourier (²) au moyen de l'équation différentielle à laquelle se réduit alors (20), sera, d'après (29),

(31) $$u' = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}e^{\omega^2}\psi(\omega), \qquad \text{où} \qquad \omega = ah\sqrt{t}.$$

Elle est proportionnelle à la température initiale u_0 et à une fonction assez simple de la variable $\omega = ah\sqrt{t}$.

Quand la variable ω devient un peu grande, cette fonction tend rapidement vers une forme asymptotique extrêmement réduite.

(¹) *Voir*, par exemple, dans mes *Leçons d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (*Calcul intégral, Compléments*, p. 156* à 158*), les méthodes pour calculer cette fonction $\psi(\omega)$.

(²) *Œuvres de Fourier*, t. II, p. 277, formule (5).

Vu (28), on a, en effet, identiquement, en remplaçant, pour plus de clarté, ω par α sous le signe $\int$,

$$(32) \qquad \psi(\omega) = \int_{\alpha=\omega}^{\alpha=\infty} \frac{1}{2\alpha} d(-e^{-\alpha^2}).$$

Or, dès que ω est un peu grand, le facteur $\frac{1}{2\alpha}$, sous le signe $\int$, ne décroît que dans une proportion insignifiante, à partir de $\frac{1}{2\omega}$, pendant que l'exponentielle $e^{-\alpha^2}$ éprouve la presque totalité de son décroissement vers zéro. Car, si l'on fait grandir α de $\alpha\varepsilon$, c'est-à-dire d'une petite fraction ε de sa valeur, et, par suite, décroître $\frac{1}{2\alpha}$, devenu $\frac{1}{2\alpha(1+\varepsilon)}$ ou, sensiblement, $\frac{1-\varepsilon}{2\alpha}$, de la même fraction ε de sa valeur, l'exponentielle $e^{-\alpha^2}$ devient, à très peu près,

$$e^{-\alpha^2(1+2\varepsilon)} = e^{-\alpha^2} e^{-2\alpha^2\varepsilon},$$

et se trouve réduite à la fraction $e^{-2\alpha\varepsilon}$ de sa valeur première, fraction aussi faible que l'on voudra si α est assez grand, pour la valeur donnée de ε. C'est dire que, dans l'intégrale définie (32), tous les éléments influents, quand α est un peu grand, sont voisins de la limite inférieure, ou peuvent être calculés en faisant égal à $\frac{1}{2\omega}$ le facteur $\frac{1}{2\alpha}$. Or, alors, le second membre de (32) devient

$$\frac{1}{2\omega} \int_{\alpha=\omega}^{\alpha=\infty} d(-e^{-\alpha^2}) = \frac{e^{-\omega^2}}{2\omega}.$$

L'expression asymptotique de la valeur (31) de u', expression applicable dès que u' n'est plus qu'une faible partie de u_0, sera donc

$$(33) \qquad u' = \frac{u_0}{ah\sqrt{\pi t}} \text{ (pour } t \text{ très grand).}$$

Ainsi, la température de la surface tend à devenir inversement proportionnelle à la racine carrée du temps écoulé depuis le début du refroidissement [1].

---

[1] On remarquera que, de même, la formule (30) se simplifie beaucoup pour

168. Application au refroidissement séculaire de la croûte terrestre; et, d'abord, manière d'éliminer du problème l'action solaire, supposée ou permanente ou périodique. — A la surface de la croûte solide de notre globe, croûte comprenant l'ensemble des couches étudiées par les géologues, la température extérieure u_e est, en chaque point, la somme de ce qu'elle y serait sans le rayonnement solaire et de la partie qu'y ajoute ce rayonnement.

Cette dernière partie peut être regardée, durant de longs espaces de temps, comme comprenant, sur chaque point du sol, un terme constant, ou indépendant de t, et plusieurs termes périodiques à valeur moyenne nulle, dont les deux plus sensibles ont pour périodes respectives le jour et l'année. Aux termes périodiques correspondent, dans l'intérieur, les inégalités, à valeur moyenne nulle également, que nous avons appris à évaluer dans la XIV[e] Leçon ([1]), et qui deviennent à peu près insensibles aux profondeurs excédant une quinzaine de mètres. De même, au terme constant, supposé donné sur chaque point de la surface, correspond, dans l'intérieur du globe, un état *permanent*, où toutes les valeurs de u sont comprises entre la plus petite et la plus grande valeur de ce terme de u_e. D'ailleurs, abstraction faite des irrégularités locales (géométriques ou physiques), de la surface terrestre, la fonction u, indépendante de t, dont il s'agit, variera graduellement du centre du globe aux diverses parties de sa surface, savoir, aussi graduellement que le feront sur celle-ci, de l'équateur aux pôles, les climats moyens eux-mêmes, dus justement à cette partie constante de l'action solaire.

Cela posé, imaginons que l'on retranche de la température effective à l'époque t, tant au dehors qu'en chaque point de l'intérieur,

---

les fortes valeurs de la variable $\omega = ah\sqrt{t} + \frac{x}{2a\sqrt{t}}$ dont y dépend la fonction ψ, c'est-à-dire pour t ou x assez grands, et aussi pour t fort petit. Alors, en effet, son facteur $\psi(\omega)$ est réductible à $\frac{e^{-\omega^2}}{2\omega}$; et il vient

$$(33\ bis)\qquad \frac{du}{dx} = \frac{hu_0}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}}{ah\sqrt{t}+\frac{x}{2a\sqrt{t}}}\left(\text{quand } ah\sqrt{t}+\frac{x}{2a\sqrt{t}} \text{ est très grand}\right).$$

([1]) *Voir* le t. I, p. 210 à 228.

les termes ou périodiques, ou indépendant du temps, dont il vient d'être parlé comme dus à l'action solaire. L'excédent, que j'appellerai simplement u à l'intérieur, exprimera évidemment, vu la forme linéaire admise des équations régissant la propagation de la chaleur, la température telle qu'elle se comporterait d'après l'état initial du globe, ou encore à raison des sources de chaleur qu'il peut contenir, mais en présence d'un soleil éteint, c'est-à-dire dans le cas où les températures extérieures u_e seraient dues uniquement aux rayons stellaires se croisant dans les espaces célestes ou à la chaleur propre de ces espaces, s'ils en ont une.

Aux profondeurs qui excèdent une ou deux dizaines de mètres, là où les inégalités périodiques ne pénètrent plus sensiblement, le terme ainsi retranché aux températures effectives, et traduisant l'effet *supposé permanent* de l'action solaire, aura la même valeur sur des étendues de plusieurs kilomètres. Si donc la température effective varie très notablement avec la profondeur dans des étendues de cet ordre, ces variations porteront intégralement sur les excédents u, qui expriment l'influence des circonstances initiales ou des sources calorifiques intérieures. Or c'est ce qui a lieu. Au-dessous de la couche superficielle affectée par les inégalités des saisons, la température, tout en y devenant beaucoup moins vite variable qu'au-dessus, avec la profondeur, est cependant croissante avec celle-ci, comme on sait, d'une quantité dépendant du terrain et de la localité, mais peu différente, en général, de 1 degré centigrade par 30 mètres.

Les couches profondes du globe sont donc, en tout pays, plus chaudes que les couches moins profondes, et même que les couches superficielles (considérées du moins dans leur température annuelle moyenne); et le globe perd ainsi de la chaleur par toute sa surface.

Si l'on fait abstraction des inégalités périodiques, sensibles seulement jusqu'à quelques mètres de profondeur, ce phénomène d'émission calorifique à travers la croûte terrestre est même, comme on peut en juger dès à présent, incomparablement plus considérable que le phénomène simultané (censé dès lors permanent) de l'absorption des radiations solaires par la région équatoriale du globe, avec perte équivalente par les pôles. Car les chutes de température, en allant du noyau vers la surface, qui le mesurent

proportionnellement, sont beaucoup plus rapides (1° par 30^m) que celles, d'une trentaine de degrés peut-être entre l'équateur et les pôles, ou le long des deux rayons *équatorial* et *polaire* réunis, auxquelles donne lieu l'inégalité de l'action solaire sur les divers points de la surface et qui, dans le plan de l'équateur en particulier, font affluer la chaleur extérieure, le long de chaque rayon *équatorial,* jusqu'au centre, d'où elle va, suivant chaque rayon *polaire,* s'échapper par le pôle correspondant.

169. **Hypothèses de Fourier, relativement au refroidissement du globe.** — Il est naturel d'admettre que, la radiation solaire étant ainsi supprimée, la température extérieure u_e serait sensiblement ou moyennement la même aux pôles qu'à l'équateur. On doit du moins, ne serait-ce que pour rendre la question accessible, supposer cette température u_e pareille sur toute la surface de la croûte terrestre, et admettre aussi qu'elle se conserve constante dans d'immenses espaces, sillonnés par notre système planétaire, ainsi que durant des temps embrassant au moins la totalité des temps historiques. On adoptera comme zéro cette température u_e des espaces intra-stellaires que parcourt notre globe. Dès lors, faisant encore abstraction des inégalités superficielles, tant géométriques que physiques, de la croûte terrestre, même de sa courbure, sur l'étendue de quelques myriamètres en longueur et largeur qui sera à considérer, ainsi que des irrégularités de sa contexture interne, l'on aura sensiblement, comme expression de son rayonnement vers l'espace à zéro degré, et comme équation indéfinie de ses températures, les mêmes relations

$$\frac{du}{dx} - hu = 0 \text{ (pour } x = 0) \qquad \text{et} \qquad \frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2},$$

que dans notre mur, à la condition d'adopter une abscisse x normale à la surface et croissante vers l'intérieur.

Fourier admet, de plus, que la chaleur émise sans cesse par le globe provient non de sources intérieures, d'actions chimiques actuellement en jeu dans son noyau (sinon même dans la croûte), mais d'un échauffement primitif de toute sa masse. Celle-ci aurait, à une certaine époque, été portée à la température élevée u_0 existant encore, à très peu près et en raison de la médiocre con-

ductibilité des roches, aux profondeurs de quelques myriamètres, c'est-à-dire dans les parties inférieures de la croûte même, dont l'épaisseur totale est très faible par rapport au rayon du noyau sous-jacent inconnu, et dont, par suite, la courbure est insignifiante, comme nous venons de dire, sur les étendues de quelques myriamètres (en longueur et largeur) que nous considérons.

A partir d'un certain moment, choisi comme origine des temps t, les couches supérieures ou moins profondes auraient commencé à se refroidir au-dessous de cette température u_0, par le fait du rayonnement superficiel; et la croûte terrestre serait ainsi, dans son graduel refroidissement, assimilable avec quelque approximation à notre mur d'épaisseur indéfinie, pourvu d'une face plane rayonnant vers un milieu à la température zéro.

170. Calculs de Fourier, prouvant l'extrême lenteur actuelle du refroidissement. — On voit comment Fourier peut évaluer, dans ces hypothèses, le progrès du refroidissement de la croûte terrestre ([1]). Prenant comme terme de comparaison le fer poli, pour lequel ses expériences lui avaient donné $\frac{1}{h} = 7,5$ (avec le mètre pour unité de longueur), il a admis, comme résultat d'une discussion dont il n'expose pas les détails, une valeur de h neuf fois plus forte en moyenne chez les roches; ce qui lui donne, pour la croûte terrestre, $\frac{1}{h} = \frac{7,5}{9} = \frac{5}{6}$; et, comme la dérivée $\frac{du}{dx}$ près de la surface (à raison de 1° C. par 30^m) est $\frac{1}{30}$, il en déduit, pour l'excédent actuel u ou $u' = \frac{1}{h}\frac{du}{dx}$, la valeur approximative

$$(34) \qquad u' = \frac{5}{6}\,\frac{1}{30} = \frac{1}{36} \text{ de degré centigrade seulement} \quad ([2]).$$

Fourier conclut de là que le refroidissement est très avancé

([1]) *Extrait d'un Mémoire sur le refroidissement séculaire du globe terrestre* (*Bulletin de la Société philomathique,* avril 1820, ou *Œuvres,* t. II, p. 275).

([2]) Le lecteur se souviendra que u' et u n'expriment pas ici tout l'excédent de température de la surface terrestre et des couches sous-jacentes sur les espaces célestes, mais seulement ce qui subsiste de cet excédent quand on fait abstraction de sa partie principale, due à la présence du Soleil.



près de la surface, et qu'on peut sans crainte y appliquer la formule asymptotique (33) (p. 18). Or celle-ci fait décroître avec une extrême lenteur la température superficielle u' et, par suite, la vitesse d'accroissement $\frac{du}{dx} = hu'$ de la température interne sous le sol.

La croûte terrestre offrirait donc dans la suite de ses températures, pour expliquer la possibilité de la longue évolution des espèces organiques à sa surface, une stabilité et, pour ainsi dire, une permanence, analogues à celles de ses conditions astronomiques de rotation autour de l'axe terrestre et de transport autour du Soleil, modifiées de même soit par d'assez petites inégalités périodiques, soit par de plus larges mais très lentes variations séculaires.

Pour réduire, par exemple, d'une petite quantité $-\Delta u'$ l'excédent actuel u', il faudra, vu la proportionnalité inverse de u' à la racine carrée du temps, donner à t un accroissement Δt, tel, qu'on ait $u'^2 t = (u' + \Delta u')^2 (t + \Delta t)$, c'est-à-dire, sensiblement,

$$2tu'\Delta u' + u'^2 \Delta t = 0, \qquad -\Delta u' = \frac{u'}{2t}\Delta t = \frac{hu'}{2ht}\Delta t,$$

ou bien, en appelant $\left(\frac{du}{dx}\right)_0$ la vitesse actuelle hu' d'accroissement de la température avec la profondeur sous la surface du sol, c'est-à-dire $\frac{1}{30}$ environ,

$$(35) \qquad -\Delta u' = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)_0}{2h} \frac{\Delta t}{t} = (\text{actuellement}) \frac{1}{30} \frac{5}{12} \frac{\Delta t}{t} = \frac{1}{72} \frac{\Delta t}{t}.$$

Même dans l'hypothèse que t se réduisît à 60 siècles et que, par conséquent, le début du refroidissement eût coïncidé à peu près avec celui des temps historiques, le refroidissement séculaire actuel de la surface, c'est-à-dire la diminution de u' durant un siècle, serait donc seulement $\frac{1}{72.60} = \frac{1}{4320}$, ou la 4320e partie d'un degré centigrade, quantité absolument inappréciable.

Si l'on pouvait connaître la température u_0 de début, la durée t

écoulée depuis l'origine du refroidissement serait, d'après (33),

$$(36)\qquad t = \frac{1}{\pi}\frac{u_0^2}{a^2(hu')^2} = \frac{1}{\pi}\frac{u_0^2}{a^2\left(\frac{du}{dx}\right)_0^2}.$$

Fourier donne [1] $\frac{1}{a^2} = 1083$ pour le fer (les unités de temps et de longueur étant la minute et le mètre), et huit fois plus pour les matières communes de l'enveloppe terrestre. Il en résulterait pour t, évalué en siècles, si l'on substitue d'ailleurs à $\left(\frac{du}{dx}\right)_0$ la valeur actuelle moyenne $\frac{1}{30}$, l'expression

$$(37)\qquad t = \frac{1083.8.900}{\pi.60.24.(365,25).100}u_0^2 = (0,0472)u_0^2.$$

En prenant, par exemple, une température initiale de 1000°C., l'on aurait $t = 47200$ siècles, ou près de 5 millions d'années.

La formule (36), résolue par rapport à $\left(\frac{du}{dx}\right)_0$, donne encore, pour l'expression asymptotique de cette chute superficielle de la température interne aux diverses époques du refroidissement, les unités étant le mètre et le siècle,

$$(38)\qquad \left(\frac{du}{dx}\right)_0 = \frac{u_0}{a\sqrt{\pi t}} = \frac{u_0}{\sqrt{t}}\sqrt{\frac{1083.8}{\pi.60.24.(365,25).100}} = (0,00724)\frac{u_0}{\sqrt{t}}.$$

---

(1) Au n° VII du même Mémoire de 1820 : *voir*, à ce sujet, la remarque faite plus haut (note de la p. 272, t. I). C'est au n° IX (p. 285 du t. II des *Œuvres*) que sont les autres données numériques utilisées ci-dessus.

VINGT-TROISIÈME LEÇON.

SUITE : ÉTUDE, PAR LA MÊME MÉTHODE, DU REFROIDISSEMENT, EN TOUS SENS, DU MUR RAYONNANT D'ÉPAISSEUR INDÉFINIE.

---

171. **Deuxième exemple : dissipation, en tous sens, de la chaleur, dans le même mur d'épaisseur indéfinie.** — Jusqu'ici nous avons admis l'uniformité de la température u, sur toute l'étendue de chaque couche parallèle à la face $x = 0$ du mur. Autrement dit, supposé que l'on eût associé deux axes rectangulaires des y et des z, pris sur cette face, à l'axe des x qui lui est perpendiculaire, les coordonnées latérales y, z ne figuraient pas dans l'expression de u et les éléments plans parallèles aux x n'étaient traversés par aucun flux de chaleur. Chaque filet prismatique de matière normal aux yz ne se refroidissait donc que par ses extrémités $x = 0$, $x = \infty$, et même seulement par le rayonnement de la première extrémité $x = 0$ dans le cas, particulièrement intéressant, d'une température primitive uniforme u_0, se conservant indéfiniment aux grandes profondeurs, c'est-à-dire pour $x = \infty$.

Imaginons maintenant que l'on ait, au contraire, $u = 0$ à toute époque t positive, tant pour y ou z infinis, que pour x infini positif. Alors les parties du mur situées aux distances finies de l'origine, et censées s'être trouvées *initialement*, ou pour $t = 0$, à des températures données $f(x, y, z)$, perdront leur chaleur par rayonnement, à travers la face $x = 0$, et, en même temps, par contact, de tous les autres côtés, où la conductibilité lui permettra de se dissiper au loin. L'étude de ce phénomène va nous servir de deuxième exemple pour l'application de notre méthode.

Les équations du problème seront les mêmes que dans le cas où u était indépendant des coordonnées y, z, à cela près que le

second membre $a^2\Delta_2 u$ de l'équation indéfinie

$$(\delta) \qquad \frac{du}{dt} = a^2\Delta_2 u$$

ne se réduira plus à $a^2\frac{d^2u}{dx^2}$, que u_0 sera zéro, enfin, que u devra s'annuler pour y ou z infinis. Et l'on reconnaît encore de même que la fonction auxiliaire φ donnée par (4) (p. 5) vérifiera les équations du refroidissement du mur par contact, dans l'hypothèse de températures initiales exprimées par la formule

$$F(x,y,z) = f(x,y,z) - \frac{1}{h}\frac{df(x,y,z)}{dx}.$$

172. Formation de la fonction auxiliaire φ. — D'ailleurs, l'intégrale u, ou φ, qui convient à ce cas du contact, s'obtiendra, pour les mêmes raisons de symétrie, en associant encore au mur proposé son symétrique par rapport au plan $x = 0$, ou occupant la région des x négatifs, avec températures initiales $F(x,y,z)$ égales et contraires à celles qui sont données aux points symétriques du mur effectif, de sorte que l'on ait

$$F(-x,y,z) = -F(x,y,z).$$

Alors on mettra l'état initial $F(x,y,z)$ de tout l'espace, grâce à la formule de Fourier étendue au cas de trois variables [1], sous la forme

$$\frac{1}{\pi^3}\iiint_0^{+\infty} d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$
$$\times \iiint_{-\infty}^{+\infty} F(\xi,\eta,\zeta)\cos(\alpha x - \alpha\xi)\cos(\beta y - \beta\eta)\cos(\gamma z - \gamma\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta:$$

et l'élément de cette intégrale sextuple à limites constantes deviendra solution simple de l'équation indéfinie (δ) ci-dessus, pourvu qu'on y introduise le nouveau facteur $e^{-a^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t}$, de

[1] *Voir*, par exemple, mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, t. II, second fascicule, p. 175*.

valeur initiale 1. L'expression de φ ainsi obtenue,

$$(\delta')\quad\left\{\begin{aligned}\varphi = {} & \frac{1}{\pi^3}\iiint_0^{+\infty} e^{-a^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma\\ & \times\iiint_{-\infty}^{+\infty} F(\xi,\eta,\zeta)\\ & \times\cos(\alpha x-\alpha\xi)\cos(\beta y-\beta\eta)\cos(\gamma z-\gamma\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,\end{aligned}\right.$$

sera, par suite, sous une première forme, l'intégrale du problème, si elle s'annule pour x, y ou z infinis. Or on reconnaît qu'il en est bien ainsi, en y opérant, de la même manière qu'après la formule (7) (p. 7), les intégrations en α, β, γ. Ces intégrations respectives porteront, en effet, entre les limites zéro et l'infini, sur les expressions

$$e^{-(a^2t)\alpha^2}\cos[(x-\xi)\alpha]\,d\alpha,$$
$$e^{-(a^2t)\beta^2}\cos[(y-\eta)\beta]\,d\beta,$$
$$e^{-(a^2t)\gamma^2}\cos[(z-\zeta)\gamma]\,d\gamma,$$

et donneront comme résultats

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}},\quad \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}},\quad \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}}.$$

Il viendra ainsi, au lieu de (8) (p. 7) et de la même manière,

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} F(\xi,\eta,\zeta)e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\\ &= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^3}\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\omega^2+\omega'^2+\omega''^2)}\\ &\quad\times F(x+2a\omega\sqrt{t},\, y+2a\omega'\sqrt{t},\, z+2a\omega''\sqrt{t})\,d\omega\,d\omega'\,d\omega''.\end{aligned}$$

Or, la fonction $F(x, y, z)$ étant, par hypothèse, évanouissante, quand l'une quelconque de ses trois variables devient infinie, les seuls éléments de la dernière intégrale triple où le facteur F soit sensible, aux points (x, y, z) très éloignés de l'origine, sont ceux qui correspondent à de très grandes valeurs absolues de ω, ω' ou ω'' et, par suite, de l'exposant $-(\omega^2+\omega'^2+\omega''^2)$, valeurs rendant insensible l'autre facteur sous les signes $\int$, c'est-à-dire l'exponentielle.

L'expression (δ') de φ, généralisée de (7) (p. 6), convient dès

lors. Imaginons qu'on y effectue seulement, de la manière qui vient d'être indiquée, les intégrations en β et γ, et qu'on essaie ensuite d'y effectuer l'intégration relative non à α, mais à ξ. Celle-ci portera sur la différentielle $F(\xi, \eta, \zeta)\cos(\alpha x - \alpha\xi)\,d\xi$ et donnera

$$\cos\alpha x\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta, \zeta)\cos\alpha\xi\,d\xi + \sin\alpha x\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta, \zeta)\sin\alpha\xi\,d\xi.$$

La première intégrale, où $\cos\alpha\xi$ est fonction paire de ξ, sera nulle à cause du facteur $F(\xi, \eta, \zeta)$, impair en ξ, tandis que la seconde, à fonction paire sous le signe $\int$, réduira le résultat à

$$2\sin\alpha x\int_{0}^{\infty} F(\xi, \eta, \zeta)\sin\alpha\xi\,d\xi.$$

Donc la formule de φ sera, au lieu de (9) (p. 8), vu d'ailleurs que $F(\xi, \eta, \zeta)$ est la différence $f(\xi, \eta, \zeta) - \frac{1}{h}\frac{df(\xi, \eta, \zeta)}{d\xi}$,

$$(\delta'')\left\{\begin{aligned}\varphi = {} & \frac{1}{2\pi^2 a^2 t}\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}\,d\eta\,d\zeta \\ & \times\iint_{0}^{+\infty}\left[f(\xi,\eta,\zeta) - \frac{1}{h}\frac{df(\xi,\eta,\zeta)}{d\xi}\right]e^{-a^2\alpha^2 t}\sin\alpha x\sin\alpha\xi\,d\alpha\,d\xi.\end{aligned}\right.$$

On voit que, pour $x = 0$, tous les éléments s'y annulent, à raison du facteur $\sin\alpha x$. Ainsi, la condition $\varphi = 0$ à la surface est bien satisfaite, comme les autres équations qui régissent φ.

173. **Formule des températures du mur.** — Passant donc, du refroidissement par contact, au refroidissement par rayonnement, où φ n'est plus la température u, mais seulement notre fonction auxiliaire liée à u par la relation (10) (p. 8), nous obtiendrons encore pour u l'expression (11) (même p. 8). Et, par suite, la formule développée de u se déduira de (δ'') comme la formule (12) (p. 9) s'est déduite de (9), c'est-à-dire par la substitution sous les signes $\int$ de (δ''), au facteur $\sin\alpha x$, d'une intégrale de la forme

$$h\int_{0}^{\infty} e^{-h\zeta}\sin(\alpha x + \alpha\zeta)\,d\zeta,$$

où ζ est, bien entendu, une variable auxiliaire distincte de celle de même nom dans (δ''). On a trouvé (p. 10), comme valeur de cette intégrale,

$$h\frac{\alpha\cos\alpha x + h\sin\alpha x}{\alpha^2+h^2}.$$

Il viendra donc, au lieu de (13) (même p. 10),

$$\left\{\begin{aligned} u = {} & \frac{1}{2\pi^2 a^2 t}\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}\,d\eta\,d\zeta \\ & \times\iint_0^{+\infty}\left[hf(\xi,\eta,\zeta)-\frac{df(\xi,\eta,\zeta)}{d\xi}\right]e^{-a^2\alpha^2t}\sin\alpha\xi\,\frac{\alpha\cos\alpha x+h\sin\alpha x}{\alpha^2+h^2}\,d\alpha\,d\xi. \end{aligned}\right.$$

Enfin, nous éliminerons la dérivée en ξ de la fonction arbitraire $f(\xi, \eta, \zeta)$, en commençant encore par l'intégration relative à ξ le calcul de la partie de la formule qui contient cette dérivée ; et le même raisonnement (p. 10) qui nous a conduits de la formule (13) à la formule (16), donnera, comme intégrale définitive du problème posé :

$$(\delta''')\quad\left\{\begin{aligned} u = {} & \frac{1}{2\pi^2 a^2 t}\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4a^2t}}\,d\eta\,d\zeta \\ & \times\iint_0^{+\infty} f(\xi,\eta,\zeta)\,e^{-a^2\alpha^2t}\,\frac{(\alpha\cos\alpha x+h\sin\alpha x)(\alpha\cos\alpha\xi+h\sin\alpha\xi)}{\alpha^2+h^2}\,d\alpha\,d\xi \\ = {} & \frac{2}{\pi^2}\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2-\omega'^2}\,d\omega\,d\omega'\iint_0^{+\infty} f(\xi, y+2a\omega\sqrt{t}, z+2a\omega'\sqrt{t}) \\ & \times e^{-a^2\alpha^2t}\,\frac{(\alpha\cos\alpha x+h\sin\alpha x)(\alpha\cos\alpha\xi+h\sin\alpha\xi)}{\alpha^2+h^2}\,d\alpha\,d\xi. \end{aligned}\right.$$

La dernière forme se déduit de la précédente en prenant, au lieu de η et ζ, les nouvelles variables d'intégration

$$\omega = \frac{\eta - y}{2a\sqrt{t}} \qquad \text{et} \qquad \omega' = \frac{\zeta - z}{2a\sqrt{t}}.$$

174. Autre forme de l'intégrale obtenue. — Constatons que toutes les équations du problème sont vérifiées par cette expression de u. A cet effet, appelons, pour abréger, $Y(t, y-\eta)$,

$Z(t, z-\zeta)$ les deux fonctions de deux variables

$$(\varepsilon)\qquad Y=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4a^2t}},\qquad Z=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2t}},$$

qui, nulles pour y ou z infinis, donnent en outre

$$(\varepsilon')\qquad \frac{dY}{dt}-a^2\frac{d^2Y}{dy^2}=0,\qquad \frac{dZ}{dt}-a^2\frac{d^2Z}{dz^2}=0;$$

et appelons aussi $X(t, x, \eta, \zeta)$ la formule (16) de u, obtenue (p. 11) pour le cas où y, z ne figuraient pas dans u, mais prise maintenant avec une fonction $f(x)$ qui contienne deux paramètres η, ζ et qui, en outre, s'annule pour $x=\infty$. Nous poserons donc

$$(\varepsilon'')\quad X=\frac{2}{\pi}\int\!\!\int_0^{+\infty} f(\xi,\eta,\zeta)\,e^{-a^2\alpha^2t}\frac{(\alpha\cos\alpha x+h\sin\alpha x)(\alpha\cos\alpha\xi+h\sin\alpha\xi)}{\alpha^2+h^2}\,d\alpha\,d\xi;$$

et cette fonction X, indépendante de y et z, vérifiera les relations

$$\frac{dX}{dt}-a^2\frac{d^2X}{dx^2}=0,$$

$$(\text{pour } x=0)\ \frac{dX}{dx}-hX=0,$$

$$(\text{pour } x=\infty)\ X=0,$$

$$(\text{pour } t=0)\ X=f(x,\eta,\zeta).$$

Alors la formule (δ''') deviendra

$$(\varepsilon''')\quad \begin{cases} u=\displaystyle\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} X(t,x,\eta,\zeta)\,Y(t,y-\eta)\,Z(t,z-\zeta)\,d\eta\,d\zeta \\ \quad =\displaystyle\frac{1}{\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2-\omega'^2}X\left(t,x,y+2a\omega\sqrt{t},z+2a\omega'\sqrt{t}\right)d\omega\,d\omega'. \end{cases}$$

Or, dans le second membre, la fonction sous le signe $\int$ est le produit des trois facteurs X, Y, Z qui, dépendant séparément de t et x, de t et y, de t et z, donnent les trois équations

$$\frac{dX}{dt}-a^2\frac{d^2X}{dx^2}=0,\qquad \frac{dY}{dt}-a^2\frac{d^2Y}{dy^2}=0,\qquad \frac{dZ}{dt}-a^2\frac{d^2Z}{dz^2}=0.$$

Multiplions celles-ci respectivement par YZ, ZX, XY, puis

ajoutons-les. Il viendra

$$\frac{d(XYZ)}{dt} - a^2 \Delta_2 (XYZ) = 0.$$

C'est dire que chaque élément du second membre de (ε''') vérifie l'équation indéfinie du problème. De plus, cet élément s'annule pour x, y ou z infinis dans le mur, à raison du facteur correspondant X, Y ou Z alors nul lui-même; et, d'autre part, l'expression $\frac{du}{dx} - hu$, déduite encore du second membre, a la même forme que lui, sauf la substitution à X, sous les signes $\int\int$, du facteur analogue $\frac{dX}{dx} - hX$, qui s'annule à la surface $x = 0$.

Ainsi, les équations, tant indéfinie que relatives aux limites de x, y, z, sont satisfaites. Enfin, pour $t = 0$, le troisième membre de (ε''') devient immédiatement $X(0, x, y, z)$, c'est-à-dire $f(x, y, z)$; et la condition d'état initial se trouve également vérifiée.

175. Solution simple naturelle du problème. — La température effective u se compose, d'après le second membre de (ε'''), des valeurs partielles qu'elle aurait, si l'on n'attribuait à la température initiale $f(x, y, z)$ ses valeurs données, qu'à l'intérieur d'un filet prismatique élémentaire normal aux x, de coordonnées η, ζ suivant les y et les z, et de section normale $d\eta\, d\zeta$, cette température initiale étant supposée nulle partout hors du filet considéré, pour lequel on prendra, successivement, tous les filets analogues du mur. En effet, l'expression (ε'') du facteur $X(t, x, \eta, \zeta)$, dans ces valeurs partielles, s'annule alors identiquement dès que η, ζ sont les coordonnées, suivant les y et les z, de points extérieurs au filet correspondant.

Appelons r la distance $\sqrt{(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ du point intérieur quelconque (x, y, z) à ce filet élémentaire, et $\mathrm{f}(\xi)$ la quantité $Cf(\xi, \eta, \zeta)\, d\eta\, d\zeta$ de chaleur que contenait *initialement* l'unité de longueur des divers tronçons de celui-ci, distingués en position les uns des autres par leur abscisse ξ; ou posons, par conséquent,

$$f(\xi, \eta, \zeta)\, d\eta\, d\zeta = \frac{\mathrm{f}(\xi)}{C}.$$

Alors, vu les valeurs (ε), (ε″) de Y, Z et X, le second membre de (ε‴), ainsi réduit à son élément provenant du filet considéré, sera

$$(\zeta)\quad u = \frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}}{4a^2\pi t}\,\frac{2}{\pi}\int\int_0^{+\infty} \frac{f(\xi)}{C}\, e^{-a^2\alpha^2 t}\,\frac{(\alpha\cos\alpha x + h\sin\alpha x)(\alpha\cos\alpha\xi + h\sin\alpha\xi)}{\alpha^2+h^2}\,d\alpha\, d\xi.$$

Telle est donc la solution simple *naturelle* du problème posé (¹). Elle diffère de (16) (p. 11) par la présence du facteur $\frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}}{4a^2\pi t}$, évanouissant soit quand la distance r grandit, soit quand le temps (positif) t décroît vers zéro ou, encore, devient infini. La concentration de la chaleur le long de l'axe ($y=\eta$, $z=\zeta$) parallèle aux x ne dure donc qu'un instant imperceptible. Une fois cet instant passé, la température u s'obtient, aux différentes distances r de l'axe et dans les diverses couches $x=$ const. du mur parallèles à sa face $x=0$, en raisonnant comme si la quantité de chaleur initialement concentrée sur l'axe dans chaque couche s'y était trouvée disséminée uniformément sur l'unité d'aire, et indéfiniment répétée sur toutes les unités d'aire de la même couche, mais en multipliant finalement la température ainsi calculée, par le facteur $\frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}}{4a^2\pi t}$. C'est donc ce facteur qui représente l'effet de la dissipation dans les sens parallèles aux couches.

176. Résultats divers. — Quand, dans la formule (δ‴), l'expression $f(\xi,\eta,\zeta)$ des températures initiales a la forme $\chi(\xi)\,\psi(\eta,\zeta)$, l'expression (δ‴) de u est le produit d'une intégrale double, en α et ξ, par une autre, en η et ζ, ou en ω et ω' : le résultat se simplifie donc. C'est ce qui arrive, notamment, lorsque l'échauffement initial a été uniforme, mais limité à un prisme ou cylindre de forme quelconque ayant ses génératrices parallèles aux x et comprises entre deux abscisses données $x=$ const., cas où l'on

(¹) *Voir*, dans la XLIXᵉ Leçon de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, fascicule II, p. 520*), la notion de *solution simple naturelle* pour les problèmes de Physique mathématique concernant les corps de dimensions infinies.



peut poser, à un facteur constant près, $\chi(\xi)=1$, $\psi(\eta,\zeta)=1$, pour les coordonnées ξ, η, ζ des points intérieurs au prisme, et $\chi(\xi)=0$, $\psi(\eta,\zeta)=0$ ou, du moins, $\chi(\xi)\psi(\eta,\zeta)=0$, pour celles des points extérieurs.

Si, en particulier, un tel échauffement initial uniforme s'est étendu de la face $x=0$ jusqu'à une grande profondeur dans le mur, le calcul de l'intégrale en ξ et α se ramène, comme on a vu (p. 15), à la fonction de Kramp $\int_\omega^\infty e^{-\omega^2}d\omega$ ou à l'intégrale $\int_0^\omega e^{-\omega^2}d\omega$. Et l'on reconnaît, sur le troisième membre de (δ'''), qu'il en est de même de l'intégrale en ω et ω', quand le prisme initialement chauffé est rectangulaire ou que η, ζ n'ont à varier, dans $\psi(\eta,\zeta)$, qu'entre des limites constantes, comme, par exemple, $\eta=0$ et $\eta=b$, $\zeta=0$ et $\zeta=c$. Alors, en effet, l'intégrale double dont il s'agit sera évidemment le produit des deux intégrales simples

$$\int_{-\frac{y}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{b-y}{2a\sqrt{t}}} e^{-\omega^2}d\omega,\quad \int_{-\frac{z}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{c-z}{2a\sqrt{t}}} e^{-\omega^2}d\omega.$$

Les intégrations en η, ζ se font encore exactement quand $\psi(y,z)$ a la forme $e^{-\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}$, les températures primitives $f(x,y,z)$ étant ainsi $\chi(x)e^{-\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}$ et s'évanouissant plus ou moins rapidement à mesure qu'on s'éloigne de l'axe des x. Mais il est alors plus simple d'observer que les formules (ε) de Y, Z ne cessent pas de vérifier les équations (ε'), lorsqu'on déplace arbitrairement, dans chacune, l'origine des temps, en y substituant $t+$ const. à t, c'est-à-dire en ajoutant à t, par exemple, $\frac{b^2}{4a^2}$ dans l'expression de Y et $\frac{c^2}{4a^2}$ dans l'expression de Z. Si l'on fait d'ailleurs $\eta=0$, $\zeta=0$ pour simplifier autant que possible les résultats, il vient comme solution particulière de l'équation

$$(\zeta')\qquad \frac{d.\mathrm{YZ}}{dt}-a^2\Delta_2(\mathrm{YZ})=0,$$

le produit

$$(\zeta'')\qquad \mathrm{YZ}=\frac{bc\,e^{-\left(\frac{y^2}{b^2+4a^2t}+\frac{z^2}{c^2+4a^2t}\right)}}{\sqrt{(b^2+4a^2t)(c^2+4a^2t)}},$$

où j'ai, en outre, remplacé les coefficients $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ figurant dans Y et Z, par b et par c, afin de réduire Y et Z à l'unité quand leurs variables t, y, z s'annulent. De plus, ce produit YZ, d'une part, s'annule pour y ou z infinis et, d'autre part, se réduit, pour $t = 0$, à l'expression voulue $e^{-\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}$; en sorte qu'il vérifie ici toutes les relations qui nous avaient imposé, pour y satisfaire, l'intégrale double à déterminer, savoir :

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\omega^2-\omega'^2}}{\pi} \psi(y + 2a\omega\sqrt{t}, z + 2a\omega'\sqrt{t})\, d\omega\, d\omega'.$$

La solution (δ''') deviendra donc

$$(\zeta''') \quad \left\{ \begin{aligned} u = {} & \frac{bc\, e^{-\left(\frac{y^2}{b^2+4a^2t}+\frac{z^2}{c^2+4a^2t}\right)}}{\sqrt{(b^2+4a^2t)(c^2+4a^2t)}} \\ & \times \frac{2}{\pi}\iint_{0}^{+\infty} \chi(\xi)\, e^{-a^2\alpha^2 t} \frac{(\alpha\cos\alpha x + h\sin\alpha x)(\alpha\cos\alpha\xi + h\sin\alpha\xi)}{\alpha^2+h^2}\, d\alpha\, d\xi. \end{aligned} \right.$$

Dans chaque couche parallèle à la face $x = 0$ du mur, les courbes isothermes, à l'époque t, ont pour équation

$$\frac{y^2}{b^2+4a^2t} + \frac{z^2}{c^2+4a^2t} = \text{une fonction de } t,\ x \text{ et } u.$$

Ce sont des ellipses, toutes homothétiques à chaque instant, ayant leur centre sur l'axe des x et leurs axes, respectivement suivant les y et les z, dans le rapport $\sqrt{\frac{b^2+4a^2t}{c^2+4a^2t}}$, d'autant plus voisin de l'unité que t est plus grand. La forme elliptique de ces courbes tend donc sans cesse vers la forme circulaire (1).

---

(1) En introduisant une fonction X de t et de x, analogue aux fonctions Y, Z, mais en mettant, dans ces fonctions, α^2, β^2, γ^2 au lieu des constantes comme b^2 et c^2, afin d'éviter une confusion possible avec le coefficient a^2 de l'équation aux dérivées partielles, il viendra de même, comme solution particulière de l'équation

$$(\eta) \qquad \frac{du}{dt} = a^2 \Delta_2 u,$$

à quatre variables indépendantes t, x, y, z, le produit $u = u_M$XYZ, où u_M désigne un maximum donné de la température initiale, supposé réalisé à l'origine des

coordonnées. On a donc pour exprimer le refroidissement d'un solide homogène et isotrope, indéfini en tous sens, et où les températures étaient initialement $u_0 = u_m e^{-\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)}$, la chaleur s'y trouvant ainsi ramassée autour de l'origine par couches ellipsoïdales concentriques et homothétiques de densités décroissantes, la formule

$$(7_1) \qquad u = u_m \frac{\alpha\beta\gamma e^{-\left(\frac{x^2}{\alpha^2+4a^2t}+\frac{y^2}{\beta^2+4a^2t}+\frac{z^2}{\gamma^2+4a^2t}\right)}}{\sqrt{(\alpha^2+4a^2t)(\beta^2+4a^2t)(\gamma^2+4a^2t)}}.$$

Les surfaces isothermes y sont les ellipsoïdes variables, concentriques et (à chaque instant) homothétiques,

$$(7'_1) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2+4a^2t}+\frac{y^2}{\beta^2+4a^2t}+\frac{z^2}{\gamma^2+4a^2t} = \text{const., fonction de } t \text{ et de } u.$$

On voit qu'ils tendent sans cesse, à partir de leur forme initiale donnée, vers la forme sphérique, à mesure que le temps t grandit. Ils sont même déjà des sphères, si la chaleur se trouvait initialement concentrée à l'origine, ou que α, β, γ fussent infiniment petits.

Le cas où tout l'axe des x aurait été initialement porté à une température uniforme s'obtient en faisant α infini; et alors les ellipsoïdes isothermes dégénèrent en cylindres elliptiques, tendant à devenir circulaires. Ce seraient les doubles plans $x^2 =$ const., si l'on prenait β et γ infinis.

La tendance, dans tous ces exemples, vers la forme sphérique ou circulaire, des surfaces isothermes ellipsoïdales et des courbes isothermes elliptiques, confirme bien l'induction que nous avons faite au n° 107 (t. I, p. 199) et que nous achèverons d'ailleurs de justifier dans la XXXe Leçon.



VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

SUITE : ÉTUDE, PAR LA MÊME MÉTHODE, DE L'ÉCHAUFFEMENT, SOIT VARIABLE, SOIT PERMANENT ET INÉGAL, DU MUR RAYONNANT D'ÉPAISSEUR INDÉFINIE.

177. **Troisième exemple : échauffement, par rayonnement, du même mur d'épaisseur indéfinie.** — Le troisième exemple que je donnerai, de la réduction du cas de rayonnement au cas de contact, est le problème de l'échauffement de notre mur, à face indéfinie $x = 0$ et d'épaisseur indéfinie aussi, par une source extérieure, d'étendue également indéfinie, produisant devant toute cette face des températures u_e variables avec le temps, dont elles seront une fonction arbitraire connue $u_e = f(t)$. Si l'on dégage ce problème de celui de refroidissement correspondant, qui consisterait [1] à y calculer, à partir de l'état initial effectif et donné, les températures successives u du même mur, dans l'hypothèse d'une température extérieure fixe $u_e = 0$, les valeurs initiales de u restantes, ou *propres à la question de l'échauffement*, seront *zéro*, depuis x nul jusqu'à $x = \infty$.

Nous rendrons la solution aussi simple, aussi régulière ou uniforme qu'il est possible, en supposant que la fonction $u_e = f(t)$ ait été nulle jusqu'à l'époque de cet état initial $u = 0$, et en concevant, par suite, celui-ci comme ayant duré depuis $t = -\infty$ jusqu'au moment où $f(t)$ aura commencé à différer de zéro. Alors nous disposerons de tout le champ réel des variations de t, depuis $t = -\infty$ jusqu'à $t = +\infty$. Le problème aura pour équations ou

(1) *Voir* le tome I, p. 193, 201, 209.

conditions :

(39) $$\frac{du}{dt}=a^2\frac{d^2u}{dx^2},$$

(40) $$(\text{pour } x=0)\quad u-\frac{1}{h}\frac{du}{dx}=u_e=f(t),$$

(41) $$(\text{pour } t=-\infty)\ u=0,\qquad (\text{pour } x=\infty)\ u=0.$$

178. Calcul de la fonction auxiliaire φ. — Le cas simple d'échauffement par contact sera celui où, le coefficient h étant infini, l'équation (40) se réduit à $u=u_e=f(t)$ pour $x=0$. Alors on a la solution ([1])

(42) $$u=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f\left(t-\frac{x^2}{2a^2\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\,d\alpha.$$

En effet, la vérification de la relation $u=f(t)$ pour $x=0$ et des conditions (41) y étant immédiate, il suffit de constater qu'elle satisfait bien à l'équation indéfinie (39). Or une première différentiation de (42) en x donne, si l'on remplace finalement α par la nouvelle variable d'intégration $\beta=\frac{x}{\alpha}$,

$$\begin{aligned}a^2\frac{du}{dx}&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}f'\left(t-\frac{x^2}{2a^2\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\,d\frac{x}{\alpha}\\&=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'\left(t-\frac{\beta^2}{2a^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2\beta^2}}\,d\beta.\end{aligned}$$

Et, de ce résultat, une nouvelle différentiation en x, après laquelle on reviendra à la primitive variable d'intégration α, déduit la formule

$$\begin{aligned}a^2\frac{d^2u}{dx^2}&=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\beta=0}^{\beta=\infty}f'\left(t-\frac{\beta^2}{2a^2}\right)e^{-\frac{x^2}{2\beta^2}}\,d\frac{x}{\beta}\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f'\left(t-\frac{x^2}{2a^2\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\,d\alpha.\end{aligned}$$

C'est bien l'expression de $\frac{du}{dt}$, telle que la donne une différentiation immédiate de (42) par rapport à t.

([1]) *Voir* mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (*Calcul intégral, Complements*, p. 469*, par exemple).

Cela posé, revenant au cas du rayonnement, on remarquera que la fonction φ, c'est-à-dire $u - \frac{1}{h}\frac{du}{dx}$, vérifie évidemment, dans chacun de ses termes, les relations (39) et (41), ou que l'on a

$$\frac{d\varphi}{dt} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \qquad (\text{pour } t = -\infty)\ \varphi = 0, \qquad (\text{pour } x = \infty)\ \varphi = 0.$$

Et comme, de plus, d'après (40), elle satisfait à la quatrième condition qui achevait de déterminer u dans l'échauffement par contact, savoir

$$(\text{pour } x = 0)\ \varphi = u_e = f(t),$$

cette fonction auxiliaire φ recevra exactement l'expression (42) qu'avait u dans le cas du contact.

179. Formule des températures du mur chauffé. — Donc, appelant, plus explicitement, $\varphi(x, t)$ notre fonction auxiliaire et, d'ailleurs, remplaçant sous le signe $\int$ de (42) α par $\omega\sqrt{2}$, pour mettre les présentes notations en harmonie avec celles de notre premier problème, nous aurons

$$(43) \qquad \varphi(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f\left(t - \frac{x^2}{4a^2\omega^2}\right) e^{-\omega^2}\, d\omega.$$

Enfin, l'équation différentielle qui relie u à φ est encore (10) (p. 8), comme dans la question du refroidissement; et la condition relative à $x = \infty$, propre à déterminer la constante arbitraire introduite par son intégration, est $u = 0$, cas particulier de celle, $u = u_0$, que nous avions dans cette question.

Comme, d'autre part, φ se réduit encore à u pour x infini, l'intégrale continuera à être (11); et les raisonnements donnés après (11) montreront que l'équation indéfinie, ainsi que les trois conditions spéciales à $x = \infty$, à $x = 0$ et à $t = -\infty$, sont vérifiées par cette intégrale. Il viendra donc, vu l'expression actuelle (43) de φ,

$$(44) \qquad u = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int\!\!\int_0^{+\infty} e^{-\omega^2 - h\zeta} f\left[t - \frac{(x+\zeta)^2}{4a^2\omega^2}\right] d\zeta\, d\omega.$$

180. Application au problème du refroidissement de la croûte terrestre. — Cette formule (44), beaucoup plus simple que celle (16) du refroidissement (p. 11), conduit très vite aux résultats de



Fourier (31) à (35), ou aux nôtres ci-dessus (formule 29, p. 17), concernant le refroidissement d'un mur ou de la croûte terrestre à partir d'une température uniforme u_0. Il suffit d'admettre qu'après s'être trouvé primitivement à zéro comme le mur, l'espace extérieur ait été, à une époque fort ancienne $t = -\mathrm{T}$, porté de la température $u_e = 0$ à la température $u_e = u_0$, et qu'il ait conservé cette température u_0 jusqu'à l'époque $t = 0$, c'est-à-dire très longtemps, assez pour l'avoir communiquée au mur jusqu'à de grandes profondeurs x. La source extérieure de chaleur s'étant, ensuite, rapidement éteinte, la température correspondante u_e sera devenue nulle à l'instant $t = 0$; et le rayonnement du mur, aux époques t positives, aura dès lors amené le refroidissement qu'étudie Fourier.

Ainsi, dans (44), où l'on peut assimiler ω à une abscisse et ζ à une ordonnée, le champ d'intégration ne comprendra pas tout l'angle des coordonnées positives. La fonction $f(t)$ ayant ses valeurs nulles en dehors de l'intervalle des limites $t = -\mathrm{T}$, $t = 0$, le facteur $f\left[t - \frac{(x+\zeta)^2}{4a^2\omega^2}\right]$ annulera tous les éléments autres que ceux où $x + \zeta$ excédera $2a\omega\sqrt{t}$ et sera inférieur à $2a\omega\sqrt{t+\mathrm{T}}$, les seuls où la variable $t - \frac{(x+\zeta)^2}{4a^2\omega^2}$ soit comprise entre $-\mathrm{T}$ et zéro. Pour chaque valeur (positive) de ω, ζ n'aura donc à varier que de $-x + 2a\omega\sqrt{t}$ à $-x + 2a\omega\sqrt{t+\mathrm{T}}$, en excluant même celles d'entre ces valeurs de ζ qui seraient négatives $\Big($ce qu'elles seront toutes pour $\omega < \frac{x}{2a\sqrt{t+\mathrm{T}}}$, et ce que sera une partie d'entre elles pour $\omega < \frac{x}{2a\sqrt{t}}\Big)$. D'ailleurs, dans le champ ainsi réduit et sauf, le long de ses limites, sur une étroite bande négligeable, le même facteur f recevra la valeur constante u_0.

La formule (44) deviendra donc

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} u = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\Bigg[&\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t+\mathrm{T}}}}^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\omega^2}\,d\omega \int_0^{-x+2a\omega\sqrt{t+\mathrm{T}}} h e^{-h\zeta}\,d\zeta \\ &+ \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\omega^2}\,d\omega \int_{-x+2a\omega\sqrt{t}}^{-x+2a\omega\sqrt{t+\mathrm{T}}} h e^{-h\zeta}\,d\zeta\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Comme T est très grand, les limites supérieures des intégrations en ζ reviennent à ∞, pour les valeurs finies de x, et la première limite inférieure des intégrations relatives à ω équivaut à zéro, dans les mêmes conditions de x fini. D'ailleurs, l'intégration indéfinie en ζ donnant $-e^{-h\zeta}$, on a évidemment

$$u = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\omega^2}\,d\omega + e^{hx}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\omega^2-2ah\omega\sqrt{t}}\,d\omega\right]$$
$$= \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\omega^2}\,d\omega + e^{a^2h^2t+hx}\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-(\omega+ah\sqrt{t})^2}\,d\omega\right].$$

Remplaçons, sous le dernier signe $\int$, ω par la nouvelle variable d'intégration $\omega' = ah\sqrt{t} + \omega$, ce qui ajoutera simplement $ah\sqrt{t}$ à la limite inférieure; et, en effaçant l'accent de ω', il viendra

$$(46)\qquad u = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\omega^2}\,d\omega + e^{a^2h^2t+hx}\int_{ah\sqrt{t}+\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\omega^2}\,d\omega\right],$$

c'est-à-dire, précisément, notre formule (29) (p. 17).

La question du refroidissement de la croûte terrestre, à partir d'un état initial uniforme jusqu'à de grandes profondeurs, apparaît ici, comme on voit, beaucoup plus simple que dans la XXII[e] Leçon. Il y a donc lieu de se demander d'où vient sa complication lorsqu'on la rattache, comme nous avons fait d'abord suivant l'exemple de Fourier, au problème général du refroidissement d'un mur, à partir d'un état initial arbitrairement variable avec la profondeur x des couches de la surface. Cette complication est due sans doute, alors, à ce que la formule de Fourier, dont l'emploi semble indispensable à la formation de l'intégrale générale du problème, introduit, dans les éléments de cette intégrale générale, des sinus ou cosinus d'arcs réels et, par suite, des *ondulations,* entièrement étrangères à l'*allure* qu'affecte l'intégrale effective du cas choisi, où l'état initial est *uniforme*. D'où la nécessité de réductions spéciales, pour éliminer des éléments de u ces ondulations artificielles ([1]).

([1]) La preuve que ces ondulations artificielles sont la vraie cause de la com-

181. Quatrième exemple : échauffement permanent, mais inégal, du mur indéfini, par le rayonnement de sources extérieures constantes. — Nos deux derniers exemples se rapporteront à des états permanents.

Le plus simple sera encore relatif à notre mur, d'épaisseur ou profondeur indéfinie, sous sa face $x = 0$ illimitée en longueur et largeur. Mais la température extérieure u_e y sera supposée très variable avec les coordonnées y, z parallèles à cette face ; et, par suite, la température interne u dépendra de y, z et x. Il s'agira, par exemple, d'évaluer les températures partielles u acquises, à la longue, par la croûte terrestre, sous l'action solaire considérée dans sa partie permanente, en admettant que cette action soit modifiée (comme elle paraît l'être en effet souvent) par diverses conditions atmosphériques ou hygrométriques ([1]), au point de présenter de sensibles inégalités locales.

Imaginons d'abord qu'il existe, devant ou sur la face $x = 0$, un nombre limité de sources extérieures rayonnantes, produisant, au-dessus des points $(0, y, z)$ du sol ou du mur, des températures $u_e = f(y, z)$ arbitrairement données, mais, cependant, nulles en dehors d'une région assignée σ du plan des yz, vers le milieu de laquelle nous aurons pris l'origine des coordonnées. Les points du sol ou du mur infiniment éloignés de cette région se trouveront donc à la température uniforme choisie pour zéro ; et les équations du problème seront :

$$(47) \qquad (\text{pour } x > 0) \qquad \Delta_2 u = 0,$$

$$(48) \qquad (\text{pour } x = 0) \qquad u - \frac{1}{h}\frac{du}{dx} = u_e = f(y, z),$$

$$(49) \qquad (\text{pour } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ infini}) \qquad u = 0,$$

la fonction arbitraire $f(y, z)$ étant d'ailleurs, par hypothèse, nulle hors de la région limitée σ du plan des yz.

---

plication, c'est que celle-ci disparaît et qu'on obtient immédiatement l'équation voulue (29), en portant dans l'équation (γ) de la page 16 une expression de φ débarrassée de cosinus ou de sinus, comme est l'expression (β) de la même page.

La question de l'échauffement permanent d'une plaque mince, à partir d'un centre, donnera lieu, plus loin, à une réflexion assez analogue (n° 234).

([1]) On peut compter parmi ces dernières celles où se trouve le lit d'un cours d'eau ou d'un lac, comparativement aux régions du sol voisines.

182. Calcul de la fonction auxiliaire φ. — Le cas de l'échauffement permanent par contact serait celui où, h étant infini, u se confondrait, à la surface, avec u_e. L'idée vient alors immédiatement à l'esprit de satisfaire aux relations (47) et (49) au moyen du potentiel newtonien d'une mince couche matérielle m, que l'on se représenterait étalée sur la région σ de la surface. En appelant $\rho(b, c)$ la densité, par unité d'aire, de cette couche fictive, au point de σ qui a les coordonnées $x = 0$, $y = b$, $z = c$, et $r = \sqrt{x^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ la distance du point intérieur quelconque (x, y, z) du mur au point $(0, b, c)$ de la superficie, ou à l'élément dm de la couche fictive qui couvre l'élément $d\sigma$ de surface comprenant ce même point $(0, b, c)$, le potentiel dont il s'agit, à paramètre Δ_2 nul hors de la couche ou, en particulier, dans tout l'intérieur du mur, sera

$$\int \frac{dm}{r} = \int_\sigma \frac{\rho(b, c)\, d\sigma}{r} = \int_\sigma \frac{\rho(b, c)\, d\sigma}{\sqrt{x^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Et il est évident, la masse $\int dm$ se trouvant localisée sur la région σ, qu'il satisfera aussi à la condition (49).

Il ne lui resterait donc, pour convenir au problème dans le cas du contact, qu'à vérifier la condition (48) prise avec h infini, ou à égaler $f(y, z)$ à la limite $x = 0$. Or, pour $x = 0$, le potentiel n'a pas des rapports simples avec la fonction ρ qui sert à le former.

Mais on sait ([1]) que sa dérivée suivant la normale à la couche, savoir, ici, sa dérivée en x, $\frac{d}{dx}\int \frac{dm}{r}$, en a, au contraire, et se réduit à $-2\pi\rho(y, z)$ quand l'abscisse positive x tend vers zéro. De plus, cette dérivée en x du potentiel vérifie évidemment, tout comme le potentiel lui-même, l'équation linéaire (47), à coefficients constants, et la condition (49). Si donc on essaye de l'adopter pour u, sa valeur devenant $-2\pi\rho(y, z)$ sur la face $x = 0$, cette dérivée transformera l'équation (49), prise avec h infini, en celle-ci,

$$-2\pi\rho(y, z) = f(y, z),$$

([1]) *Voir*, par exemple, mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (*Calcul intégral, Compléments*, p. 224*).

qui se trouvera, dès lors, satisfaite si l'on attribue, à la densité *disponible* $\rho(y, z)$ de la couche, la formule $-\frac{f(y,z)}{2\pi}$.

Ainsi l'on aura, comme solution du cas de l'échauffement permanent par contact,

$$(50)\quad \left\{ \begin{aligned} u &= -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_\sigma \frac{f(b,c)\,d\sigma}{r} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{f(b,c)\,x\,d\sigma}{r^3} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{f(b,c)\,x\,d\sigma}{[x^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, il est clair que notre fonction auxiliaire $\varphi = u - \frac{1}{h}\frac{du}{dx}$ vérifie précisément, quand l'échauffement se fait par rayonnement, les équations mêmes qui déterminent u quand il se fait par contact. Nous aurons donc

$$(51)\qquad \varphi(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{f(b,c)\,x\,d\sigma}{[x^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

183. Détermination des températures internes permanentes. — Il ne reste plus qu'à intégrer l'équation, simplement différentielle en x, reliant u à φ, laquelle est encore (10) (p. 8), avec la même condition accessoire,

$$(\text{pour } x = \infty)\qquad u = \varphi = 0,$$

que dans le problème précédent. Par suite, l'expression de u continue à être (11), à cela près que les variables y, z figurent maintenant, au lieu de t, dans la fonction auxiliaire φ; et les raisonnements qui suivent cette formule font encore voir que les conditions spéciales soit à $x = 0$, soit à $x = \infty$, sont bien satisfaites par elle, ainsi que l'équation indéfinie $\Delta_2 u = 0$. D'ailleurs, pour y ou z infini sans que x le soit, la formule (11) donne u évanouissant, comme φ.

Enfin, vu l'expression actuelle (51) de φ, l'on aura

$$(52)\quad u = \frac{h}{2\pi}\int_0^\infty e^{-h\zeta}d\zeta \int_\sigma \frac{f(b,c)(x+\zeta)\,d\sigma}{[(x+\zeta)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

184. Évanouissement graduel, dans l'intérieur, des inégalités que cause la non-uniformité de l'échauffement à la surface. — Imaginons maintenant que la région σ exposée au rayonnement des sources de chaleur (ou de froid) s'étende de plus en plus dans les deux sens de la longueur et de la largeur, mais en subissant, sur toute aire suffisamment grande, une température extérieure moyenne *nulle,* c'est-à-dire égale à une température générale uniforme, prise pour zéro, que l'on veut faire acquérir à tous les points intérieurs très éloignés.

Alors, aux grandes distances x de la surface, φ et, par suite, u continueront à tendre vers zéro, malgré l'accroissement indéfini de l'étendue et du nombre des sources.

On le reconnaît en démontrant d'abord que le second membre de (51) n'excède jamais la plus forte valeur absolue donnée, que j'appellerai M, de la fonction $f(y, z)$, même quand on y prend *positivement* tous les éléments de l'intégrale définie $\int_\sigma$. En effet, ce second membre est alors inférieur à

$$\frac{\mathrm{M}x}{2\pi}\int_\sigma \frac{d\sigma}{r^3}. \tag{53}$$

Or, menons du point (x, y, z) la perpendiculaire x au plan des yz et, autour de son pied comme centre, traçons dans ce plan des couronnes élémentaires $2\pi \mathrm{R}\, d\mathrm{R}$, d'un rayon intérieur R allant, graduellement, depuis zéro jusqu'à ∞. On aura

$$r^2 = x^2 + \mathrm{R}^2, \qquad d\sigma = 2\pi \mathrm{R}\, d\mathrm{R} = 2\pi r\, dr;$$

et l'expression (53), où r croîtra de x à ∞, sera

$$\mathrm{M}x\int_x^\infty \frac{dr}{r^2} = \mathrm{M}x\left(-\frac{1}{r}\right)_x^\infty = \mathrm{M}. \tag{53 bis}$$

Ainsi, les valeurs (51) de φ ne peuvent pas excéder la limite finie M, même quand on prend tous leurs éléments avec le même signe.

Cela posé, si la distance, x, du point considéré (x, y, z) à la couche $\int dm$ est beaucoup plus grande que les dimensions de cha-

cune des parties de celle-ci où la densité moyenne s'annule, on n'altérera que d'une très petite fraction de leurs valeurs la distance r relative à chaque élément dm de masse, et aussi, par suite, l'élément d'intégrale qui s'y rapporte, dans (51), en déplaçant à volonté dm dans l'étendue, de dimensions restreintes, dont il s'agit, notamment en y répartissant uniformément les masses positives et les masses négatives, de manière à y rendre la densité effective égale à la densité moyenne zéro. Alors, sans changer dans un rapport appréciable chacune des deux sommes partielles des éléments positifs et des éléments négatifs, ni, par suite, leur total arithmétique inférieur à M, on aura évidemment réduit à zéro leur total algébrique, ou à l'unité le rapport de leurs deux valeurs absolues. C'est dire que, avant leurs légères altérations relatives, les deux sommes partielles avaient leur rapport absolu très voisin de l'unité, et, par suite, leur total algébrique égal à une fraction évanouissante de leur total arithmétique. Celui-ci se trouvant inférieur à M, le total algébrique, c'est-à-dire φ, ne peut qu'être infiniment petit, pour x assez grand.

Donc $\varphi(x, y, z)$ tend bien vers zéro quand x grandit; et il en est de même, à plus forte raison, de u, que sa formule

$$(54) \qquad u = h\int_0^\infty e^{-h\zeta}\varphi(x+\zeta, y, z)\,d\zeta$$

fait inférieur à

$$h\int_0^\infty e^{-h\zeta}\varphi(x, y, z)\,d\zeta = \varphi(x, y, z)\int_0^\infty e^{-h\zeta}h\,d\zeta = \varphi(x, y, z).$$

Ainsi, les inégalités locales d'échauffement de l'espace extérieur et, par suite, de la face $x = 0$ du mur ou de la croûte terrestre considérée, s'atténueront dans l'intérieur, jusqu'à devenir insensibles aux profondeurs x assez grandes par rapport aux dimensions des espaces qui sont, sur la surface, les sièges de ces inégalités.

La formule (52) est due à Poisson, qui l'a obtenue comme cas limite de la solution analogue concernant la sphère, et à laquelle il nous reste à appliquer notre méthode de réduction ([1]). Cette

---

([1]) La plupart des questions exposées ci-dessus, à partir de la XXIe Leçon, et



dernière application, ou l'étude de la solution dont il s'agit, fera l'objet des deux Leçons suivantes.

---

dans les deux Leçons ci-après, ont été résumées dans des Notes présentées à l'Académie des Sciences de Paris les 11, 18, 25 juin, 2 et 9 juillet 1900 (*Comptes rendus*, t. CXXX, p. 1579, 1652, 1731, et t. CXXXI, p. 9 et 81).

Une Note plus récente, du 30 septembre 1901 (*Comptes rendus*, t. CXXXIII, p. 497), a traité l'exemple des nos 171 à 176, où figurent à la fois les quatre variables indépendantes x, y, z, t.

VINGT-CINQUIÈME LEÇON.

PROBLÈME DE L'ÉCHAUFFEMENT PERMANENT ET INÉGAL D'UNE SPHÈRE, TRAITÉ PAR LA MÊME MÉTHODE : ÉCHAUFFEMENT DE LA SPHÈRE PAR CONTACT.

185. Cinquième exemple. Échauffement permanent d'une sphère; et, d'abord, recherche de la solution pour son échauffement par contact. — Il s'agit des températures permanentes d'une sphère homogène dont la surface, que nous appellerons σ, rayonne vers des espaces ayant leur température invariable, u_e, donnée pour chaque point (a, b, c) de cette surface et, par conséquent, fonction connue, $u_e(a, b, c)$, des coordonnées a, b, c.

Traitons d'abord le cas de l'échauffement par contact, où u_e se confond avec la température interne u de la sphère sous le même point (a, b, c) de sa couche superficielle. Nous avons donc à former, pour tout l'intérieur de la sphère, une fonction graduellement variable u de x, y, z dont le paramètre différentiel Δ_2 y soit nul, et qui, à la surface σ, prenne les valeurs données u_e.

La solution s'obtiendrait facilement en intégrale définie, même pour un corps de forme quelconque, si l'on donnait non seulement les valeurs u_e de la fonction à la surface σ de ce corps, mais aussi les valeurs correspondantes de sa dérivée, $\frac{du}{dn}$, suivant la normale infiniment petite dn qui, de l'intérieur, aboutit à chacun de ses points (a, b, c). Il suffirait de profiter de cette circonstance, que l'on connaît une fonction particulière simple à paramètre Δ_2 nul, savoir, l'inverse $\frac{1}{r}$ de la distance

$$r = \sqrt{(x-X)^2 + (y-Y)^2 + (z-Z)^2}$$

des divers points (x, y, z) du corps à un point quelconque, (X, Y, Z), choisi à volonté dans son intérieur. Appelant u la

fonction inconnue cherchée, bien continue dans tout le corps, et u' la fonction particulière $\frac{1}{r}$, continue également dans le même espace, à l'exception de l'intérieur d'une sphère $\sigma' = 4\pi\varepsilon^2$ décrite, d'un rayon infiniment petit ε, autour de l'origine commune (X, Y, Z) des distances r, on considérerait ces fonctions u, u' dans l'espace ϖ où elles sont bien continues toutes les deux, savoir, l'espace compris entre la surface σ et la petite sphère σ', sur laquelle aboutiraient des normales dn' dirigées en sens contraire des rayons $r = \varepsilon$ correspondants.

186. Solution du problème pour un corps quelconque, dans l'hypothèse où l'on aurait certaines données surabondantes, relatives à sa surface. — Les deux fonctions u, u' ayant leurs paramètres Δ_2 nuls, on peut leur appliquer une formule bien connue, due à Green [1]. On aura alors, si l'on distingue les deux par-

---

[1] **Formule de Green.** — Cette formule célèbre, applicable à deux fonctions quelconques u, u' vérifiant les équations $\Delta_2 u = 0$, $\Delta_2 u' = 0$, est

$$\int_\sigma \left(u' \frac{du}{dn} - u \frac{du'}{dn}\right) d\sigma = 0,$$

où σ désigne la surface *complète* limitant tout espace ϖ dans lequel ces fonctions u, u' sont continues, et où dn représente la normale élémentaire aboutissant, de l'intérieur de l'espace ϖ, à l'élément quelconque $d\sigma$ de sa limite.

On l'obtient en observant que les deux équations

$$\Delta_2 u = 0, \qquad \Delta_2 u' = 0,$$

multipliées respectivement par u' et par $-u$, puis ajoutées, donnent la relation

$$\frac{d}{dx}\left(u' \frac{du}{dx} - u \frac{du'}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(u' \frac{du}{dy} - u \frac{du'}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(u' \frac{du}{dz} - u \frac{du'}{dz}\right) = 0.$$

Or celle-ci, multipliée par $d\varpi$ et intégrée dans l'étendue ϖ, a chacun de ses trois termes immédiatement intégrable une fois et convertible, par une méthode qui nous est familière (t. I, p. 168), en une intégrale de surface, prise sur toute la limite σ du champ ϖ. Si $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$ sont les trois cosinus directeurs des normales respectives dn, il vient ainsi

$$\int_\sigma \left[\left(u' \frac{du}{dx} - u \frac{du'}{dx}\right) \cos\alpha + \left(u' \frac{du}{dy} - u \frac{du'}{dy}\right) \cos\beta + \left(u' \frac{du}{dz} - u \frac{du'}{dz}\right) \cos\gamma\right] d\sigma = 0.$$

Or les deux expressions

$$\frac{d(u, u')}{dx} \cos\alpha + \frac{d(u, u')}{dy} \cos\beta + \frac{d(u, u')}{dz} \cos\gamma$$

ties σ, σ' de la surface limitant l'espace ϖ et aussi, par suite, les normales respectives dn, dn' à ces parties,

$$(55)\qquad \int_\sigma \left(u'\frac{du}{dn} - u\frac{du'}{dn}\right) d\sigma + \int_{\sigma'} \left(u'\frac{du}{dn'} - u\frac{du'}{dn'}\right) d\sigma' = 0,$$

c'est-à-dire, vu que $u' = \frac{1}{r}$ et, aussi, que les normales dn' sont les prolongements, changés de signe, des rayons $r = \varepsilon$ aboutissant à la petite surface σ',

$$(56)\qquad \int_\sigma \left(\frac{1}{r}\frac{du}{dn} - u\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) d\sigma = \int_{\sigma'} \left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{du}{dr} - u\frac{d\frac{1}{r}}{dr}\right) d\sigma'.$$

Or $\frac{du}{dr}$, dérivée de u le long du prolongement dr d'un rayon infiniment petit ε de la sphère σ', se confond sensiblement avec la dérivée finie de u au centre (X, Y, Z) le long du même rayon; et, comme $\int d\sigma' = 4\pi\varepsilon^2$, l'intégrale $\int_\sigma \frac{1}{\varepsilon}\frac{du}{dr} d\sigma'$ est très sensiblement le produit du facteur infiniment petit $4\pi\varepsilon$ par la moyenne des valeurs de $\frac{du}{dr}$ en (X, Y, Z), suivant toutes les droites qui en émanent, moyenne nulle à cause des valeurs égales et contraires de cette dérivée dans les sens opposés. D'autre part, la dérivée de $\frac{1}{r}$ en r est $-\frac{1}{r^2}$, c'est-à-dire $-\frac{1}{\varepsilon^2}$ à la surface σ'; et la valeur moyenne de u sur celle-ci peut évidemment être confondue avec la valeur, $u(X, Y, Z)$, de u au centre. Ainsi l'intégrale $-\int_{\sigma'} u \frac{d\frac{1}{r}}{dr} d\sigma'$ peut s'écrire simplement $4\pi u(X, Y, Z)$; et la formule (56), divisée par 4π, équivaut à

$$(57)\qquad u(X, Y, Z) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \left(\frac{1}{r}\frac{du}{dn} - u\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right) d\sigma.$$

---

ne sont autre chose que $\frac{d(u, u')}{dn}$; et la formule de Green se trouve bien démontrée.

Nous aurons à l'employer encore dans la Note finale I, où elle porte le n° 31 : les fonctions analogues à u et u' s'y appellent p et p'.

Elle exprime bien l'inconnue u, au point (X, Y, Z), en fonction des valeurs données ou censées données de u et de $\frac{du}{dn}$ à la surface du corps.

187. Solution effective pour la sphère. — Mais la solution, dans le cas présent où le corps est une sphère, peut être poussée plus loin, savoir, jusqu'à l'élimination des valeurs réellement inconnues de $\frac{du}{dn}$, en associant au point *intérieur* (X, Y, Z) son conjugué par inversion *extérieur* (X', Y', Z'), c'est-à-dire le point tel, sur le prolongement du rayon (de la sphère) passant par (X, Y, Z), que les distances respectives D et D' de ces deux points (X, Y, Z) et (X', Y', Z') au centre aient pour moyenne proportionnelle le rayon même, R, de la sphère.

Soit, en effet, r' la distance du point quelconque (x, y, z) à ce conjugué (X', Y', Z'). L'inverse $\frac{1}{r'}$ sera une fonction de (x, y, z) continue dans toute la sphère, à laquelle le centre des distances r' se trouve extérieur; et, si c'est maintenant cet inverse qu'on appelle u', la relation (55), où l'on prendra comme étendue ϖ toute la capacité de la sphère, se réduira pour lui à

$$\int_\sigma \left(u' \frac{du}{dn} - u \frac{du'}{dn}\right) d\sigma = 0,$$

donnant, par conséquent, à côté de la formule précédente (57),

$$(58) \qquad \int_\sigma \frac{1}{r'} \frac{du}{dn} d\sigma = \int_\sigma u \frac{d\frac{1}{r'}}{dn} d\sigma.$$

Or, quel que soit l'élément considéré $d\sigma$ de la sphère, ses deux distances respectives r, r' aux deux points conjugués (X, Y, Z), (X', Y', Z') sont entre elles comme la distance D de (X, Y, Z) au centre est au rayon R ([1]), et l'on a

$$\frac{1}{r'} = \frac{D}{R} \frac{1}{r};$$

([1]) Prenons, en effet, le centre de la sphère pour origine. Les coordonnées de

de sorte que l'équation (58), multipliée par $\frac{R}{D}$, devient

$$(59)\qquad \int_\sigma \frac{1}{r}\frac{du}{dn}\,d\sigma = \frac{R}{D}\int_\sigma u\frac{d\frac{1}{r'}}{dn}\,d\sigma.$$

Elle permet d'éliminer du second membre de (57) la partie où figure la dérivée inconnue $\frac{du}{dn}$. Et il vient, comme expression de u au point quelconque (X, Y, Z) de l'espace intérieur à la sphère σ, en fonction des valeurs de u sur cette sphère,

$$(60)\qquad u(X,Y,Z) = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma\left(\frac{R}{D}\frac{d\frac{1}{r'}}{dn} - \frac{d\frac{1}{r}}{dn}\right)u\,d\sigma.$$

188. Forme définitive de cette solution. — Effectuons, au second membre de (60), le calcul de la parenthèse. Et d'abord, celle-ci devient, en observant finalement que $\frac{1}{r'^3} = \frac{D^3}{R^3}\frac{1}{r^3}$ sur la sphère,

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dn} - \frac{R}{D}\frac{1}{r'^2}\frac{dr'}{dn} = \frac{1}{2r^3}\frac{d.r^2}{dn} - \frac{R}{D}\frac{1}{2r'^3}\frac{d.r'^2}{dn} = \frac{1}{2r^3}\frac{d}{dn}\left(r^2 - \frac{D^2}{R^2}r'^2\right).$$

Or, si l'on adopte le centre de la sphère comme origine des coordonnées, on aura, pour carrés des deux distances r, r' de tout

---

l'élément $d\sigma$ vérifieront la relation

$$a^2+b^2+c^2 = R^2,$$

tandis que l'on aura

$$X^2+Y^2+Z^2 = D^2,\qquad X'^2+Y'^2+Z'^2 = D'^2,\qquad DD' = R^2,$$

et aussi :

$$X' = \frac{X}{D}D' = \frac{R^2}{D^2}X,\qquad Y' = \frac{R^2}{D^2}Y,\qquad Z' = \frac{R^2}{D^2}Z;$$

$$r^2 = (X-a)^2+(Y-b)^2+(Z-c)^2 = D^2+R^2-2(aX+bY+cZ);$$

$$r'^2 = D'^2+R^2-2(aX'+bY'+cZ')$$

$$= D'^2+R^2-2\frac{R^2}{D^2}(aX+bY+cZ) = \frac{R^2}{D^2}[R^2+D^2-2(aX+bY+cZ)] = \frac{R^2}{D^2}r^2.$$

Il en résulte bien

$$r' = \frac{R}{D}r,\qquad \text{ou}\qquad \frac{r'}{r} = \frac{R}{D}\qquad \text{et}\qquad \frac{1}{r'} = \frac{D}{R}\frac{1}{r}.$$

point (x, y, z) aux deux points respectifs (X, Y, Z), (X', Y', Z'), et vu que $(X', Y', Z', D') = \frac{R^2}{D^2}(X, Y, Z, D)$,

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + D^2 - 2(Xx + Yy + Zz), \\ r'^2 &= (x - X')^2 + (y - Y')^2 + (z - Z')^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + D'^2 - 2\frac{R^2}{D^2}(Xx + Yy + Zz); \end{aligned}$$

d'où il résulte, en observant que $x^2 + y^2 + z^2$ est le carré de la distance, que j'appellerai R', du point mobile (x, y, z) au centre,

$$r^2 - \frac{D^2}{R^2} r'^2 = \frac{R^2 - D^2}{R^2}(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) = \frac{R^2 - D^2}{R^2}(R'^2 - R^2).$$

Cette expression ne varie, aux divers points (x, y, z) de chaque petite normale dn, qu'à raison de son facteur $R'^2 - R^2$, qui, le long de dn, croît de

$$2R'dR' = 2R\,dn.$$

Sa dérivée suivant dn est donc $2\frac{R^2 - D^2}{R}$. Et la formule (60) devient, en définitive,

$$(61)\qquad u(X, Y, Z) = \frac{R^2 - D^2}{4\pi R}\int_\sigma \frac{u\,d\sigma}{r^3} = \frac{R^2 - X^2 - Y^2 - Z^2}{4\pi R}\int_\sigma \frac{u\,d\sigma}{r^3},$$

où, sous le signe $\int$, r désigne les distances respectives du point intérieur quelconque (X, Y, Z), pour lequel on veut connaître la fonction u, aux divers éléments $d\sigma$ de la surface, et u les valeurs données de la fonction sur ces éléments $d\sigma$.

Telle est, pour le cas de l'échauffement de la sphère par contact, la solution due en premier lieu à Poisson, mais dont la démonstration n'a été portée qu'après lui au degré de simplicité ci-dessus (1).

189. Température moyenne des couches sphériques concentriques. — Au centre, où $D = 0$ et où $r = R$, la température, que

(1) *Voir*, par exemple, à ce sujet, le *Cours d'Analyse infinitésimale* de M. Picard, t. Ier, p. 143 à 152.

j'appellerai u_c, sera donc

(62) $$u_c = \frac{1}{4\pi R^2}\int_\sigma u\,d\sigma = \int_\sigma u\frac{d\sigma}{\sigma},$$

c'est-à-dire, comme l'avait remarqué Poisson, la moyenne arithmétique des valeurs données de u sur toute la surface. Et le raisonnement s'applique évidemment, où qu'on prenne le centre et la sphère, dans la région où u existe. Ainsi, quand une fonction, continue à l'intérieur d'un espace donné, y a son paramètre Δ_2 partout nul, cette fonction est, en chaque point, la moyenne de ses valeurs sur toute la surface de la sphère, $s = 4\pi\rho^2$, d'un rayon quelconque ρ, décrite dans l'espace considéré autour de ce point comme centre.

On l'aurait directement reconnu, en observant que la permanence supposée des températures exige l'égalité à zéro du flux total, $\int_s K\frac{du}{d\rho}ds$, entrant par unité de temps dans la sphère. On a donc $\int_s \frac{du}{d\rho}ds = 0$ ou, encore, $\int_s \frac{du}{d\rho}\frac{ds}{s} = 0$. Or, si l'on différentie en ρ la valeur moyenne, $\int_s u\frac{ds}{s}$, de u, considérée ainsi sur des sphères concentriques de plus en plus grandes, la décomposition de ces sphères en éléments ds pourra se faire par éléments proportionnels à ρ^2 ou à s, et se correspondant respectivement sur toutes ces sphères, le long des mêmes rayons ρ prolongés de plus en plus. Alors, dans chaque élément $u\frac{ds}{s}$ de la valeur moyenne, le facteur $\frac{ds}{s}$ sera invariable d'une sphère à l'autre; et, seul, le facteur u y variera avec ρ. On aura donc

(63) $$\frac{d}{d\rho}\int_s u\frac{ds}{s} = \int_s \frac{du}{d\rho}\frac{ds}{s};$$

et l'annulation du flux total entré dans chaque sphère équivaudra à celle de la dérivée en ρ de la valeur moyenne de u sur ces sphères. Ainsi cette valeur moyenne doit bien être constante, et, par suite, se confondre avec la valeur de u au centre.

190. Retour au cas d'un mur épais, c'est-à-dire d'un solide limité par une face plane et indéfini dans tous les autres sens. — Supposons enfin que notre sphère devienne, par l'hypothèse



$R = \infty$, le massif indéfini, à face plane, de notre exemple précédent (p. 41). La distance minima $R - D$ du point intérieur considéré à la surface sera l'abscisse *finie* que nous appelions x; et le facteur $\frac{R^2 - D^2}{2R}$ du second membre de (61) deviendra

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{D}{R}\right)(R - D) = R - D$$

ou x. La formule (61) se réduira donc bien à

$$u = \frac{x}{2\pi}\int_\sigma \frac{u\,d\sigma}{r^3}, \tag{64}$$

c'est-à-dire à la formule (50) (p. 43), qui a été ainsi découverte par Poisson.

VINGT-SIXIÈME LEÇON.

SUITE : ÉCHAUFFEMENT DE LA SPHÈRE PAR RAYONNEMENT.

191. Échauffement de la sphère par rayonnement; détermination de la fonction auxiliaire φ. — Supposons maintenant que notre sphère de rayon R, dont le centre a été pris pour origine des coordonnées x, y, z, soit chauffée, d'une manière permanente, non plus par contact, mais par le rayonnement, sur sa surface σ, des sources qui y maintiennent les valeurs données u_e de la température extérieure.

La condition à la surface, au lieu d'être $u = u_e$, sera, par suite,

$$(65) \qquad \frac{du}{dn} = h(u_e - u), \qquad \text{ou} \qquad u + \frac{1}{h}\frac{du}{dn} = u_e.$$

Or les normales dn aboutissant à la sphère ont comme cosinus directeurs $\frac{(x, y, z)}{R}$; et l'expression de $\frac{du}{dn}$ est

$$\frac{1}{R}\left(x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz}\right).$$

Essayons donc de prendre, comme fonction auxiliaire φ recevant à la surface les valeurs u_e données, et d'ailleurs bien continue dans tout le corps (non moins que u), l'expression

$$(66) \qquad \varphi = u + \frac{1}{hR}\left(x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz}\right),$$

qui même, au centre où $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, se réduit simplement à u, c'est-à-dire à u_c.

Il lui suffira évidemment, pour remplir le rôle qu'on lui impose. de vérifier, comme u, l'équation indéfinie du problème, savoir

$\Delta_2\varphi = 0$. Or deux différentiations successives de (66) en x donnent

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{hR}\left(x\frac{d^2u}{dx^2} + y\frac{d^2u}{dx\,dy} + z\frac{d^2u}{dx\,dz} + \frac{du}{dx}\right),$$
$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{hR}\left(x\frac{d^3u}{dx^3} + y\frac{d^3u}{dx^2\,dy} + z\frac{d^3u}{dx^2\,dz} + 2\frac{d^2u}{dx^2}\right).$$

L'on obtient de même $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$, $\frac{d^2\varphi}{dz^2}$; et la somme des trois dérivées secondes directes de φ donne, vu finalement l'équation $\Delta_2 u = 0$,

$$(67)\qquad \Delta_2\varphi = \Delta_2 u + \frac{1}{hR}\left(x\frac{d\,\Delta_2 u}{dx} + y\frac{d\,\Delta_2 u}{dy} + z\frac{d\,\Delta_2 u}{dz} + 2\Delta_2 u\right) = 0.$$

Ainsi, la fonction auxiliaire φ, ou, plus explicitement, $\varphi(x, y, z)$, satisfait précisément aux équations qui déterminaient u quand l'échauffement avait lieu par contact; et la formule (61) lui est applicable. En y substituant, d'une part, x, y, z à X, Y, Z, d'autre part, sous le signe $\int$, u_e ou $u_e(a, b, c)$ à u et

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

à r^2, il vient

$$(68)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varphi(x, y, z)\\ &\quad = \frac{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}{4\pi R}\int_\sigma \frac{u_e(a, b, c)\,d\sigma}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}\right.$$

192. Température au centre de la sphère. — Au centre, où x, y, z sont nuls, cette formule devient, vu d'ailleurs que φ s'y réduit à u_c et que $a^2 + b^2 + c^2 = R^2$,

$$(69)\qquad u_c = \frac{1}{4\pi R^2}\int_\sigma u_e\,d\sigma = \int_\sigma u_e\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

La température u_c, au centre de la sphère, est donc, suivant une importante remarque de Poisson, *la moyenne des températures extérieures permanentes u_e à la surface.* On aurait pu le déduire de cette circonstance, que, dans l'état permanent supposé, le flux total de chaleur extérieure, $\int k(u_e - u)\,d\sigma$ ou $k\int(u_e - u)\,d\sigma$, entrant par unité de temps dans la sphère, est

nul. Il en résulte $\int u\,d\sigma = \int u_e\,d\sigma$, ou

$$\int_\sigma u\frac{d\sigma}{\sigma} = \int_\sigma u_e\frac{d\sigma}{\sigma}. \tag{70}$$

Autrement dit, la moyenne des températures extérieures u_e égale la moyenne des températures internes u sous la couche superficielle; et comme on sait que cette dernière moyenne, elle-même, égale la température u_c au centre, il vient bien la relation (69).

193. Formule des températures de la sphère chauffée par rayonnement. — Pour obtenir u, nous avons enfin l'équation linéaire du premier ordre aux dérivées partielles (66), reliant u à φ maintenant connu, avec la condition (69) spéciale au centre pour déterminer, si d'autres circonstances n'y suppléaient pas, la fonction arbitraire qu'introduira l'intégration.

Imaginons qu'on chemine du point quelconque (x, y, z), dont nous appellerons ι le rayon vecteur $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, au point voisin $(x+dx, y+dy, z+dz)$ situé sur le prolongement du même rayon vecteur, ou tel, que

$$dx = \frac{x}{\iota}d\iota \qquad dy = \frac{y}{\iota}d\iota, \qquad dz = \frac{z}{\iota}d\iota.$$

La dérivée de u le long du chemin $d\iota$ suivi sera évidemment

$$\frac{du}{d\iota} = \frac{du}{dx}\frac{x}{\iota} + \frac{du}{dy}\frac{y}{\iota} + \frac{du}{dz}\frac{z}{\iota}.$$

On a donc

$$x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz} = \iota\frac{du}{d\iota}; \tag{71}$$

et l'équation (66) devient

$$\varphi = u + \frac{\iota}{h\mathrm{R}}\frac{du}{d\iota},$$

ou, plus explicitement, vu que

$$x = \iota\cos\alpha, \qquad y = \iota\cos\beta, \qquad z = \iota\cos\gamma,$$

si $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$ désignent les trois cosinus directeurs du rayon R



(de la sphère) que l'on parcourt ainsi de proche en proche,

$$(72) \qquad \iota \frac{du}{d\iota} + h\mathrm{R}u = h\mathrm{R}\varphi(\iota\cos\alpha, \iota\cos\beta, \iota\cos\gamma).$$

On voit que c'est une équation simplement différentielle, entre u et ι considérés aux divers points du rayon fixe R que définissent les trois cosinus directeurs $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$. Multipliée par $\iota^{h\mathrm{R}-1}d\iota$, elle devient

$$d(\iota^{h\mathrm{R}}u) = h\mathrm{R}\iota^{h\mathrm{R}-1}\varphi(\iota\cos\alpha, \iota\cos\beta, \iota\cos\gamma)\,d\iota.$$

Intégrons-la, à partir du centre où $\iota^{h\mathrm{R}}u$ s'annule, u n'y devenant pas infini; et, sans avoir eu besoin de faire appel à la condition spéciale (69), nous aurons, en divisant finalement par $\iota^{h\mathrm{R}}$, mais après avoir, pour plus de clarté, désigné par ρ, au second membre, la variable d'intégration,

$$(73) \qquad u = h\mathrm{R}\iota^{-h\mathrm{R}} \int_0^\iota \rho^{h\mathrm{R}-1}\varphi(\rho\cos\alpha, \rho\cos\beta, \rho\cos\gamma)\,d\rho.$$

Il est préférable de rendre constantes les limites de l'intégration, en posant, par exemple, $\rho = \iota\mu$ (d'où $d\rho = \iota\,d\mu$); cela donne

$$(74) \qquad u = h\mathrm{R} \int_0^1 \mu^{h\mathrm{R}-1}\varphi(\iota\mu\cos\alpha, \iota\mu\cos\beta, \iota\mu\cos\gamma)\,d\mu.$$

On remarquera que, pour ι infiniment petit, cette expression de u est bien finie, et qu'elle coïncide alors avec la valeur de φ; car elle devient très sensiblement

$$h\mathrm{R} \int_0^1 \mu^{h\mathrm{R}-1}\varphi(0, 0, 0)\,d\mu = \varphi(0, 0, 0).$$

L'on retombe donc sur la formule (69).

Assurons-nous maintenant que l'expression (74) de u, évidemment continue, comme φ, dans tout l'intérieur de la sphère, vérifie les deux équations du problème, qui sont l'équation indéfinie $\Delta_2 u = 0$ et la condition à la surface (65). En ce qui concerne celle-ci, la vérification résulte de l'équation même (72) équivalente à (66), ou à (65) pour $\iota = \mathrm{R}$. Quant à l'équation indéfinie en u,

la formule (67) la donne sous la forme

$$x\frac{d\Delta_2 u}{dx}+y\frac{d\Delta_2 u}{dy}+z\frac{d\Delta_2 u}{dz}+(2+h\mathrm{R})\,\Delta_2 u=0,$$

revenant à l'équation, simplement différentielle entre $\Delta_2 u$ et ι,

$$\iota\frac{d\Delta_2 u}{d\iota}+(2+h\mathrm{R})\Delta_2 u=0.$$

Or celle-ci, multipliée par $\iota^{1+h\mathrm{R}}$, devient

$$\frac{d}{d\iota}(\iota^{2+h\mathrm{R}}\,\Delta_2 u)=0.$$

Elle signifie donc que le produit $\iota^{2+h\mathrm{R}}\,\Delta_2 u$ a sa dérivée en ι nulle, c'est-à-dire même valeur le long d'un rayon quelconque qu'au centre. Mais, au centre, le paramètre Δ_2 de l'expression bien continue (74) de u n'est pas infini; et ce produit s'y annule. Donc il vient bien $\Delta_2 u=0$ comme équation indéfinie vérifiée par (74).

Portons enfin, dans cette formule (74) ainsi démontrée, l'expression (68) de φ (p. 56), devenue, avant le remplacement de ι par $\iota\mu$,

$$\frac{\mathrm{R}^2-\iota^2}{4\pi\mathrm{R}}\int_\sigma\frac{u_e\,d\sigma}{r^3}$$

et où r, troisième côté d'un triangle dont les deux autres côtés sont ι et R, aura pour carré $\mathrm{R}^2+\iota^2-2\mathrm{R}\iota\cos\theta$, θ désignant les angles que fait le rayon vecteur, ι, du point (x, y, z) considéré, avec les divers rayons R de la sphère, qui aboutissent aux éléments respectifs $d\sigma$ de la surface. On trouve ainsi la formule définitive,

$$(75)\quad u=\frac{h}{4\pi}\int_0^1(\mathrm{R}^2-\iota^2\mu^2)\,\mu^{h\mathrm{R}-1}\,d\mu\int_\sigma\frac{u_e\,d\sigma}{[\mathrm{R}^2-2\mathrm{R}\iota\mu\cos\theta+\iota^2\mu^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Elle est due à Poisson, qui l'a obtenue sous une forme et surtout d'une manière très différentes (¹).

Au centre, ou pour $\iota=0$, elle redonne bien, immédiatement, (69).

(¹) *Théorie mathematique de la chaleur*, p. 388.

194. Cas extrêmes d'une conductibilité extérieure ou infinie, ou nulle. — Si l'on fait h très grand, le facteur μ^{hR-1} sera infiniment petit et annihilera les éléments de u, sauf pour les valeurs de μ très voisines de l'unité. Il y aura lieu de poser alors $\mu = 1 - \frac{\nu}{hR}$, de manière que toutes les valeurs modérées de ν fassent μ voisin de 1 et que, par suite, les très grandes valeurs de ν n'aient pas d'influence appréciable. L'on aura

$$d\mu = -\frac{d\nu}{hR},$$

et μ^{hR-1} ou, sensiblement (μ différant peu de 1), μ^{hR}, deviendra

$$\left(1 - \frac{\nu}{hR}\right)^{hR} = e^{-\nu}.$$

La formule (75) sera donc, à la limite $h = \infty$ et en ne conservant, comme il a été dit, que les valeurs de μ voisines de l'unité,

$$(76)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{R^2 - \iota^2}{4\pi R}\int_0^\infty e^{-\nu}\,d\nu \int_\sigma \frac{u_e\,d\sigma}{(R^2 - 2R\iota\cos\theta + \iota^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{R^2 - \iota^2}{4\pi R}\int_\sigma \frac{u_e\,d\sigma}{r^3}, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire (61). Et il le fallait bien; car une conductibilité extérieure infinie implique l'échauffement par contact.

Maintenant supposons, au contraire, h infiniment petit, mais, en même temps, u_e très grand, de manière que le produit hu_e soit une fonction arbitraire finie, que nous appellerons U ou, plus explicitement, $U(a, b, c)$. Toutefois, pour que la température interne u puisse être finie, il faudra que sa valeur au centre, $\int_\sigma u_e \frac{d\sigma}{\sigma}$, le soit et que, par suite, $\int_\sigma U \frac{d\sigma}{\sigma}$ s'annule, à la limite $h = 0$. Nous admettrons donc que la fonction donnée U ait (une fois la limite atteinte), sa valeur moyenne nulle, condition qui permettra, comme on voit, d'attribuer une valeur finie quelconque à la température u_c du centre.

Alors les valeurs $h(u_e - u)$ de la dérivée $\frac{du}{dn}$ à la surface deviendront limite (hu_e), c'est-à-dire la fonction $U(a, b, c)$ considérée dans ses valeurs limites; et le problème reviendra à se donner,

sur toute la surface σ de la sphère, cette dérivée $\frac{du}{dn}$, ou le flux corrélatif entrant de chaleur $K\frac{du}{dn}$ par unités de temps et d'aire, flux dont les valeurs ou moyenne, ou totale, sont bien nulles à l'état permanent.

La formule (75), où il faudra poser $u_c = \frac{U}{h}$, pourra s'écrire identiquement, en ajoutant à l'intégrale $\int_\sigma$ l'expression $\int_\sigma \frac{u_c\, d\sigma}{R^2}$ et retranchant l'expression équivalente $\int_\sigma \frac{U\, d\sigma}{hR^2}$, valeur de cette intégrale $\int_\sigma$ pour $\mu = 0$,

$$(77)\quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{h}{4\pi}\int_0^1 (R^2 - \iota^2\mu^2)\,\mu^{hR-1}\,d\mu \int_\sigma \frac{u_c\, d\sigma}{R^2} \\ &+ \frac{1}{4\pi}\int_0^1 (R^2 - \iota^2\mu^2)\,\mu^{hR}\,\frac{d\mu}{\mu}\left[\int_\sigma \frac{U\, d\sigma}{(R^2 - 2R\iota\mu\cos\theta + \iota^2\mu^2)^{\frac{3}{2}}} - \int_\sigma \frac{U\, d\sigma}{R^2}\right]. \end{aligned} \right.$$

Actuellement, faisons tendre h vers zéro et U vers son expression finale. Le premier terme du second membre se dédouble, par la décomposition de la parenthèse en R^2 et en $-\iota^2\mu^2$. Or sa seconde partie ne donne plus rien quand h est nul, tandis que la première donne, quel que soit h, $\int_\sigma u_c \frac{d\sigma}{\sigma}$, ou u_c. Quant au dernier terme du second membre, la quantité entre crochets y devenant, en général, de l'ordre de petitesse de μ pour $\mu = 0$, l'annulation de l'exposant hR du facteur μ^{hR} n'y introduit pas d'élément infini; et comme, d'ailleurs, $\int_\sigma U\, d\sigma = 0$ à la limite, la formule (77) devient, en définitive,

$$(78)\quad u = u_c + \frac{1}{4\pi}\int_0^1 (R^2 - \iota^2\mu^2)\frac{d\mu}{\mu}\int_\sigma \frac{U\, d\sigma}{(R^2 - 2R\iota\mu\cos\theta + \iota^2\mu^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

195. Solution directe, pour le cas où les flux de chaleur à la surface sont donnés. — C'est bien le résultat qu'on obtient directement, quand on prend pour fonction auxiliaire non plus φ, que définit la relation (66) devenue illusoire par l'hypothèse $h = 0$,

mais l'expression, revenant à $h\varphi$ et que j'appellerai Φ,

$$(79)\qquad \Phi = \frac{1}{R}\left(x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + z\frac{du}{dz}\right) = \frac{\iota}{R}\frac{du}{d\iota}.$$

Celle-ci a évidemment, d'après (66) et (67), son paramètre différentiel $\Delta_2\Phi$ nul; et elle est de plus, sur toute la surface σ, identique à la fonction $\frac{du}{d\iota}$ ou $\frac{du}{dn}$, dont on connaît par hypothèse, sur cette surface, les valeurs $U(a, b, c)$.

Ainsi, la nouvelle fonction auxiliaire Φ satisfait aux équations qui détermineraient la température u, dans un échauffement par contact où l'expression de u à la surface serait $U(a, b, c)$. La formule (61) donnera donc

$$(80)\quad \Phi(x,y,z) = \frac{R^2-\iota^2}{4\pi R}\int_\sigma \frac{U\,d\sigma}{r^3} = \frac{R^2-\iota^2}{4\pi R}\int_\sigma \frac{U\,d\sigma}{(R^2-2R\iota\cos\theta+\iota^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La relation (79), qui relie u à Φ, devient maintenant entre u et ι l'équation différentielle

$$(81)\qquad \iota\frac{du}{d\iota} = R\Phi(x,y,z) = R\Phi(\iota\cos\alpha, \iota\cos\beta, \iota\cos\gamma).$$

Multipliée par $\frac{d\iota}{\iota}$ et intégrée à partir de $\iota = 0$ où u s'appelle u_c, celle-ci donne

$$(82)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= u_c + R\int_0^\iota \Phi(\rho\cos\alpha, \rho\cos\beta, \rho\cos\gamma)\frac{d\rho}{\rho} \\ &= u_c + R\int_0^1 \Phi(\iota\mu\cos\alpha, \iota\mu\cos\beta, \iota\mu\cos\gamma)\frac{d\mu}{\mu}. \end{aligned}\right.$$

On voit que l'intégrale des second ou troisième membres serait infinie, à cause du dénominateur, ρ ou μ, nul à la limite inférieure, si l'on n'avait pas $\Phi(0,0,0) = 0$, c'est-à-dire, vu (80), $\int_\sigma U\,d\sigma = 0$, ou si la fonction U donnée n'avait pas sa valeur moyenne nulle.

Mais on sait que la permanence supposée des températures exige l'annulation du flux calorifique total de chaleur extérieure à travers la surface, et qu'il en résulte justement l'égalité à zéro de la valeur moyenne de U.

En portant, dès lors, dans le troisième membre de (82), la dernière expression de Φ donnée par (80), on aura justement la formule (78).

Quant à la température u_c au centre, elle reste disponible ou indéterminée, comme compensation de l'incomplète disponibilité ou indétermination de la fonction U, qu'on n'est libre de choisir qu'avec la restriction $\int_\sigma U\,d\sigma = 0$. Et, en effet, les deux équations du problème actuel, savoir, $\Delta_2 u = 0$ dans tout l'intérieur du corps et $\frac{du}{dn} = U$ à sa surface, ne cessent pas, quand on les donne *compatibles,* d'être satisfaites malgré l'addition à u d'une constante arbitraire. Elles laissent donc complètement indéterminée la température en un point choisi à volonté dans le corps, au centre, par exemple, où elle s'appelle u_c.

VINGT-SEPTIÈME LEÇON.

PROPAGATION DE LA CHALEUR DANS UN SOLIDE HOMOGÈNE INDÉFINI, A UNE, DEUX OU TROIS DIMENSIONS (BARRE PRISMATIQUE MINCE, PLAQUE PLANE A FACES PARALLÈLES, CORPS MASSIF) : ÉQUATIONS DU PROBLÈME DANS LES CAS DE TROIS ET DE DEUX DIMENSIONS.

196. **Objet de l'étude abordée dans cette Leçon.** — Parmi les problèmes de la théorie analytique de la chaleur relatifs aux corps homogènes, mais non isotropes, l'un des plus simples et des plus intéressants est celui de la propagation de la chaleur dans leur masse à partir d'un centre, c'est-à-dire le problème de leur échauffement par une source calorifique de débit donné, n'occupant à leur intérieur qu'une région de dimensions très petites comparativement à celles de ces corps tout autour, dans les sens où ils ont une grandeur suffisante pour qu'il s'y produise de larges variations d'état physique. Le corps ainsi chauffé vers son milieu, et assez étendu dans les sens dont il s'agit pour pouvoir y être supposé indéfini, ou pour que ses extrémités gardent sensiblement leur température primitive, aura, d'ailleurs, une, deux ou trois dimensions notables, suivant que ce sera soit une barre mince, cylindrique ou prismatique, soit une plaque plane de faible épaisseur, à faces parallèles, soit, enfin, un corps massif.

Dans le cas particulier de deux dimensions, le problème devient celui qu'ont posé les classiques expériences du minéralogiste physicien de Senarmont sur la conductibilité des cristaux, étendues depuis par Jannettaz aux minéraux non cristallisés mais stratifiés, etc., et consistant à observer la forme des courbes isothermes qui se produisent, autour d'un point chauffé, sur de minces plaques planes, d'épaisseur uniforme, taillées en sens divers dans

un corps homogène. Duhamel l'avait traité, ou, du moins, ébauché, dès 1847, pour les solides à contexture symétrique ([1]); et le cas général d'une contexture quelconque a fait, en 1867, l'objet principal de ma Thèse de doctorat ([2]). Je me propose ici d'arriver, le plus simplement possible, aux résultats essentiels du problème, tant pour ce cas de deux dimensions que pour les deux autres d'une ou de trois, tout en complétant sur un point important les démonstrations de ma Thèse.

Nous aurons d'abord à rappeler ou à établir les équations aux dérivées partielles de la propagation et, ensuite, à les intégrer, dans l'hypothèse d'une source calorifique centrale d'étendue très petite.

197. Équations du problème pour un corps massif, pourvu de sources calorifiques distribuées arbitrairement dans son intérieur. — Commençons par le cas d'un corps massif pourvu, à son intérieur, de sources calorifiques donnant en (x, y, z), par unités de volume et de temps, un débit connu $S(t, x, y, z)$. Nous imaginerons que l'éther, supposé à la température constante prise pour zéro, lui communique en outre, toujours par unités de volume et de temps, une quantité de chaleur rayonnante, fonction uniquement de la température u du corps et qui variera dès lors en sens inverse de celle-ci : elle sera désignée par $-\varphi(u)$, φ étant ainsi de même signe que u et croissant avec u. Nous savons (t. I, p. 195) que l'équation indéfinie en u sera, dans ces conditions,

$$(1)\qquad C\frac{du}{dt} = a^2\frac{d^2u}{dx^2} + b^2\frac{d^2u}{dy^2} + c^2\frac{d^2u}{dz^2} - \varphi(u) + S(t, x, y, z).$$

Les relations accessoires consisteront d'ailleurs à annuler u initialement, c'est-à-dire pour $t = -\infty$, et aussi à toute époque aux distances infinies de l'origine, du moins dans les directions où il n'existera pas de source calorifique infiniment étendue.

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XXV, p. 870, 13 décembre 1847; t. XXVII, p. 129, 7 août 1848; et *Journal de l'École Polytechnique*, XXXII[e] Cahier, p. 155 à 188; 1848.

([2]) *Étude sur la propagation de la chaleur dans les milieux homogènes*, Thèse soutenue le 16 mai 1867 devant la Faculté des Sciences de Paris. Une rédaction plus condensée en a paru au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2[e] série, t. XIV; 1869.

198. Cas où les sources, dans le même corps massif, sont distribuées uniformément sur toute la longueur de droites parallèles indéfinies. — Concevons maintenant, en vue du cas des plaques planes à traiter bientôt, que les sources de chaleur, dans notre milieu à trois dimensions, soient de longueur infinie, orientées suivant des parallèles à une même droite quelconque, et, sur chacune, de débit constant par unité de longueur. En d'autres termes, et si nous prenons de nouveaux axes coordonnés, rectangles ou obliques, des x', y', z', tels que l'axe des z' ait la direction même des sources, la fonction S, exprimée au moyen des nouvelles coordonnées x', y', z', ne dépendra pas de z'; et nous pourrons l'écrire simplement $S(t, x', y')$. Par suite, toutes les couches du milieu parallèles aux $x'y'$, se trouvant dans les mêmes conditions, auront les mêmes températures; et u ne sera fonction que des trois variables t, x', y'. Adoptons alors comme plan des $x'y'$ le plan diamétral conjugué, dans l'ellipsoïde principal

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{2}$$

à l'axe des z', c'est-à-dire à la direction des sources calorifiques; et prenons nos axes des x', y' suivant deux demi-diamètres conjugués quelconques a', b' de l'intersection de l'ellipsoïde par ce plan. Le théorème de Lamé (t. I, p. 197) nous donnera identiquement, vu l'annulation des dérivées de u en z',

$$a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + b^2 \frac{d^2 u}{dy^2} + c^2 \frac{d^2 u}{dz^2} = a'^2 \frac{d^2 u}{dx'^2} + b'^2 \frac{d^2 u}{dy'^2}. \tag{3}$$

Quelle que soit, à un instant donné, la fonction u dans le plan des $x'y'$, nous savons que les deux membres de (3) exprimeront la somme des flux de conductibilité entrés, par unité de temps, dans l'unité de volume d'un élément $d\varpi$ de forme quelconque, comprenant le point (x', y', z').

199. Expression très générale et simple, pour ce cas, de la chaleur cédée par conductibilité à l'élément de volume. — Cela posé, circonscrivons à l'ellipsoïde principal (2) le cylindre ayant ses génératrices parallèles aux z', c'est-à-dire de même orientation que les sources calorifiques, et dont, par suite, la directrice dans

le plan des $x'y'$ sera l'*ellipse de contact*

$$(4)\qquad \frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=1.$$

Coupons-le par un plan quelconque passant, par exemple, à l'origine, et sur lequel nous prendrons deux axes des X' et des Y' dans les plans respectifs des $x'z'$ et des $y'z'$. Autrement dit, choisissons pour ces nouveaux axes OX' et OY' les projections *obliques*, sur le plan sécant, des axes précédents Ox' et Oy', projections qui s'effectueront, pour chaque point projeté, parallèlement aux z'. Comme toutes les droites égales et parallèles du plan des $x'y'$ ont leurs projections (même ainsi obliques) égales et parallèles, on voit, d'une part, que les points (x', y'), (X', Y') se correspondant dans ces deux plans, ou situés sur une même parallèle aux z', auront leurs coordonnées respectives x' et X', y' et Y', dans des rapports constants, savoir, dans les rapports des deux demi-diamètres a', b' de l'ellipse (4) à leurs projections obliques A', B'; d'autre part, que tous les éléments dx', dy', parallèles, dans le plan des $x'y'$, à Ox' et à Oy', auront pour projections des éléments dX' et dY' parallèles de même à OX' ou à OY', et que les rapports de dX', dY' à dx', dy' seront ceux de A', B', à a', b'. Ces diverses quantités vérifieront donc les proportions

$$(5)\qquad \frac{x'}{a'}=\frac{X'}{A'},\qquad \frac{y'}{b'}=\frac{Y'}{B'},\qquad \frac{dx'}{a'}=\frac{dX'}{A'},\qquad \frac{dy'}{b'}=\frac{dY'}{B'}.$$

Celles-ci donnent d'abord, pour la transformée de l'ellipse (4), ou pour l'intersection du cylindre par le plan sécant des $X'Y'$, la nouvelle ellipse

$$(6)\qquad \frac{X'^2}{A'^2}+\frac{Y'^2}{B'^2}=1,$$

dont les diamètres conjugués correspondent ainsi à ceux de (4); ce qui était d'ailleurs évident par la considération des demi-cordes égales, $\pm y'$ ou $\pm x'$, dans la première ellipse, et de leurs projections obliques, $\pm Y'$ ou $\pm X'$, dans la seconde.

Il en résulte aussi, pour transformer, d'un système de variables dans l'autre, les dérivées de toute fonction de point indépendante de z', ou la même tout le long d'une parallèle quelconque aux z', mais arbitrairement variable avec x' et y', ou avec X' et Y', c'est-

à-dire au passage d'une parallèle à l'autre, les formules symboliques intuitives

$$(7) \qquad a' \frac{d}{dx'} = \text{A}' \frac{d}{d\text{X}'}, \qquad b' \frac{d}{dy'} = \text{B}' \frac{d}{d\text{Y}'};$$

d'où l'on tire, notamment, l'égalité

$$(8) \qquad a'^2 \frac{d^2 u}{dx'^2} + b'^2 \frac{d^2 u}{dy'^2} = \text{A}'^2 \frac{d^2 u}{d\text{X}'^2} + \text{B}'^2 \frac{d^2 u}{d\text{Y}'^2}.$$

Et, comme A′, B′ sont deux demi-diamètres conjugués quelconques de la section du cylindre par le plan des X′Y′, on peut énoncer l'extension suivante du théorème de Lamé : *Quand, dans l'espace à trois dimensions, une fonction u de point prend même valeur tout le long de chaque droite parallèle à une direction donnée, si l'on circonscrit à l'ellipsoïde principal* (2) *le cylindre à génératrices orientées suivant cètte direction, et que, dans une section plane quelconque de ce cylindre,* A′, B′ *soient deux demi-diamètres conjugués quelconques, choisis pour axes de coordonnées* X′ *et* Y′, *le trinome* $a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + b^2 \frac{d^2 u}{dy^2} + c^2 \frac{d^2 u}{dz^2}$ *sera identiquement égal, en tout point du plan de cette section, au binome* $\text{A}'^2 \frac{d^2 u}{d\text{X}'^2} + \text{B}'^2 \frac{d^2 u}{d\text{Y}'^2}$.

En conséquence, ce binome, si u y désigne la température en (x, y, z), exprimera la somme des flux de conductibilité qui entrent, par unité de temps, dans l'unité de volume d'un élément $d\varpi$ quelconque entourant le point (X′, Y′) du plan sécant ou d'un plan parallèle.

200. Cas de sources distribuées uniformément sur toute l'étendue de plans parallèles indéfinis. — Enfin, pour préparer la solution du cas d'une barre, imaginons, dans notre milieu à trois dimensions, des sources calorifiques distribuées par couches infinies en longueur et largeur, parallèles à un plan donné passant par l'origine, avec uniformité du débit dans toute l'étendue de chaque couche. Autrement dit, si l'on choisit un nouvel axe Ox' suivant un demi-diamètre a' conjugué au plan donné dans l'ellipsoïde principal (2), et qu'on lui associe, pour fixer les idées, deux axes des y' et des z' suivant deux demi-diamètres conjugués b', c'

de la section diamétrale correspondante du même ellipsoïde, le débit S des sources, par unités de volume et de temps, sera de la forme $S(t, x')$, ou ne dépendra pas des deux coordonnées y', z'.

Par suite, la température u elle-même sera constante sur toute l'étendue de chaque plan parallèle aux $y'z'$; et, les dérivées de u en y' ou z' s'annulant, le théorème de Lamé (t. I, p. 197) donnera simplement

$$a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + b^2 \frac{d^2 u}{dy^2} + c^2 \frac{d^2 u}{dz^2} = a'^2 \frac{d^2 u}{dx'^2}. \tag{9}$$

Or, circonscrivons à l'ellipsoïde principal (2) l'ensemble de deux plans $x' = \pm a'$ parallèles aux plans des sources, et, menant, à partir de l'origine par exemple, un axe OX', d'abscisses X', suivant une direction quelconque, appelons A' la projection (oblique) du demi-diamètre a' sur cet axe, obtenue en projetant chaque point de Ox', sur OX', par la construction d'un plan parallèle aux $y'z'$ ou aux plans des sources. Deux points correspondants des deux axes Ox', OX' auront leurs abscisses respectives x', X' dans le rapport de a' à A'; et les éléments linéaires dx', dX' séparant, sur ces axes, deux plans de projection voisins, seront également entre eux comme a' est à A'. On aura donc les deux formules intuitives

$$\frac{x'}{a'} = \frac{X'}{A'}, \qquad a' \frac{d}{dx'} = A' \frac{d}{dX'}, \tag{10}$$

dont la seconde devra s'appliquer seulement aux fonctions de point constantes sur toute l'étendue de chaque plan parallèle aux $y'z'$ et ne variant dans l'espace, comme u, qu'avec l'abscisse x' ou X' du plan. Ainsi, d'une part, l'ensemble des deux plans circonscrits à l'ellipsoïde principal sera percé par l'axe des X' aux points que définit l'équation $\frac{X'^2}{A'^2} = 1$; d'autre part, on aura $a'^2 \frac{d^2 u}{dx'^2} = A'^2 \frac{d^2 u}{dX'^2}$, formule exprimant évidemment une extension du théorème de Lamé aux cas de températures ainsi distribuées par plans parallèles. Et la somme des flux de conductibilité entrant, par unité de temps, dans l'unité de volume d'un élément $d\varpi$, vaut alors simplement $A'^2 \frac{d^2 u}{dX'^2}$, expression où la dérivée seconde de u est prise dans l'élément $d\varpi$ suivant une droite parallèle à l'axe OX'.

201. Recherche de l'équation indéfinie du problème pour une plaque plane : choix de l'élément de volume permettant de former cette équation le plus simplement possible. — Nous pouvons maintenant aborder la formation de l'équation aux dérivées partielles de la température u, dans une mince plaque plane, d'une épaisseur constante 2ε, taillée suivant une orientation quelconque à l'intérieur d'un corps homogène. Nous prendrons, pour plan des XY d'un système d'axes rectangles des X, Y, Z, le *feuillet moyen* de la plaque, c'est-à-dire son feuillet équidistant des deux bases $Z = \pm \varepsilon$. De l'origine émaneront d'ailleurs les axes déjà considérés ci-dessus Ox, Oy, Oz, dirigés suivant trois demi-axes a, b, c de l'ellipsoïde principal (2) du corps.

Concevons, en outre, qu'on marque la direction constante suivant laquelle seraient orientées les génératrices des surfaces isothermes, si chaque feuillet parallèle aux bases gardait sa chaleur, ou que les courants calorifiques fussent normaux aux Z. Puis circonscrivons à l'ellipsoïde principal le cylindre dont les génératrices ont cette direction et dont l'axe, que nous appellerons Oz', serait celui que nous avons, ci-dessus (p. 66), désigné de la sorte, si, en effet, les courants circulaient dans la plaque parallèlement aux feuillets ([1]). Enfin, associons à Oz', sur le plan qui lui est conjugué dans l'ellipsoïde principal, deux axes des x' et des y', tels, que les plans des $x'z'$ et des $y'z'$ se trouvent ainsi menés suivant les deux axes de l'ellipse d'intersection du cylindre par le feuillet moyen de la plaque; et choisissons précisément ces axes de l'ellipse d'intersection, dont nous appellerons A et B les moitiés, pour axes OX et OY. Bref, ceux-ci seront les plus simples, dans leur plan, que l'on puisse prendre parmi ceux qui correspondent aux diamètres conjugués appelés tout à l'heure (p. 67) $2A'$, $2B'$, lorsque les surfaces isothermes deviennent des cylindres à génératrices orientées suivant Oz'.

Cela posé, on conçoit que l'élément naturel de volume conduisant, pour la plaque mince, à une équation des températures où n'entre pas la petite coordonnée transversale Z, soit un tronçon prismatique ou cylindrique, ayant comme bases deux éléments

---

([1]) Nous savons qu'il en est, effectivement, à peu près ainsi; mais la démonstration suivante ne dépend pas de ce fait.

égaux $d\sigma$ des deux faces de la plaque et, comme hauteur, son épaisseur 2ε. Mais le point délicat de la question sera de former une expression totale des flux entrant par la surface latérale, ou cédés au tronçon considéré par les tronçons voisins, qui ne contienne pas les dérivées de u par rapport à Z. C'est ce à quoi l'on arrivera immédiatement, quelle que soit même la rapidité relative de variation de u avec Z, en orientant les génératrices de cette surface latérale suivant la direction qu'affecteraient les courants de chaleur si les feuillets de la plaque étaient isothermes. Car, dans de telles conditions, les flux s'annulant à travers tous les éléments de la surface latérale coupés par un feuillet, dès que s'annulent, dans le feuillet, les dérivées de u en X et Y, il est clair que la dérivée de u, dans l'espace, à laquelle est proportionnel en (X, Y, Z) l'un quelconque de ces flux, se trouve être une dérivée prise dans le plan du feuillet et où, par conséquent, ne figure pas $\frac{du}{dZ}$ [1].

Taillons donc idéalement, au-dessus et au-dessous d'un élément $d\sigma$ du feuillet moyen, à coordonnées X et Y, un tronçon de base $d\sigma$ et de hauteur 2ε, ayant ses faces latérales parallèles à la direction ainsi fixée ; et découpons-le, par des plans équidistants parallèles aux Z, en feuillets égaux, de hauteur dZ. Dans le feuillet compris entre les deux plans à coordonnée transversale Z et $Z+dZ$, la chaleur totale entrée par la surface latérale, à l'époque t et durant l'unité de temps, dépendra de la manière dont u, à cette époque, varie avec X et Y dans l'un de ces plans, mais non de la manière dont u varie d'un plan à l'autre. Or nous pouvons disposer de celle-ci, c'est-à-dire du mode de variation de u avec Z dans le feuillet (et, cela, sans changer la somme de chaleur en question), de manière que les flux soient nuls sur les deux bases du feuillet, savoir, en faisant u constant le long des éléments rectilignes parallèles à Oz'.

Alors, les formules (3), (8) seront évidemment applicables au feuillet, avec cette circonstance que X', Y', A', B' deviendront X, Y, A, B; et, les flux s'annulant, dans l'hypothèse faite, sur les deux bases du feuillet, c'est la somme même à évaluer, des flux

---

[1] On peut voir du reste, à ce sujet, le Tome I, page 152.

entrés durant l'unité de temps par la surface latérale du feuillet, qui sera le produit du binome $A^2 \frac{d^2 u}{dX^2} + B^2 \frac{d^2 u}{dY^2}$ par le volume considéré $d\sigma\, dZ$ du feuillet, de quelque manière d'ailleurs que varie effectivement u avec la petite coordonnée transversale, c'est-à-dire avec Z ou z', à volonté.

202. Expression de la chaleur fournie par conductibilité à un tronçon de la plaque. — Il suffit maintenant, pour avoir la chaleur totale fournie, dans l'unité de temps, au tronçon considéré $2\varepsilon\, d\sigma$, par les tronçons voisins, de sommer cette expression

$$(11) \qquad \left(A^2 \frac{d^2 u}{dX^2} + B^2 \frac{d^2 u}{dY^2}\right) dZ\, d\sigma.$$

en passant du feuillet inférieur aux autres, c'est-à-dire de $Z = -\varepsilon$ à $Z = \varepsilon$, sans sortir du tronçon, c'est-à-dire le long de parallèles aux génératrices de la surface latérale. Appelons U la température moyenne le long d'une telle parallèle, moyenne que nous écrirons simplement

$$U = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u \frac{dZ}{2\varepsilon},$$

mais en nous souvenant qu'à chaque *niveau* Z, les variables X et Y, dans l'expression de u, y excéderont de quantités constantes, proportionnelles à Z, les coordonnées de ce nom considérées dans le feuillet moyen $Z = 0$. Cette expression de U, fonction du temps et des coordonnées X, Y du point du feuillet moyen où la parallèle considérée perce ce feuillet, aura évidemment, pour dérivées secondes directes en X et Y, $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d^2 u}{(dX^2, dY^2)} \frac{dZ}{2\varepsilon}$, s'il est entendu que, sous le signe $\int$, X et Y sont encore accrues, dans les expressions des dérivées secondes de u, des mêmes quantités constantes à chaque niveau Z, ou que l'intégration en Z se fait le long d'obliques au plan XOY, parallèles aux génératrices de la surface latérale des tronçons. Et l'expression (11), intégrée de $Z = -\varepsilon$ à $Z = \varepsilon$, donnera

$$(12) \qquad \left(A^2 \frac{d^2 U}{dX^2} + B^2 \frac{d^2 U}{dY^2}\right) (2\varepsilon\, d\sigma).$$

Telle sera donc la somme des flux cédés durant l'unité de temps au tronçon oblique $2\varepsilon\, d\sigma$ par les tronçons voisins.

203. Expression de la chaleur fournie par rayonnement ou par convection au même tronçon. — Il faudra y joindre, d'abord, les deux flux fournis, à travers les bases $d\sigma$, par l'atmosphère ou l'éther ambiants, flux égalant, chacun, le produit de l'aire $d\sigma$, du coefficient de conductibilité superficielle, que nous appellerons k pour l'une des deux bases, k' pour l'autre, enfin, de l'excédent de la température extérieure sur la température interne de la face $d\sigma$ considérée. Cette température interne ne différera jamais sensiblement de U.

Quant à la température extérieure, supposée uniforme et invariable sur chaque face, elle sera prise comme zéro des températures, lorsqu'elle aura la même valeur des deux côtés. Dans le cas contraire, nous la désignerons par u_e sur une des faces, par u'_e sur l'autre, en admettant alors la constance du rapport $\frac{k'}{k}$ et adoptant comme zéro une température, intermédiaire entre u_e et u'_e, telle, que l'on ait

$$k\,u_e + k'\,u'_e = 0, \tag{13}$$

c'est-à-dire, par exemple, la moyenne des deux, si la conductibilité extérieure est la même pour les deux faces. Mais il n'en était pas ainsi dans les expériences faites par de Senarmont, où la plaque, placée horizontalement, était couverte, sur la face supérieure seule, d'une mince couche de cire : celle-ci, d'ailleurs, à mesure qu'elle fondait aux endroits chauffés, se retirait, par capillarité, du moins sur la plupart des plaques, vers les parties froides, à la limite desquelles elle dessinait alors un bourrelet indéfiniment persistant après l'expérience. Il est vrai que u_e et u'_e n'y différaient pas d'une manière sensible; de sorte qu'on pouvait y annuler à la fois ces deux températures extérieures.

Les deux flux entrés par les bases seront donc, dans l'unité de temps, $k(u_e - \mathrm{U})d\sigma$, $k'(u'_e - \mathrm{U})d\sigma$, c'est-à-dire, en tout, vu (13),

$$-(k + k')\,\mathrm{U}\,d\sigma.$$

Ajoutons-y encore, si le corps est diathermane, la chaleur

rayonnante prise directement par la matière du tronçon à l'éther qui la pénètre, chaleur que nous supposerons de la forme simple $-\mathrm{LU}$ par unité de volume ou $-2\mathrm{LU}\varepsilon\, d\sigma$ pour tout le tronçon; et, posant

$$(14) \qquad \varphi(\mathrm{U}) = \left(\frac{k+k'}{2\varepsilon} + \mathrm{L}\right)\mathrm{U},$$

nous aurons, pour la chaleur fournie au tronçon tant par rayonnement que par conductibilité,

$$(15) \qquad \left[\mathrm{A}^2\frac{d^2\mathrm{U}}{d\mathrm{X}^2} + \mathrm{B}^2\frac{d^2\mathrm{U}}{d\mathrm{Y}^2} - \varphi(\mathrm{U})\right](2\varepsilon\, d\sigma).$$

La fonction $\varphi(\mathrm{U})$ y a, comme on voit, le signe de U. Elle aurait été, d'après son expression (14), à fort peu près linéaire dans les expériences faites par de Senarmont, sans la couche de cire couvrant la face supérieure. Mais le changement d'état de cette couche autour des sources de chaleur donnait sans doute lieu à une notable variation de la conductibilité correspondante k. Donc $\varphi(\mathrm{U})$ était bien, alors, une certaine fonction de U seul, mais une fonction non linéaire.

Et le retrait de la cire, sur les plaques où il avait lieu, devait, une fois la température de fusion produite, réduire rapidement le coefficient k concernant la face supérieure à sa valeur k' relative à l'autre face : ce qui compliquait encore la formule de $\varphi(\mathrm{U})$ [1].

---

[1] **Existence de cas divers où le flux émis par la surface d'un corps n'est pas fonction linéaire de l'excédent de température de ce corps.** — Ce n'est pas seulement à raison du changement d'état de la couche superficielle d'un corps, qu'il peut y avoir lieu de prendre, pour exprimer la chaleur émise dans l'unité de temps par l'unité d'aire de cette couche, une fonction non linéaire de la température U en excédent du corps, même quand celle-ci n'est pas supposée varier dans un très grand intervalle. C'est aussi, dans une assez large mesure, à raison des courants de convection formés par l'air ambiant et reconnus, depuis les célèbres expériences de Dulong et Petit, refroidissants plus que proportionnellement à la température même U, savoir, proportionnellement à $\mathrm{U}^{1,233}$ environ, quand l'excédent U est un peu grand. Les expériences de Fourier, dont il a été question plus haut (t. I, p. 273), ont prouvé le même fait, pour les valeurs de U qui excédaient 25° à peu près. Or, au contraire, les coefficients de conductibilité intérieure paraissent rester constants entre des limites de variation de U beaucoup plus écartées; en sorte qu'il y a lieu de conserver aux flux intérieurs et à l'équation indéfinie des températures leurs formes linéaires simples,

204. Équation indéfinie des températures de la plaque. — Pour les tronçons dépourvus de sources calorifiques, la chaleur qu'ils

---

longtemps après que le flux superficiel et la condition à une surface libre ont perdu les leurs.

Malheureusement, la nouvelle expression qu'il faudrait attribuer au flux superficiel est sans doute très complexe; car elle dépend de toutes les circonstances influant sur les courants de convection, comme sont, notamment, la forme et les dimensions du corps, à des distances sensibles de l'élément $d\sigma$ de surface considéré, dans la région d'où viennent les courants, les excédents de température provoquant à cet endroit leur formation, généralement distincts de celui, U, qui existe sous l'élément $d\sigma$, les excédents analogues qui, en chemin, accélèrent le mouvement des filets fluides ou modifient sa direction, et qui, continuant d'ailleurs à les chauffer, les rendent moins propres à refroidir ultérieurement le corps, sur la suite de leur parcours, etc. Nous aborderons dans la dernière Leçon du Volume (la XXXVe) les plus simples de ces questions : ce qui permettra d'apprécier leur extrême difficulté. On ne peut guère espérer y dégager quelque loi qu'en se plaçant dans des conditions *homologues*, où l'on fera varier tous les éléments du problème *proportionnellement* à certains d'entre eux. C'est, à part un cas simple, mais très important, ce que nous devrons nous borner à faire dans la XXXVe Leçon annoncée ici.

En s'en tenant à ces quelques indications théoriques et aux données de l'expérience, la principale loi de Dulong et Petit sur le pouvoir refroidissant des gaz conduirait à prendre proportionnelle à $U^{1,233}$ la partie du flux émis due à la présence de l'air, mais avec un coefficient de proportionnalité qu'il faudrait, malheureusement, faire varier avec la situation de l'élément considéré $d\sigma$ à la surface du corps, et qu'il serait presque impossible de déterminer soit par la théorie, soit par l'observation.

Quant à l'autre partie, due au rayonnement, elle admettrait, si du moins l'excédent U reste modéré, la forme linéaire $k\,(u - u_e)$, c'est-à-dire kU, avec un coefficient k largement fonction, comme on a vu (t. I, p. 172 et 263), de l'état tant géométrique que physique de la surface, mais fonction aussi de la température absolue T de l'éther imprégnant la masse gazeuse. Si l'excédent U était comparable à T, cette expression kU devrait être remplacée par celle de Dulong et Petit, de la forme $A[e^{0,0077(\tau+\upsilon)} - e^{0,0077\tau}]$, ou mieux par celle de Stéfan, de la forme $B[(T+U)^4 - T^4]$ et vérifiée dans une étendue encore plus grande des variations de T et de U. Ces formules se réduisent bien à kU, lorsque l'excédent U devient petit par rapport à T; et la conductibilité extérieure k est, alors, $0{,}0077\,A e^{0,0077\,\tau}$, quand on emploie la première, $4BT^3$, quand on emploie la seconde. Les logarithmes naturels de ces deux expressions de k ont respectivement, pour dérivée en T, 0,0077 et $\frac{3}{T}$, c'est-à-dire même dérivée quand $T = 390°$ environ, ou $390° - 273° = 117°$ au-dessus de la température de fusion de la glace. A cette température absolue de 390°, les deux expressions de k varient donc, avec T, proportionnellement l'une à l'autre; et elles y sont en *concordance continue*, pourvu qu'on choisisse le rapport $\frac{B}{A}$ de manière à les rendre alors égales.

Quand les valeurs de U restent modérées, on est donc conduit à prendre, pour le flux émis par l'unité d'aire d'une surface libre (sur laquelle ne souffle aucun

acquièrent par unité de temps a donc l'expression (15); et celle-ci égale dès lors l'accroissement correspondant, ou la dérivée en t,

---

vent général), la somme de deux termes, l'un, en U, l'autre, en $U^{1,233}$ ou, plus généralement, en $U^{1+2\varepsilon}$, avec ε de l'ordre de 0,1; et ce flux a son expression de la forme $kU(1+k'U^{2\varepsilon})$. Pour plus de simplicité, faisons constants non seulement ε, mais aussi k et k', d'ailleurs positifs comme ε.

Soit alors un corps de volume ϖ, de surface σ et à température sensiblement uniforme U, ou dont la chaleur en excès est $C\varpi U$ et donne par unité de temps le flux total $-C\varpi\frac{dU}{dt}$. Ce flux y ayant la valeur $k\sigma U(1+k'U^{2\varepsilon})$, le rapport, $-\frac{1}{U}\frac{dU}{dt}$, de la vitesse du refroidissement à l'excès U de température, sera $\frac{k\sigma}{C\varpi}(1+k'U^{2\varepsilon})$: conformément aux expériences de Fourier (t. I, p. 273), il décroît avec l'excès U et n'est sensiblement constant que pour d'assez petites valeurs de U.

Si l'on cherche, par exemple, ce que devient, dans ces conditions, le problème très simple de l'état permanent d'une armille, l'équation différentielle (α) de ce problème (même t. I, p. 260) prend la forme, en remettant désormais u au lieu de U,

$$(\alpha_1) \qquad \frac{d^2u}{dx^2}=hu(1+k'u^{2\varepsilon}).$$

Évaluons le rapport $\frac{u_1+u_{-1}}{2u}$ considéré spécialement par Fourier [t. I, p. 261, form. (β)], en nous bornant au cas d'intervalles δ assez petits. L'expression approchée, bien connue, de la dérivée $\frac{d^2u}{dx^2}$, par le moyen d'une différence seconde, donnera

$$\frac{u_1+u_{-1}-2u}{\delta^2}=\frac{d^2u}{dx^2},$$

ou bien, vu (α_1) et en isolant le rapport cherché,

$$\frac{u_1+u_{-1}}{2u}=1+\frac{(\delta\sqrt{h})^2}{1.2}(1+k'u^{2\varepsilon})=(\text{sensiblement})\ \text{coh}\left[\delta\sqrt{h(1+k'u^{2\varepsilon})}\right].$$

On voit qu'il croît avec u et ne se réduit à la constante $\text{coh}(\delta\sqrt{h})$ que lorsque l'excès u est assez petit.

Cherchons enfin ce que devient la loi de Lambert, pour une barre prismatique s'étendant, le long de l'axe des x, depuis l'origine $x=0$ jusqu'à $x=\infty$, et ayant son extrémité $x=0$ chauffée à une température en excès donnée u_0.

L'équation (α_1), multiplié par $2\frac{du}{dx}dx$, puis intégrée de manière que u et sa dérivée négative s'annulent à l'infini, donne, en divisant finalement par u^2,

$$\frac{1}{u^2}\frac{du^2}{dx^2}=h\left(1+\frac{k'}{1+\varepsilon}u^{2\varepsilon}\right), \qquad \text{ou} \qquad -\frac{1}{u}\frac{du}{dx}=\sqrt{h\left(1+\frac{k'}{1+\varepsilon}u^{2\varepsilon}\right)}.$$

Le rapport, à l'excès u, de sa *pente* $-\frac{du}{dx}$, décroît donc avec u, un peu comme

de leur chaleur totale, qui est, à une constante près,

$$\int C u \, d\varpi = \int C u (d\sigma \, dZ) = C \, d\sigma \int u \, dZ = CU(2\varepsilon \, d\sigma).$$

Mais, pour les tronçons ayant à leur intérieur une source calorifique, d'un débit donné $S(t, X, Y)$ par unité de leur volume, il faudra ajouter enfin à (15) le terme $S(t, X, Y)(2\varepsilon \, d\sigma)$, avant d'égaler le tout à cette dérivée $C\frac{dU}{dt}(2\varepsilon \, d\sigma)$ de la chaleur du tronçon. Et l'on aura ainsi l'équation aux dérivées partielles cherchée, régissant les températures moyennes U de la plaque le long des petites droites qui la traversent parallèlement aux génératrices des tronçons, savoir :

$$(16) \qquad C\frac{dU}{dt} = A^2\frac{d^2U}{dX^2} + B^2\frac{d^2U}{dY^2} - \varphi(U) + S(t, X, Y).$$

Grâce à l'emploi de tronçons ainsi orientés (suivant les courants de chaleur qui traverseraient la plaque si ses feuillets étaient isothermes), la démonstration s'applique directement, comme on voit, même au cas exceptionnel où, les dérivées de U en X et Y s'annulant, les courants s'éloignent notablement du parallélisme aux faces de la plaque : ce qui met en défaut l'autre démonstration égale-

---

décroissait, dans un corps se refroidissant, le rapport de sa vitesse de refroidissement $-\frac{du}{dt}$ à son excès actuel u de température; mais la loi est, ici, plus compliquée.

L'expression finie de u ne sera simple que si l'on peut négliger, sous le radical, soit le terme variable, de manière à retomber sur la loi de Lambert, soit le terme constant. Et, dans ce second cas, il viendra la formule

$$\frac{1}{u^\varepsilon} - \frac{1}{u_0^\varepsilon} = \varepsilon x \sqrt{\frac{hk'}{1+\varepsilon}}.$$

Dans le cas, analogue, où l'expression du flux $-C\varpi\frac{du}{dt}$ émis par un corps se refroidissant serait $kk'\sigma u^{1+2\varepsilon}$, l'on trouverait, comme formule finie du refroidissement,

$$\frac{1}{u^{2\varepsilon}} - \frac{1}{u_0^{2\varepsilon}} = 2\varepsilon t \frac{kk'\sigma}{C\varpi}.$$

ment indiquée dans la Xe Leçon (t. I, p. 157). Mais, ici, où U s'annulera partout initialement, et même toujours aux distances infinies de l'origine, sans que l'atmosphère entourant la plaque s'échauffe ou se refroidisse, ce cas exceptionnel ne se présentera pas.

VINGT-HUITIÈME LEÇON.

SUITE : CONDUCTIBILITÉS PRINCIPALES D'UNE PLAQUE ; ÉQUATION DU PROBLÈME DANS LE CAS D'UNE SEULE DIMENSION NOTABLE.

---

205. **Direction et grandeur des conductibilités principales de la plaque.** — L'équation indéfinie (16) du problème posé a donc, dans le cas d'une plaque, la même forme (1) (p. 65) que dans celui d'un corps massif, à cela près que x, y, z, u, a, b, c sont maintenant remplacés par X, Y, U, A, B, et que la fonction φ, donnée par (14), est tout autre. Mais il reste à déterminer les directions OX, OY et les coefficients A, B, c'est-à-dire les sens et les grandeurs des deux *conductibilités principales* A^2, B^2 de la plaque, lorsqu'on donne l'orientation de celle-ci par rapport à l'ellipsoïde principal (2) (p. 66) du corps massif d'où la plaque a été extraite.

Nous connaissons, il est vrai, une ellipse ayant précisément ses demi-axes A, B orientés suivant les deux conductibilités cherchées et égaux aux racines carrées de leurs grandeurs : c'est l'intersection, par le feuillet moyen de la plaque, du cylindre circonscrit à l'ellipsoïde principal, avec génératrices isothermes quand les courants de chaleur sont parallèles au feuillet moyen. Mais un tel cylindre est essentiellement changeant avec la direction de la plaque; et il y a lieu de construire, à sa place, un ellipsoïde *de forme et d'orientation invariables,* capable, s'il est possible, de contenir cette ellipse représentative des conductibilités A^2, B^2 de la plaque.

A cet effet, soient λ, μ, ν les trois cosinus directeurs de la normale à la plaque, par rapport aux axes des x, y, z, qui sont ceux de l'ellipsoïde principal (2); et, pour fixer les idées, supposons cette normale menée du côté qui fait un angle aigu avec l'*axe d'asymétrie* MC du corps (*fig.* 13, t. I, p. 141) dont les cosinus

directeurs analogues ont les rapports mutuels et les signes de $a^2\mathfrak{D}$, $b^2\mathfrak{E}$, $c^2\mathfrak{F}$. Les courants de chaleur, dont les propres cosinus directeurs sont entre eux comme les trois flux principaux F_x, F_y, F_z, seront parallèles aux feuillets de la plaque, quand on aura la condition de perpendicularité $\lambda F_x + \mu F_y + \nu F_z = 0$, c'est-à-dire, d'après les formules (57) (t. I, p. 130),

$$\lambda\left(a^2\frac{du}{dx} - \mathfrak{F}\frac{du}{dy} + \mathfrak{E}\frac{du}{dz}\right) + \mu\left(b^2\frac{du}{dy} - \mathfrak{D}\frac{du}{dz} + \mathfrak{F}\frac{du}{dx}\right) + \nu\left(c^2\frac{du}{dz} - \mathfrak{E}\frac{du}{dx} + \mathfrak{D}\frac{du}{dy}\right) = 0.$$

ou bien

$$(a^2\lambda + \mathfrak{F}\mu - \mathfrak{E}\nu)\frac{du}{dx} + (b^2\mu + \mathfrak{D}\nu - \mathfrak{F}\lambda)\frac{du}{dy} + (c^2\nu + \mathfrak{E}\lambda - \mathfrak{D}\mu)\frac{du}{dz} = 0.$$

C'est dire que la direction, Oz', des éléments rectilignes toujours isothermes pour ces courants, ou, par suite, la direction des génératrices du cylindre qu'on doit circonscrire à l'ellipsoïde principal (2) (p. 66), est définie par trois cosinus proportionnels aux coefficients

$$(17)\qquad a^2\lambda + \mathfrak{F}\mu - \mathfrak{E}\nu,\quad b^2\mu + \mathfrak{D}\nu - \mathfrak{F}\lambda,\quad c^2\nu + \mathfrak{E}\lambda - \mathfrak{D}\mu.$$

206. Cylindre portant l'ellipse indicatrice de ces conductibilités principales. — Si donc x, y, z désignent les coordonnées courantes d'une génératrice quelconque du cylindre, et x_0, y_0, z_0 celles de son point de contact avec l'ellipsoïde, les équations de la génératrice seront

$$(18)\qquad \frac{x - x_0}{a^2\lambda + \mathfrak{F}\mu - \mathfrak{E}\nu} = \frac{y - y_0}{b^2\mu + \mathfrak{D}\nu - \mathfrak{F}\lambda} = \frac{z - z_0}{c^2\nu + \mathfrak{E}\lambda - \mathfrak{D}\mu}.$$

De plus, la génératrice appartenant au plan tangent de l'ellipsoïde en (x_0, y_0, z_0), l'on aura

$$(19)\qquad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1,\qquad \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1,$$

équations qui, retranchées l'une de l'autre, donnent, en vertu de (18),

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{x_0}{a^2}(a^2\lambda + \mathfrak{F}\mu - \mathfrak{E}\nu) + \frac{y_0}{b^2}(b^2\mu + \mathfrak{D}\nu - \mathfrak{F}\lambda) \\ &\qquad + \frac{z_0}{c^2}(c^2\nu + \mathfrak{E}\lambda - \mathfrak{D}\mu) = 0. \end{aligned}\right.$$

Pour avoir l'équation du cylindre, éliminons x_0, y_0, z_0 entre (18) et (19). A cet effet, ajoutons terme à terme les trois rapports égaux (18), après les avoir multipliés *haut et bas* soit par $\frac{x}{a^2}$, $\frac{y}{b^2}$, $\frac{z}{c^2}$, soit par les produits des expressions (17) et de $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$. En tenant compte, dans les résultats, de (19) et (20), il suffira d'égaler les deux nouveaux rapports ainsi obtenus pour avoir, par l'évanouissement des dénominateurs, l'équation cherchée du cylindre :

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\\ &\quad\times\left[\left(a\lambda+\frac{\mathfrak{F}\mu-\mathcal{E}\nu}{a}\right)^2\right.\\ &\qquad\left.+\left(b\mu+\frac{\mathfrak{D}\nu-\mathfrak{F}\lambda}{b}\right)^2+\left(c\nu+\frac{\mathcal{E}\lambda-\mathfrak{D}\mu}{c}\right)^2\right]\\ &=\left[\left(\lambda+\frac{\mathfrak{F}\mu-\mathcal{E}\nu}{a^2}\right)x\right.\\ &\qquad\left.+\left(\mu+\frac{\mathfrak{D}\nu-\mathfrak{F}\lambda}{b^2}\right)y+\left(\nu+\frac{\mathcal{E}\lambda-\mathfrak{D}\mu}{c^2}\right)z\right]^2. \end{aligned}\right.$$

207. Substitution, à ce cylindre, d'un ellipsoïde, homothétique par rapport à celui des conductibilités. — Nous ne désirons connaître ici que l'intersection de ce cylindre par le feuillet moyen de la plaque, dont l'équation est

$$(22)\qquad \lambda x+\mu y+\nu z=0.$$

Le second membre de (21) se réduit donc aux termes en $\mathfrak{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathfrak{F}$. Or, si l'on y pose, pour abréger,

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{A}&=c\mathfrak{F}.b\mu-b\mathcal{E}.c\nu,\\ \mathfrak{B}&=a\mathfrak{D}.c\nu-c\mathfrak{F}.a\lambda,\\ \mathfrak{C}&=b\mathcal{E}.a\lambda-a\mathfrak{D}.b\mu, \end{aligned}\right.$$

ces termes donnent, en tout,

$$\frac{1}{a^2b^2c^2}\left(\mathfrak{A}\frac{x}{a}+\mathfrak{B}\frac{y}{b}+\mathfrak{C}\frac{z}{c}\right)^2,$$

ou bien, en y utilisant une identité usuelle,

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{a^2 b^2 c^2}\Bigg[(\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) \\ &\qquad -\left(\mathcal{B}\frac{z}{c}-\mathcal{C}\frac{y}{b}\right)^2-\left(\mathcal{C}\frac{x}{a}-\mathcal{A}\frac{z}{c}\right)^2-\left(\mathcal{A}\frac{y}{b}-\mathcal{B}\frac{x}{a}\right)^2\Bigg]. \end{aligned} \right.$$

Mais, dans cette formule (24), l'on a, vu (23),

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2 \\ &\quad = (a^2\mathcal{D}^2+b^2\mathcal{E}^2+c^2\mathcal{F}^2)(a^2\lambda^2+b^2\mu^2+c^2\nu^2) \\ &\qquad\qquad -(a^2\mathcal{D}\lambda+b^2\mathcal{E}\mu+c^2\mathcal{F}\nu)^2, \end{aligned} \right.$$

et, d'autre part, d'après (23) et (22),

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{B}\frac{z}{c}-\mathcal{C}\frac{y}{b} &= (a\mathcal{D}.c\nu-c\mathcal{F}.a\lambda)\frac{z}{c}-(b\mathcal{E}.a\lambda-a\mathcal{D}.b\mu)\frac{y}{b} \\ &= a\mathcal{D}(\lambda x+\mu y+\nu z)-a\lambda(\mathcal{D}x+\mathcal{E}y+\mathcal{F}z) \\ &= -a\lambda(\mathcal{D}x+\mathcal{E}y+\mathcal{F}z), \end{aligned} \right.$$

avec des expressions analogues pour $\mathcal{C}\frac{x}{a}-\mathcal{A}\frac{z}{c}$, $\mathcal{A}\frac{y}{b}-\mathcal{B}\frac{x}{a}$; ce qui donne au lieu de (24), en laissant provisoirement subsister le trinome $\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2$ à la place de son expression (25),

$$(27)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2}{a^2 b^2 c^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) \\ &\quad -\frac{(a^2\lambda^2+b^2\mu^2+c^2\nu^2)(\mathcal{D}x+\mathcal{E}y+\mathcal{F}z)^2}{a^2 b^2 c^2}. \end{aligned} \right.$$

Tel sera donc le second membre de (21). Quant au premier membre, la somme de trois carrés qui constitue son second facteur, et qui n'est autre que

$$\left(a\lambda+\frac{\mathcal{A}}{abc}\right)^2+\left(b\mu+\frac{\mathcal{B}}{abc}\right)^2+\left(c\nu+\frac{\mathcal{C}}{abc}\right)^2,$$

a pour développement, vu l'annulation identique des doubles produits ajoutés que donnent les carrés des trois binomes,

$$a^2\lambda^2+b^2\mu^2+c^2\nu^2+\frac{\mathcal{A}^2+\mathcal{B}^2+\mathcal{C}^2}{a^2 b^2 c^2}.$$

L'équation (21) devient donc, en transposant au premier membre le premier terme du second, ou de (27), puis réduisant, transpo-

sant encore trois termes et divisant par $a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 + c^2\nu^2$.

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{(\mathcal{D}x + \mathcal{E}y + \mathcal{F}z)^2}{a^2 b^2 c^2} \\ &\quad = 1 + \frac{\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2}{a^2 b^2 c^2 (a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 + c^2\nu^2)}. \end{aligned}\right.$$

C'est l'équation d'un ellipsoïde concentrique et homothétique par rapport à celui des conductibilités (t. I, p. 144, form. 90). Donc l'ellipse figurative des conductibilités principales de la plaque est l'intersection du feuillet moyen par un tel ellipsoïde.

208. Construction de cet ellipsoïde et, sur la plaque donnée, de l'ellipse représentant ses deux conductibilités principales. — Pour achever de construire celui-ci (28), cherchons les points qui lui sont communs, tout à la fois, avec le feuillet moyen (22) et avec l'ellipsoïde principal (2) (p. 66). Les relations (28) et (2), retranchées l'une de l'autre, donnent, pour ces points,

$$(29)\quad (\mathcal{D}x + \mathcal{E}y + \mathcal{F}z)^2 (a^2\lambda^2 + b^2\mu^2 + c^2\nu^2) = \mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2,$$

équation de deux plans, conjugués au diamètre commun des deux ellipsoïdes principal et des conductibilités. Les deux ellipsoïdes (2) et (28) se coupent donc suivant deux ellipses égales et parallèles; ce qu'on savait déjà (t. I, p. 144). Mais cherchons seulement, sur les plans (29), ou plutôt sur les ellipses communes aux deux ellipsoïdes, leurs intersections, vérifiant notamment les équations (2) et (22), avec l'ellipse figurative que contient le plan du feuillet moyen de la plaque. Le premier membre de (29) y égalera, d'après la formule (26) et les deux autres analogues, la somme

$$\left(\mathcal{B}\frac{z}{c} - \mathcal{C}\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\mathcal{C}\frac{x}{a} - \mathcal{A}\frac{z}{c}\right)^2 + \left(\mathcal{A}\frac{y}{b} - \mathcal{B}\frac{x}{a}\right)^2,$$

c'est-à-dire

$$(\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) - \left(\mathcal{A}\frac{x}{a} + \mathcal{B}\frac{y}{b} + \mathcal{C}\frac{z}{c}\right)^2,$$

ou, plus simplement, vu (2),

$$\mathcal{A}^2 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2 - \left(\mathcal{A}\frac{x}{a} + \mathcal{B}\frac{y}{b} + \mathcal{C}\frac{z}{c}\right)^2.$$

Et l'équation (29) se trouve remplacée par celle-ci,

$$(30) \qquad \left(\mathcal{A}\frac{x}{a} + \mathcal{B}\frac{y}{b} + \mathcal{C}\frac{z}{c}\right)^2 = 0,$$

qui représente deux plans infiniment voisins passant par l'origine.

Les points communs cherchés, intersections de l'ellipse figurant les conductibilités principales de la plaque avec les deux ellipses, parallèles, communes aux ellipsoïdes (2) et (28), se réduisent donc aux deux extrémités du diamètre de la première de ces trois ellipses suivant lequel se coupent les deux plans (22) et (30). C'est dire que l'ellipse figurative des conductibilités de la plaque se trouve, sur l'ellipsoïde (28), inscrite entre les deux autres ellipses, (29), égales et parallèles. Elle leur est donc tangente : d'où il suit que son plan, feuillet moyen de la plaque, leur est également tangent; et, aussi, que ce plan, touchant ainsi les deux mêmes ellipses (29), qui appartiennent à l'ellipsoïde principal (2), coupe cet autre ellipsoïde suivant une quatrième ellipse, encore inscrite entre les deux premières, aux extrémités du même diamètre des deux ellipsoïdes.

Pour construire l'ellipse représentative des conductibilités principales de la plaque, on coupera donc *l'ellipsoïde principal par le feuillet moyen de celle-ci; puis on inscrira l'ellipse ainsi obtenue entre deux plans parallèles, conjugués au diamètre commun des deux ellipsoïdes principal et des conductibilités; enfin, suivant les deux ellipses égales d'intersection de ces plans et de l'ellipsoïde principal, on mènera l'ellipsoïde* (28), *semblable à celui des conductibilités : et c'est en coupant cet ellipsoïde* (28) *par le feuillet moyen de la plaque, qu'on aura l'ellipse cherchée, dont les demi-axes* A, B *représentent non seulement en direction, mais aussi, par leurs carrés, en grandeur, les deux conductibilités principales* A^2, B^2 *de la plaque* (1).

---

(1) Réduite au strict nécessaire en ce qui concerne l'ellipse figurative des deux conductibilités de la plaque (ellipse évidemment extérieure à l'ellipsoïde principal, comme le cylindre circonscrit qui la contient), la construction ainsi indiquée revient simplement *à marquer, sur le feuillet moyen, les deux traces de l'ellipsoïde principal et de l'ellipsoïde des conductibilités, puis, à circonscrire*

209. Lieu des ellipses figuratives ou indicatrices. — L'ellipse cherchée sera donc comprise entre les deux plans exprimés par (29), c'est-à-dire, en entier, dans la partie de l'ellipsoïde (28) qui est extérieure à l'ellipsoïde principal; et toute cette partie se trouvera occupée par les ellipses analogues, concernant les plaques d'orientation diverse qui utiliseront le même ellipsoïde (28), ou pour lesquelles le dernier terme de (28) aura la même valeur. Ce seront les plaques à cosinus directeurs λ, μ, ν tels, qu'une droite ayant les cosinus directeurs $\dfrac{(a\lambda, b\mu, c\nu)}{\sqrt{a^2\lambda^2+b^2\mu^2+c^2\nu^2}}$ soit, chez toutes, inclinée d'un angle égal θ par rapport à la droite *fixe* que définissent les cosinus directeurs $\dfrac{(a\mathcal{D}, b\mathcal{E}, c\mathcal{F})}{\sqrt{a^2\mathcal{D}^2+b^2\mathcal{E}^2+c^2\mathcal{F}^2}}$. En *effet*, l'on y aura

$$(31)\qquad \cos\theta = \frac{a^2\mathcal{D}\lambda + b^2\mathcal{E}\mu + c^2\mathcal{F}\nu}{\sqrt{a^2\mathcal{D}^2+b^2\mathcal{E}^2+c^2\mathcal{F}^2}\sqrt{a^2\lambda^2+b^2\mu^2+c^2\nu^2}};$$

et le second membre de (28) y prendra, vu (25), la valeur constante

$$(32)\qquad 1+\frac{a^2\mathcal{D}^2+b^2\mathcal{E}^2+c^2\mathcal{F}^2}{a^2b^2c^2}\sin^2\theta.$$

Les ellipses représentatives correspondantes auront évidemment comme enveloppe, sur leur ellipsoïde (28), sa double courbe d'intersection (29) avec l'ellipsoïde principal [1].

à la première une courbe concentrique aux deux et homothétique à la seconde : cette courbe est justement l'ellipse figurative.

La circonscription du cylindre à l'ellipsoïde principal entraînait, en effet, celle de l'ellipse indicatrice à la trace de cet ellipsoïde, ellipse et trace ayant toutes deux le diamètre qui leur est commun avec l'ellipse de contact.

[1] On remarquera que, si l'on considère, outre les deux droites à cosinus directeurs proportionnels respectivement à $a\lambda$, $b\mu$, $c\nu$ et à $a\mathcal{D}$, $b\mathcal{E}$, $c\mathcal{F}$, une troisième droite, ayant ses cosinus directeurs entre eux comme $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, celle-ci sera, d'après les formules (23), perpendiculaire à l'angle θ des deux premières. Alors les rapports $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$, où je suppose que x, y, z désignent les coordonnées d'un point de contact de l'ellipse figurative avec son enveloppe, seront évidemment les cosinus directeurs d'une quatrième droite, comprise, d'après (30), dans le plan des deux premières et perpendiculaire, en vertu de (22), à celle d'entre elles qui dépend de la direction de la plaque ou, ce qui revient au même, inclinée sur l'autre, qui est fixe, de l'un des deux angles $\frac{\pi}{2}\pm\theta$.

Quand $\sin\theta$ croît de o à 1, la zone de l'ellipsoïde (28) extérieure à l'ellipsoïde principal grandit sans cesse; et, d'abord réduite à l'ellipse diamétrale conjuguée à l'axe d'asymétrie, elle finit par comprendre tout l'ellipsoïde, devenu alors celui des conductibilités. Par conséquent, les ellipses représentant les conductibilités principales A^2, B^2 des plaques ont, pour lieu géométrique général, tout l'espace compris entre les deux ellipsoïdes principal et des conductibilités.

210. **Formation de l'équation indéfinie du problème pour une barre : chaleur gagnée par chaque tronçon de barre sur ses deux voisins.** — Pour former l'équation indéfinie des températures, dans le cas d'une mince barre cylindrique ou prismatique, découpée de part et d'autre du centre O de l'ellipsoïde principal (2) relatif à un corps massif homogène, nous procéderons à peu près comme dans le cas d'une plaque plane.

Nous prendrons, à partir de l'origine O, un système d'axes rectangulaires des X, Y, Z, le premier, suivant la longueur de la barre, les deux autres, parallèles à ses sections droites σ; et nous choisirons comme élément de volume un tronçon prismatique $\sigma\, dX$, de longueur dX, dont les bases seront deux sections obliques telles, que le flux traversant leurs divers éléments dépende de l'unique dérivée en X de la température u correspondante. Il suffira évidemment, pour cela, que ces sections soient dans les plans qui contiennent toujours les courants de chaleur quand les parallèles à l'axe des X sont isothermes; car alors l'annulation de $\frac{du}{dX}$ entraîne celle des flux à travers ces plans. Divisant enfin le tronçon en fibres prismatiques parallèles aux X et de longueur dX, ayant pour bases les divers éléments, à coordonnées Y, Z, des bases du tronçon, ou pour sections normales les éléments correspondants $d\sigma$ d'une section droite, nous considérerons l'une quelconque de ces fibres.

Imaginons qu'on laisse subsister les températures u existant sur son axe à l'époque t, ou la manière dont u y varie avec X, et, par suite, qu'on ne change pas la somme algébrique des flux qui pénètrent dans la fibre par les deux bases, mais qu'on modifie la manière dont u y varie avec Y et Z, de la façon qu'il faut pour y faire

mouvoir la chaleur suivant les X, ou pour qu'aucun flux n'y traverse la surface latérale. Cela aura lieu par l'égalisation des températures dans la fibre sur toute l'étendue de chaque plan appartenant à la famille de plans parallèles qui seraient isothermes pour des courants dirigés suivant les X. Si nous menons alors à l'ellipsoïde principal les deux plans tangents de la même famille, et que A désigne la distance, à l'origine O, du point où l'axe des X perce l'un d'eux, A et X seront ici ce que nous appelions A′ et X′ dans le n° 200 (p. 69), où nous considérions aussi un mode de distribution des températures par plans parallèles à deux plans tangents donnés $x' = \pm a'$ de l'ellipsoïde principal. Et la somme des flux de conductibilité, pénétrant par unité de temps dans l'unité de volume de la fibre $d\sigma\, d\mathrm{X}$, sera, comme on a vu au même endroit, $\mathrm{A}'^2 \frac{d^2 u}{d\mathrm{X}'^2}$, c'est-à-dire $\mathrm{A}^2 \frac{d^2 u}{d\mathrm{X}^2}$.

Or cette somme, qui est ainsi, pour la fibre, $\mathrm{A}^2 \frac{d^2 u}{d\mathrm{X}^2} d\sigma\, d\mathrm{X}$ par unité de temps, se trouve réduite à celle des flux entrant *effectivement* à travers les deux bases, par la manière même dont on a modifié les variations de u avec Y et Z, qui annule tout flux sur la surface latérale. Et si l'on ajoute les résultats relatifs aux diverses fibres d'un tronçon, il vient, pour la chaleur totale fournie dans l'unité de temps au tronçon par ses deux voisins, l'expression

$$\mathrm{A}^2\, d\mathrm{X} \int_\sigma \frac{d^2 u}{d\mathrm{X}^2}\, d\sigma. \tag{33}$$

Appelons U, fonction déterminée des deux variables seules t et X, la valeur moyenne de u sur la section faite, dans la barre, parallèlement aux bases du tronçon et par le point de l'axe des X (ou axe de la barre) dont l'abscisse est X. Posons, en d'autres termes,

$$\mathrm{U} = \int_\sigma u \frac{d\sigma}{\sigma}, \tag{34}$$

formule où il est ainsi entendu que, sur la fibre longitudinale de section droite $d\sigma$ et définie par deux valeurs données Y, Z des coordonnées transversales, l'abscisse excède, dans l'expression de u, d'une quantité constante (fonction linéaire de Y et Z), l'abscisse X de l'axe. Il est clair qu'on aura, sous la même réserve

à faire pour la fonction $\frac{d^2 u}{dX^2}$ sous le signe $\int$,

$$\frac{d^2 U}{dX^2} = \int_\sigma \frac{d^2 u}{dX^2} \frac{d\sigma}{\sigma};$$

en sorte que l'expression, (33), de la chaleur fournie dans l'unité de temps au tronçon à travers ses deux bases, deviendra

$$(35) \qquad A^2 \frac{d^2 U}{dX^2} \sigma \, dX.$$

Il résulte d'ailleurs d'une règle de la IXe Leçon pour la construction des courants de chaleur, que, lorsqu'un courant chemine suivant un demi-diamètre donné RM (t. I, p. 141, *fig.* 13) de l'ellipsoïde des conductibilités, la direction des surfaces isothermes est celle d'un plan tangent (en Q) à l'ellipsoïde principal et contenant une droite QR qui aboutit justement à l'extrémité R du rayon donné MR. Donc, le plan tangent à mener ici à l'ellipsoïde principal devant être isotherme pour les courants dirigés suivant OX, c'est dans le sens même de OX qu'il faut choisir le rayon MR de la *fig.* 13; et la portion A de OX comprise depuis le centre jusqu'au plan tangent ne sera autre que MR. Ainsi, *le paramètre* A, *de l'expression* (35), *égale le demi-diamètre tiré suivant la direction même de la barre, dans l'ellipsoïde des conductibilités.*

211. Chaleur cédée au tronçon par l'air ambiant et par l'éther. — Formons maintenant l'expression de la chaleur que la matière pondérable du tronçon reçoit, dans l'unité de temps, à travers la surface latérale. Si, pour la génératrice de la barre qui coupe un élément donné $d\chi$ du contour χ de la section droite, l'on appelle k et u_e, respectivement, la conductibilité superficielle et la température extérieure, *supposées constantes et invariables sur toute la longueur de la génératrice,* la chaleur entrant, durant l'unité de temps, par l'élément correspondant $d\chi \, dX$ de la surface latérale du tronçon, sera sensiblement

$$k(u_e - U) \, d\chi \, dX.$$

Or convenons de choisir l'origine des températures de manière

à avoir

$$\int_\chi k u_e \, d\chi = 0.$$

Alors la chaleur totale communiquée au tronçon par l'atmosphère ou l'éther ambiants sera

$$(36) \qquad -\left(\int_\chi k \, d\chi\right) U \, dX.$$

Ajoutons-y, si la barre est diathermane, la quantité de chaleur fournie au tronçon par l'éther qui le pénètre, quantité que nous supposerons de la forme simple $-\mathrm{LU}$ par unité de volume et qui sera $-\mathrm{LU}\sigma \, dX$ pour tout le tronçon. En posant, d'une manière analogue à (14) dans le cas de la plaque (p. 74),

$$(37) \qquad \varphi(U) = \left(\frac{1}{\sigma}\int_\chi k \, d\chi + L\right) U,$$

nous aurons en tout, par unité de temps,

$$(38) \qquad -\varphi(U)\sigma \, dX.$$

Il est clair d'ailleurs que l'expression (37) de $\varphi(U)$, sensiblement linéaire tant qu'aucune génératrice de la surface latérale ne sera recouverte d'une substance pouvant changer d'état durant le phénomène, se compliquera beaucoup, au contraire, comme il arrivait dans les plaques considérées plus haut (p. 74), si certaines parties de la surface ont reçu une couche de cire ou de toute autre matière aisément fusible et altérable pendant l'expérience, de manière à y faire dépendre de U la conductibilité superficielle k. En pareil cas, et à moins que la température extérieure u_e n'ait une valeur commune sur toutes les génératrices, le facteur $\varphi(U)$ s'accroît généralement du terme $-\frac{1}{\sigma}\int_\chi k u_e \, d\chi$, fonction de U; mais on peut toujours rendre nul $\varphi(U)$ pour $U = 0$, en choisissant convenablement le zéro des températures U, entre le maximum et le minimum de u_e [1].

[1] En effet, la chaleur, $\varphi(U)$, rayonnée par l'unité de volume du corps, s'annule à une certaine température, U, moyenne entre les diverses températures extérieures données u_e; car elle est évidemment positive quand U égale la plus haute d'entre elles, et négative quand elle égale la plus basse. Il suffira donc de prendre pour origine la température même qui annulera $\varphi(U)$.

J'aurais pu, au n° 203 (p. 74), faire une remarque analogue, relativement aux

212. Équation indéfinie des températures de la barre. — Appelons enfin $S(t, X)$ le débit donné, par unité de volume, des sources calorifiques existant dans le tronçon $\sigma\,dX$, ou

$$S(t, X)\sigma\,dX \tag{39}$$

leur débit effectif dans l'unité de temps. Ce sera évidemment la somme des trois expressions (35), (38), (39) qui évaluera l'accroissement correspondant, c'est-à-dire la dérivée en t, de la chaleur du tronçon, laquelle est, à une constante près, $(Cu)(d\sigma\,dX)$ pour une fibre et, par suite, $C\left(\int_\sigma u\,d\sigma\right)dX$, ou $CU\sigma\,dX$ d'après (34), pour tout le tronçon. Il vient donc, comme équation indéfinie des températures dans la barre,

$$C\frac{dU}{dt} = A^2\frac{d^2U}{dX^2} - \varphi(U) + S(t, X). \tag{40}$$

Notre démonstration subsiste même dans le cas exceptionnel où les fibres longitudinales seraient isothermes; ce qui donnerait aux courants de chaleur une tout autre direction que celle de l'axe de la barre et rendrait inapplicable, du moins d'une manière immédiate, l'autre démonstration également indiquée dans la Xe Leçon (t. I, p. 154).

Mais, ici où U s'annulera partout initialement, et même toujours aux distances infinies de l'origine, sans qu'aucun changement survienne dans les températures extérieures, les courants chemineront très sensiblement le long des fibres, et cette autre démonstration s'appliquera, si l'on veut. Elle aurait même l'avantage de montrer, plus intuitivement encore que la précédente, l'*identité du coefficient de conductibilité* A^2, *avec la conductibilité* K *du corps pour les courants calorifiques orientés suivant l'axe de la barre, ou avec le carré du demi-diamètre de même direction dans l'ellipsoïde des conductibilités.*

---

plaques dont les faces sont soumises à deux températures extérieures inégales et ont leurs conductibilités superficielles k, k' variables avec la température intérieure U. La fonction $\varphi(U)$ s'y accroît du terme $-\frac{1}{2\varepsilon}(ku_e + k'u'_e)$, alors dépendant de U. Mais $\varphi(U)$ s'annule encore pour $U = 0$, grâce au choix, comme zéro, d'une température convenable, intermédiaire entre u_e et u'_e.

VINGT-NEUVIÈME LEÇON.

SUITE : INTÉGRATION DES ÉQUATIONS POUR LES TROIS CAS, LORSQUE LE CORPS NE REÇOIT PLUS DE CHALEUR.

213. Réduction générale au cas d'un corps isotrope. — Quel que soit le nombre à considérer des dimensions du corps, c'est-à-dire des coordonnées x, y, z, ou X, Y, ou X, nombre suivant lequel la fonction inconnue u, ou U, est soit la température u en un point, soit sa valeur moyenne U le long d'une petite droite ou sur toute l'étendue d'un petit plan, l'équation à intégrer, (1), (16) ou (40) (p. 65, 77 et 90) rentre toujours dans le type

$$(41) \qquad C\frac{du}{dt} = a^2\frac{d^2u}{dx^2} + b^2\frac{d^2u}{dy^2} + \ldots - \varphi(u) + S(t, x, y, \ldots).$$

Remplaçons-y les variables $x, y, \ldots$ par celles, $\xi, \eta, \ldots$, déjà introduites dans la XIIe Leçon (t. I, p. 195), que définissent les formules

$$(42) \qquad \frac{x}{a} = \xi, \quad \frac{y}{b} = \eta, \ldots$$

Si Δ_2 désigne, pour abréger, l'expression symbolique

$$(43) \qquad \Delta_2 = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{d^2}{d\eta^2} + \ldots,$$

l'équation indéfinie (41) deviendra

$$(44) \qquad C\frac{du}{dt} = \Delta_2 u - \varphi(u) + S(t, a\xi, b\eta, \ldots);$$

et il s'y adjoindra les conditions, l'une initiale, l'autre définie ou aux limites

$$(45) \quad u = 0 \text{ (pour } t = -\infty), \qquad u = 0 \text{ (pour } \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \ldots} \text{ infini)}.$$

Le problème de l'échauffement du corps homogène se trouve ainsi ramené à un problème tout pareil, mais concernant un corps *isotrope,* où les coordonnées, qu'on peut supposer rectangulaires (pour fixer les idées), seraient ξ, η, ... et où les conductibilités a^2, b^2, ... vaudraient l'unité. Dans ce corps à coordonnées ξ, η, ..., le débit de chaque source (par unité de temps), qui était, dans le proposé,

$$\int \ldots \int \mathrm{S}(t, x, y, \ldots)\, dx\, dy \ldots,$$

ou

$$ab \ldots \left[\int \ldots \int \mathrm{S}(t, a\xi, b\eta, \ldots)\, d\xi\, d\eta \ldots\right],$$

avec des limites d'intégration marquées par les limites mêmes de la source, devient évidemment $\int \ldots \int \mathrm{S}(t, a\xi, b\eta, \ldots)\, d\xi\, d\eta \ldots$: il se trouve simplement divisé par le produit $ab \ldots$.

214. Problème de la dissémination et du rayonnement de la chaleur, pour un corps isotrope indéfini, à une, deux ou trois dimensions. — Nous essaierons d'abord de résoudre le problème, relatif au corps isotrope, pour le cas où les sources auraient un débit nul, sauf pendant un instant $d\theta$ compris entre deux époques infiniment voisines $t = \theta$, $t = \theta + d\theta$, durant lequel elles donneraient leurs débits effectifs, c'est-à-dire verseraient, dans chaque élément $d\xi\, d\eta$ ... du corps, la quantité de chaleur

$$dq = \mathrm{S}(\theta, a\xi, b\eta, \ldots)\, d\theta\, d\xi\, d\eta \ldots. \tag{46}$$

Nous appellerons u_0 ($\xi, \eta, \ldots$) l'accroissement instantané correspondant de la température, produit dans l'élément $d\xi\, d\eta \ldots$ du corps où sourdra ainsi cette chaleur, c'est-à-dire le quotient de dq par la *capacité* $\mathrm{C}\, d\xi\, d\eta \ldots$; ce sera donc la fonction infiniment petite

$$u_0(\xi, \eta, \ldots) = \mathrm{S}(\theta, a\xi, b\eta, \ldots)\frac{d\theta}{\mathrm{C}}. \tag{46 bis}$$

Et l'inconnue u, nulle avant l'époque $t = \theta$, ou pour $t < \theta$, sera, après cette époque, régie, vu (44), par l'équation aux déri-

vées partielles

$$(47) \qquad C\frac{du}{dt} = \Delta_2 u - \varphi(u),$$

jointe à la seconde relation générale (45) et à la condition d'état initial

$$(48) \qquad u = u_0(\xi, \eta, \ldots) \quad \text{pour} \quad t = \theta.$$

Nous aurons donc à résoudre d'abord un problème de refroidissement.

215. Refroidissement d'un tel corps, dans les hypothèses d'une matière athermane et d'une conductibilité extérieure nulle : formation d'un élément de l'intégrale. — La solution en est aisée à former quand la fonction $\varphi(u)$ se réduit à zéro, c'est-à-dire quand la chaleur se dissémine dans notre milieu indéfini, mais en gardant intégralement sa nature de chaleur de conductibilité et, par conséquent, sans se transformer en chaleur rayonnante, ou, pour rendre la même idée plus brièvement, *sans rayonner*.

Posons alors, pour plus de simplicité, $C = 1$, $t - \theta = \tau$; et, afin d'éviter toute confusion avec le cas général, appelons U ou même parfois, plus explicitement, $U(\tau, \xi, \eta, \ldots)$, l'expression de u pour les valeurs positives de τ. L'équation (47) et les relations qui s'y adjoignent seront donc :

$$(49) \qquad \frac{dU}{d\tau} = \frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{d^2U}{d\eta^2} + \ldots,$$

$$(50) \quad (\text{pour } \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \ldots} \text{ infini})\ U = 0, \qquad (\text{pour } \tau = 0)\ U = u_0(\xi, \eta, \ldots).$$

Dans le cas d'une seule coordonnée, ξ, la formule de U, comprise dans l'une, (8), de celles de la XXIe Leçon (p. 7), est, en faisant dans cette formule (8) $a = 1$ et y changeant t en τ, ξ en α, x en ξ, F en u_0,

$$(51) \quad U = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{4\tau}} u_0(\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} u_0(\xi + 2\omega\sqrt{\tau})\, d\omega.$$

On vérifie du reste, par la différentiation, que l'élément de U, sous sa première forme (51) qui le fait proportionnel à

$$\tau^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{4\tau}},$$

satisfait bien à (49), ou a sa dérivée en τ égale à sa dérivée seconde en ξ; et la dernière forme (51) de U, déduite de la précédente en posant $\alpha = \xi + 2\omega\sqrt{\tau}$, montre immédiatement que les deux conditions adjointes (50) sont également satisfaites, les valeurs données de $u_0(\xi)$ s'annulant, par hypothèse, aux deux limites $\xi = \pm\infty$.

Or on passe facilement du cas d'une seule coordonnée, ξ, au cas d'un nombre quelconque, $\xi, \eta, \ldots$, en remarquant d'abord que, si l'état initial donné, $u_0(\xi, \eta, \ldots)$, égale le produit $f(\xi)\psi(\eta)\ldots$, de fonctions dépendant, chacune, d'une seule coordonnée, la fonction U égalera aussi le produit des solutions, $F(\tau, \xi)$, $\Psi(\tau, \eta)$, ..., qui correspondraient aux états initiaux exprimés par $f(\xi)$, $\psi(\eta)$, ... En effet, les fonctions F, Ψ, ... ayant alors, d'après (49), leur dérivée en τ égale respectivement à $\frac{d^2F}{d\xi^2}$, $\frac{d^2\Psi}{d\eta^2}$, ..., un tel produit $U = F\Psi\ldots$ donnera

$$\begin{aligned}\frac{1}{U}\frac{dU}{d\tau} &= \frac{1}{F}\frac{dF}{d\tau} + \frac{1}{\Psi}\frac{d\Psi}{d\tau} + \ldots = \frac{1}{F}\frac{d^2F}{d\xi^2} + \frac{1}{\Psi}\frac{d^2\Psi}{d\eta^2} + \ldots\\ &= \frac{1}{F\Psi\ldots}\frac{d^2.F\Psi\ldots}{d\xi^2} + \frac{1}{\Psi\ldots F}\frac{d^2.\Psi\ldots F}{d\eta^2} + \ldots\\ &= \frac{1}{U}\left(\frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{d^2U}{d\eta^2} + \ldots\right),\end{aligned}$$

c'est-à-dire l'équation (49) elle-même. Et, d'ailleurs, les conditions adjointes (50) seront satisfaites identiquement ([1]).

Cela étant, prenons la fonction $u_0(\xi, \eta, \ldots)$, d'une part,

---

([1]) On remarquera qu'elles le seraient encore si, le corps étant non plus indéfini, mais rectangulaire (limité par des plans parallèles aux plans coordonnés), et en rapport, à sa surface, avec une atmosphère à la température zéro, la première condition (50) se trouvait remplacée par une autre, qui, à cette surface, c'est-à-dire pour deux valeurs constantes ou de ξ, ou de η, ..., assujettirait la dérivée correspondante $\frac{dU}{d(\xi, \eta, \ldots)}$ (suivant une normale $d\xi$, ou $d\eta$, ...) à avoir un rapport constant donné avec la température même U. Car un tel rapport $\frac{1}{U}\frac{dU}{d(\xi, \eta, \ldots)}$ n'y serait autre, vu la possibilité d'y supprimer *haut et bas* les facteurs indépendants ou de ξ, ou de η, ..., que $\frac{1}{F}\frac{dF}{d\xi}$ ou $\frac{1}{\Psi}\frac{d\Psi}{d\eta}$, ..., fractions alors égales, par hypothèse, aux valeurs voulues.

C'est, du reste, ce qu'on avait déjà observé en étudiant les refroidissements du cube et du parallélépipède (t. I, p. 279, 283, 284).

égale à sa valeur effective $u_0(\alpha, \beta, \ldots)$, dans l'élément du corps $d\xi\, d\eta \ldots = d\alpha\, d\beta \ldots$ qui se trouve compris entre les valeurs $\alpha, \beta, \ldots$ et $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, ... des coordonnées, mais, d'autre part, nulle en dehors de cet unique élément $d\alpha\, d\beta \ldots$. Alors $u_0(\xi, \eta, \ldots)$ sera bien le produit de fonctions $f(\xi)$, $\psi(\eta)$, ..., dont l'une, $f(\xi)$, s'annulera identiquement en dehors des limites $\xi = \alpha$, $\xi = \alpha + d\alpha$ et vaudra, par exemple, $u_0(\alpha, \beta, \ldots)$ entre ces limites, tandis que la seconde, $\psi(\eta)$, nulle en dehors de l'intervalle $\eta = \beta$, $\eta = \beta + d\beta$, se réduira à 1 dans cet intervalle, etc. Donc $F(\tau, \xi)$ aura, d'après le second membre de (51), l'expression

$$\frac{u_0(\alpha, \beta, \ldots)\, d\alpha}{(2\sqrt{\pi\tau})} e^{-\frac{(\xi-\alpha)^2}{4\tau}};$$

$\Psi(\tau, \eta)$ égalera, de même,

$$\frac{d\beta}{2\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{(\eta-\beta)^2}{4\tau}}, \quad \ldots;$$

et il viendra, comme valeur correspondante de $U(\tau, \xi, \eta, \ldots)$, s'il y a n coordonnées $\xi, \eta, \ldots$, le produit

$$(52) \qquad \frac{u_0(\alpha, \beta, \ldots)\, d\alpha\, d\beta \ldots}{(2\sqrt{\pi\tau})^n} e^{-\frac{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+\ldots}{4\tau}}.$$

216. Intégrale générale, pour ce cas d'un corps athermane et d'une conductibilité extérieure nulle. — Enfin, la solution générale, relative au cas où u_0 recevrait partout ses vraies valeurs, se formera naturellement par la superposition des solutions partielles, (52), correspondant aux cas élémentaires où ces vraies valeurs n'existeraient que dans un intervalle infiniment petit. Et l'on aura l'expression cherchée,

$$(53) \quad U = \frac{1}{(2\sqrt{\pi\tau})^n} \int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+\ldots}{4\tau}} u_0(\alpha, \beta, \ldots)\, d\alpha\, d\beta \ldots.$$

Reconnaissons que les solutions simples (52), ainsi formées pour des états initiaux discontinus dans l'espace, reproduisent bien, par leur addition, l'état initial donné $u_0(\xi, \eta, \ldots)$, pouvant être parfaitement continu. Il suffira, pour cela, de procéder comme on l'a fait ci-dessus (form. 51) dans le cas d'une seule coordonnée, c'est-à-dire de substituer à $\alpha, \beta, \ldots$ de nouvelles variables d'intégration ω,

ω', ..., égales aux quotients respectifs de $\alpha - \xi$, $\beta - \eta$, ... par $2\sqrt{\tau}$.

Il vient ainsi, pareillement au troisième membre de (51),

$$(54)\quad U = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n}\underbrace{\int\cdots\int}_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\omega^2+\omega'^2+\ldots)}\, u_0(\xi + 2\omega\sqrt{\tau}, \eta + 2\omega'\sqrt{\tau}, \ldots)\, d\omega\, d\omega' \ldots.$$

La fonction u_0 s'annulant, par hypothèse, pour les valeurs infinies de ses n variables ou de chacune d'elles, l'on reconnaît immédiatement que les relations adjointes (50) sont satisfaites par cette expression de U, de même que l'était déjà identiquement, par l'expression équivalente (53), l'équation indéfinie (49).

217. Tentative pour calculer le refroidissement dans les hypothèses contraires. — Essayons maintenant d'intégrer l'équation (47) du refroidissement, en restituant le terme $\varphi(u)$ dont nous faisions abstraction. Nous écrirons cette équation ainsi :

$$(55)\qquad C\frac{du}{dt} + \varphi(u) = \Delta_2 u.$$

Recourons à la nouvelle méthode, *consistant dans l'introduction d'une variable surabondante,* qui a déjà rendu accessibles deux questions importantes et difficiles de la Physique mathématique ([1]). Nous considérerons, en chaque point (ξ, η, ...) et à chaque époque t, non pas une seule valeur u, mais toute une famille de valeurs u, dépendant d'un paramètre continu τ, et qui se distingueront justement les unes des autres par ce *numéro d'ordre,* τ, propre à chacune. Ce paramètre τ sera pris variable de zéro à $+\infty$, de même que le sera le temps $t - \theta$, compté à partir du début du refroidissement; et l'on conviendra de choisir pour valeur de u correspondant à $\tau = 0$ la suite même des températures effectives.

Ayant ainsi à notre disposition une infinité de fonctions u de $t - \theta$, ξ, η... ou, ce qui revient au même, une fonction u de $t - \theta$, ξ, η, ... et de la nouvelle variable indépendante τ, nous

---

([1]) *Voir* le Tome II (*Calcul intégral, Compléments*), p. 505* et 506*, de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, et la dernière partie de la seconde Note finale du présent Volume.

essayerons de relier son mode de variation avec τ, entièrement libre, d'une part, à son mode de variation avec $\xi, \eta, \ldots$ et, d'autre part, à son mode de variation avec $t-\theta$, de telle sorte que l'équation (55) résulte d'elle-même, quel que soit τ, de la comparaison de ces deux manières de varier, c'est-à-dire des deux relations ainsi obtenues, choisies, toutes deux, *séparément intégrables*. A cet effet, prenons

$$(56)\qquad \frac{du}{d\tau}=\frac{d^2u}{d\xi^2}+\frac{d^2u}{d\eta^2}+\ldots \qquad \text{et} \qquad C\frac{du}{dt}+\varphi(u)=\frac{du}{d\tau},$$

équations entraînant évidemment, pour toutes les valeurs de τ, la proposée (55).

La première (56), identique à (49), est applicable, par hypothèse, pour toutes les valeurs positives de $t-\theta$. Elle le sera donc, en particulier, à l'instant $t=\theta$ de début du phénomène, alors que, pour $\tau=0$, u se réduit aux valeurs données $u_0(\xi, \eta, \ldots)$. Il en résulte qu'à cette époque initiale, u a, pour les valeurs positives de τ, l'expression dès lors bien déterminée (54), que nous appellerons $f(\tau, \xi, \eta, \ldots)$. Cette fonction de $n+1$ variables sera ainsi, en quelque sorte *par hypothèse* ou par choix,

$$(57)\qquad \begin{cases} f(\tau, \xi, \eta, \ldots) \\ \quad = \dfrac{1}{(\sqrt{\pi})^n}\displaystyle\int\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\omega^2+\omega'^2+\ldots)} \\ \quad \times u_0(\xi+2\omega\sqrt{\tau}, \eta+2\omega'\sqrt{\tau}, \ldots)\, d\omega\, d\omega' \ldots. \end{cases}$$

Donc, u est connu *initialement,* pour toutes les valeurs à considérer de τ et de $\xi, \eta, \ldots$. Or la seconde équation (56) relie, *sur place,* ou sans qu'on ait à faire varier $\xi, \eta, \ldots$, les deux manières dont u varie avec t et avec τ; et elle permet d'y déduire u, *à toute époque,* de ses valeurs *initiales*. Posons, en effet, pour simplifier, les formules

$$(58)\qquad \Phi(u)=e^{\int\frac{C\,du}{\varphi(u)}} \qquad \text{ou} \qquad \varphi(u)=C\frac{\Phi(u)}{\Phi'(u)},$$

la quadrature $\int\frac{C\,du}{\varphi(u)}$ étant d'ailleurs censée se faire à partir d'une limite quelconque, mais constante; et la méthode ordinaire d'intégration de l'équation du premier ordre, linéaire par rapport aux

dérivées, donnera, comme intégrale générale de la seconde (56),

$$(59) \qquad e^{t-\theta}\Phi(u) = F\left(\tau + \frac{t-\theta}{C}\right),$$

où F désigne la fonction arbitraire introduite.

Nous déterminerons celle-ci, en spécifiant l'équation (59) pour l'époque initiale $t=\theta$ où u est la fonction $f(\tau, \xi, \eta, \ldots)$. Comme cette équation (59) se réduit alors à $F(\tau) = \Phi(u)$, l'on aura

$$F(\tau) = \Phi[f(\tau, \xi, \eta, \ldots)].$$

Remplaçons-y maintenant τ par $\tau + \frac{t-\theta}{C}$, et (59) deviendra, sauf vérification ultérieure, l'intégrale cherchée de (55) :

$$(60) \qquad (\text{pour } t > \theta) \quad e^{t-\theta}\Phi(u) = \Phi\left[f\left(\tau + \frac{t-\theta}{C}, \xi, \eta, \ldots\right)\right].$$

Il suffira, pour en déduire la température, de résoudre cette équation par rapport à u, après y avoir posé $\tau = 0$, seule valeur que τ doive, d'après les conventions faites, recevoir dans les résultats définitifs.

218. Condition d'applicabilité de l'intégrale obtenue; sa vérification approximative. — Mais on n'a satisfait explicitement à la première équation (56) que pour la valeur initiale θ de t : et il faut, avant de regarder comme légitime la solution obtenue, s'assurer si cette première équation (56) se trouve vérifiée d'elle-même pour toutes les valeurs positives de $t-\theta$; car rien n'assure *a priori* que les deux relations (56) soient en général compatibles, ou que la seconde fasse changer u avec t, *sur place,* de manière à y maintenir la première indéfiniment vérifiée.

Aucune dérivée par rapport au temps $t-\theta$ ne figurant dans la première équation (56), les différentiations à faire sur (60), pour dégager les dérivées $\frac{du}{d\tau}$ et $\frac{d^2u}{(d\xi^2, d\eta^2, \ldots)}$ à porter dans cette première équation (56), laissent $t-\theta$ invariable; de sorte que u n'aura à y changer qu'avec la valeur même de la fonction f, ou sera de la forme

$$(61) \qquad u = \chi(f), \qquad \text{avec} \qquad f = f\left(\tau + \frac{t-\theta}{C}, \xi, \eta, \ldots\right).$$

Il en résulte

$$\frac{du}{d\tau} = \chi'(f)\frac{df}{d\tau} = \chi'(f)\frac{df}{d\left(\tau + \frac{t-\theta}{C}\right)},$$

$$\frac{du}{d\xi} = \chi'(f)\frac{df}{d\xi}, \qquad \frac{d^2u}{d\xi^2} = \chi'(f)\frac{d^2f}{d\xi^2} + \chi''(f)\frac{df^2}{d\xi^2}, \qquad \ldots;$$

et la première équation (56) devient

$$\left\{\begin{aligned} &\chi'(f)\frac{df}{d\left(\tau + \frac{t-\theta}{C}\right)} \\ &\quad = \chi'(f)\left(\frac{d^2f}{d\xi^2} + \frac{d^2f}{d\eta^2} + \ldots\right) + \chi''(f)\left(\frac{df^2}{d\xi^2} + \frac{df^2}{d\eta^2} + \ldots\right). \end{aligned}\right.$$

Mais la fonction f a eu sa forme (57) choisie, précisément, de manière à rendre sa dérivée, par rapport à sa première variable

$$\tau + \frac{t-\theta}{C},$$

égale identiquement à la somme de ses dérivées secondes directes par rapport aux autres variables ξ, η, ... Les termes en $\chi'(f)$ se détruisent donc; et il reste simplement

$$(62) \qquad \chi''(f)\left(\frac{df^2}{d\xi^2} + \frac{df^2}{d\eta^2} + \ldots\right) = 0.$$

Or, dans toute la théorie analytique de la chaleur, les pentes ou chutes relatives de température, d'un point à l'autre, sont supposées assez modérées pour que les flux correspondants de chaleur leur soient proportionnels; ce qui implique l'hypothèse de dérivées de u, ou de f, en ξ, η, ..., petites au point de rendre généralement négligeables leurs carrés et produits, dans les formules, à côté de termes linéaires comme étaient, ci-dessus, ceux où figurait $\chi'(f)$.

La même hypothèse a été encore admise lorsque, en formant l'équation indéfinie de la température u, on a négligé la variation, avec celle-ci u, des coefficients de conductibilité intérieure. En effet, la partie principale du second membre de l'équation indéfinie, savoir, sa partie due à la chaleur que gagne l'élément de volume considéré sur ses voisins, est, par exemple, avec les notations ordinaires, dans un corps homogène et isotrope à coefficient

de conductibilité K,

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{du}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{du}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\mathrm{K}\frac{du}{dz}\right).$$

Cette expression a pour développement

$$\mathrm{K}\Delta_2 u + \frac{d\mathrm{K}}{du}\left(\frac{du^2}{dx^2} + \frac{du^2}{dy^2} + \frac{du^2}{dz^2}\right);$$

et, comme on la réduit, avec Fourier, à $\mathrm{K}\Delta_2 u$, l'on y supprime bien trois termes non linéaires par rapport aux dérivées premières de u en x, y, z ([1]).

Aucune circonstance n'indiquant pour le facteur $\chi''(f)$, dans (62), une grandeur exceptionnelle, le premier membre de (62) est donc, à raison de son autre facteur (somme des carrés des dérivées premières de f en ξ, η, ...), de l'ordre des quantités que l'on regarde comme insignifiantes dans les problèmes; et, par suite, la première équation (56) se trouve à très peu près satisfaite.

219. Sa vérification exacte, quand la production de chaleur rayonnante est proportionnelle aux excès de température. — Voyons cependant quelle forme devrait avoir la fonction donnée $\varphi(u)$, pour que la vérification se fît en toute rigueur. La formule (62) montre qu'il faudrait pouvoir poser $\chi''(f) = 0$, ou, par conséquent, attribuer à $\chi(f)$ une expression linéaire $\mathrm{M}f + \mathrm{N}$, avec M, N fonctions seulement de $t - \theta$ et fonctions à valeurs initiales 1 et zéro respectivement (puisque $u = f$ pour $t = \theta$). Ainsi, l'équation (60) sera alors satisfaite par une telle expression

$$u = \mathrm{M}f + \mathrm{N};$$

ce qui, en faisant passer l'exponentielle dans le second membre, donnera d'une manière continue, soit quand f seul variera, soit quand ce sera $t - \theta$ (avec f alors maintenu constant),

$$\Phi(\mathrm{M}f + \mathrm{N}) = e^{\theta - t}\Phi(f). \tag{63}$$

([1]) Il paraît, toutefois, que les coefficients thermiques de conductibilité intérieure sont moins variables, avec la température, que d'autres coefficients physiques, la capacité calorifique C, par exemple. On pourrait donc motiver encore, dans une certaine mesure, par la petitesse de la dérivée $\frac{d\mathrm{K}}{du}$, la réduction de l'expression précédente à $\mathrm{K}\Delta_2 u$.

De cette relation, différentiée, d'une part, en f, d'autre part, en $t-\theta$, il résulte

$$M\Phi'(Mf+N)=e^{\theta-t}\Phi'(f), \qquad (M'f+N')\Phi'(Mf+N)=-e^{\theta-t}\Phi(f),$$

et, par suite,

$$\frac{\Phi'(f)}{\Phi(f)}=-\frac{M}{M'}\,\frac{M'}{M'f+N'}.$$

Multiplions cette dernière par df, intégrons par rapport à f et, passant des logarithmes aux nombres, appelons d'ailleurs A l'arbitraire introduite, indépendante de f. Nous aurons

$$\Phi(f)=A\left(f+\frac{N'}{M'}\right)^{-\frac{M}{M'}}.$$

Or $\Phi(f)$ est fonction de l'unique variable f; de sorte que A est indépendant de $t-\theta$ et que les rapports $\frac{M}{M'}$, $\frac{N'}{M'}$ sont des constantes $-c$, c_1. On déduit de là, d'une part, pour $\Phi(u)$, l'expression

(64) $$\Phi(u)=A(u+c_1)^c,$$

et, d'autre part, pour M et N, qui doivent devenir respectivement 1 et zéro quand $t=\theta$, les formules

(65) $$M=e^{\frac{\theta-t}{c}}, \qquad N=c_1\left(e^{\frac{\theta-t}{c}}-1\right).$$

Ces valeurs (64) et (65) de $\Phi(u)$, M, N vérifient identiquement l'équation fonctionnelle (63). Mais, d'après la seconde relation (58), elles rendent la fonction $\varphi(u)$, que nous savons devoir s'annuler avec u, égale à $\frac{C}{c}(u+c_1)$; et l'on ne peut, dès lors, s'empêcher de poser $c_1=0$.

Donc les formules (64) et (60) donneront comme expressions définitives de $\Phi(u)$ et de u, en faisant d'ailleurs $\tau=0$,

(66) $$\Phi(u)=Au^c, \qquad u=e^{\frac{\theta-t}{c}}f\left(\frac{t-\theta}{C},\xi,\eta,\ldots\right).$$

D'ailleurs, la fonction donnée $\varphi(u)$ se réduit alors, comme on a vu, d'après (58), à

(67) $$\varphi(u)=\frac{C}{c}u.$$

Elle est linéaire, rendant linéaire aussi l'équation (55) du problème.

Et l'on aurait eu bien plus simplement, dans ce cas particulier, la solution (66), en se donnant avec Fourier, comme fonction inconnue, le produit $v = u\, e^{\frac{t-\theta}{c}}$, au lieu de u; ce qui réduit cette équation (55) à la forme même,

$$\frac{dv}{d\frac{t-\theta}{C}} = \frac{d^2 v}{d\xi^2} + \frac{d^2 v}{d\eta^2} + \ldots,$$

de l'équation (49) (p. 93) intégrée plus haut, dont la solution en $\tau, \xi, \eta, \ldots$ est justement $f(\tau, \xi, \eta \ldots)$ (¹).

(¹) Pour traiter un autre cas que celui-là, voyons ce que deviendra, par exemple, l'intégrale (60), alors seulement approchée, si l'on prend $\varphi(u)$ de la forme monome essayée (p. 77) vers la fin de la note de la page 74 et suggérée par la formule de Dulong et Petit sur le pouvoir refroidissant des gaz.

Faisons donc

$$\varphi(u) = \frac{C}{c} u^{1+2\varepsilon},$$

où ε et c seront des constantes positives. La première formule (58) donnera

$$\log \Phi(u) = -\frac{c}{2\varepsilon u^{2\varepsilon}} + \text{const.},$$

et l'intégrale générale (60) deviendra ensuite, aisément,

$$\frac{1}{u^{2\varepsilon}} = 2\varepsilon \frac{t-\theta}{c} + \frac{1}{f^{2\varepsilon}}.$$

A mesure que $t-\theta$ grandit, u, d'abord égal à f, lui devient, d'après cette relation, de plus en plus inférieur (relativement), par suite de l'incessante transformation de la chaleur de conductibilité en chaleur rayonnante.

Si ε est très voisin de zéro, l'intégrale ainsi obtenue, qu'on peut écrire

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{f}\left(1 + 2\varepsilon \frac{t-\theta}{c} f^{2\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2\varepsilon}},$$

prend, à la limite, ou pour ε évanouissant, la forme

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{f}\left(1 + \frac{1}{m} \frac{t-\theta}{c}\right)^m, \qquad \text{avec } m \text{ infini.}$$

Elle devient donc $\frac{1}{u} = \frac{1}{f} e^{\frac{t-\theta}{c}}$, ou $u = e^{\frac{\theta-t}{c}} f$; et l'on retombe sur les formules (66).

TRENTIÈME LEÇON.

SUITE : INTÉGRATION DES ÉQUATIONS POUR LE PROBLÈME GÉNÉRAL DE L'ÉCHAUFFEMENT.

---

220. Retour au problème de l'échauffement : sa solution dans le cas d'une conductibilité extérieure constante. — Nous n'avons eu à étudier le refroidissement du corps (supposé rendu isotrope) que pour connaître les températures produites, à l'intérieur de celui-ci, par la chaleur émanée des sources entre les deux époques $t=\theta$ et $t=\theta+d\theta$. Cette chaleur amène instantanément les relèvements u_0 de température qu'exprime la formule (46 *bis*) (p. 92), où figure le facteur infiniment petit $d\theta$.

Si l'on avait antérieurement $u=0$, la fonction $\varphi(u)$, nulle avec u, ne devant ainsi être considérée qu'au voisinage de zéro, pourra être réduite sans erreur sensible à $\varphi'(0)u$, ou sera de la forme (67). Donc la seconde formule (66) se trouvera applicable; et l'expression de la fonction f y sera

$$F\left(\theta, \frac{t-\theta}{C}, \xi, \eta, \dots\right)\frac{d\theta}{C},$$

si, vu (57) et (46 *bis*), l'on convient d'appeler F la fonction

$$(68)\quad \begin{cases} F(\theta, \tau, \xi, \eta, \dots) \\ \displaystyle = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^i}\underbrace{\int\cdots\int}_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2+\omega'^2+\dots}\, S(\theta, a\xi+2a\omega\sqrt{\tau}, b\eta+2b\omega'\sqrt{\tau}, \dots)\, d\omega\, d\omega' \dots \end{cases}$$

Ainsi, les accroissements de température, dus à la chaleur débitée par les sources durant l'instant $d\theta$ considéré, seront

$$(69)\quad \begin{cases} (\text{pour } t<\theta)\ u=0, \\ (\text{pour } t>\theta)\ u=e^{\frac{\theta-t}{c}}\, F\left(\theta, \dfrac{t-\theta}{C}, \xi, \eta, \dots\right)\dfrac{d\theta}{C}. \end{cases}$$

Cela posé, bornons-nous au cas où l'équation indéfinie (44) du problème (p. 91) est linéaire, c'est-à-dire où $\varphi(u)$ a la forme (67), afin de pouvoir obtenir, par la superposition d'une infinité d'intégrales particulières comme (69), une nouvelle intégrale, mais formée pour une équation (44) où le terme, tout connu,

$$S(t, a\xi, b\eta, \ldots),$$

serait également la somme de ses valeurs correspondant aux diverses intégrales particulières ajoutées.

Or l'intégrale (69) a été obtenue pour le cas où les sources auraient donné leur débit de $t = \theta$ à $t = \theta + d\theta$, mais débit nul en dehors de ces limites. Il suffira donc, si l'on veut avoir l'intégrale générale, et sauf vérification ultérieure motivée par la discontinuité de forme qu'implique la solution élémentaire (69) à l'instant $t = \theta$, de superposer les solutions, analogues à (69), dans lesquelles l'élément de temps $d\theta$ prendrait toutes les *situations* entre $\theta = -\infty$ et $\theta = +\infty$. A cause de la première formule (69), qui fera évanouir de l'expression générale de u les éléments relatifs à $\theta > t$, la solution cherchée, telle qu'on peut ainsi la prévoir, sera

$$(70) \qquad u = \int_{-\infty}^{t} e^{\frac{\theta - t}{c}} F\left(\theta, \frac{t-\theta}{C}, \xi, \eta, \ldots\right) \frac{d\theta}{C}.$$

Il reste à la vérifier. Prenons sa dérivée en t par la méthode ordinaire. Nous aurons, vu la présence d'un terme relatif à la limite supérieure, t, qui est variable,

$$(71) \quad C\frac{du}{dt} = \int_{-\infty}^{t} \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{\theta-t}{c}} F\left(\theta, \frac{t-\theta}{C}, \xi, \eta, \ldots\right)\right] d\theta + F(t, 0, \xi, \eta, \ldots),$$

expression où le dernier terme, donné par la formule (68), sera $S(t, a\xi, b\eta, \ldots)$.

Les différentiations en $\xi, \eta, \ldots$ indiquées par le symbole Δ_2 se faisant sous le signe $\int$, et $\varphi(u)$ étant $\frac{C}{c}u$, l'équation à vérifier (44), si l'on y transpose au premier membre tous les termes du second, deviendra dès lors, identiquement et (en partie) symbo–

liquement,

$$(72)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{t}\left(C\frac{d}{dt}-\frac{d^2}{d\xi^2}-\frac{d^2}{d\eta^2}-\ldots+\frac{C}{c}\right)\\ &\quad\times\left[e^{\frac{\theta-t}{c}}F\left(\theta,\frac{t-\theta}{C},\xi,\eta,\ldots\right)\right]\frac{d\theta}{C}=0. \end{aligned}\right.$$

Appelons, pour abréger, τ, la variable $\frac{t-\theta}{C}$ de la fonction F, et effectuons, sous le signe $\int$, la différentiation en t qui s'y trouve indiquée : la formule (72) se réduit alors à

$$\int_{-\infty}^{t} e^{\frac{\theta-t}{c}}\left(\frac{d}{d\tau}-\frac{d^2}{d\xi^2}-\frac{d^2}{d\eta^2}-\ldots\right)F(\theta,\tau,\xi,\eta,\ldots)\frac{d\theta}{C}=0.$$

Or la fonction F, d'après la manière même, (68), dont on l'a formée, a sa dérivée en τ égale à la somme de ses dérivées secondes directes en $\xi, \eta, \ldots$. Ainsi, l'équation indéfinie (44) du problème est bien satisfaite.

On reconnaît, d'ailleurs, immédiatement que F et u s'annulent, comme S, aux distances $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\ldots}$ de l'origine infinies, et aussi quand le temps t décroît vers $-\infty$. Donc les deux conditions soit aux limites, soit d'état initial, sont également vérifiées. Et la formule (70), où la fonction F est définie par (68), constitue bien l'intégrale générale cherchée du problème de l'échauffement du corps.

221. Parité de l'échauffement d'un corps isotrope, dans toutes les directions autour d'une source élémentaire. — L'expression générale (70) de la température, dans le problème de l'échauffement de notre corps rendu isotrope, se compose donc d'une multiple infinité de termes simples, dont chacun, vu d'ailleurs les formules (68), (54), (53) et (46 *bis*), exprimerait ces températures si les sources avaient été réduites à une seule, occupant entre les limites $\xi=\alpha, \eta=\beta, \ldots$ et $\xi=\alpha+d\alpha, \eta=\beta+d\beta, \ldots$ l'élément $d\alpha\, d\beta\ldots$ de l'espace, et qui n'aurait fourni son débit effectif de chaleur que durant un élément unique $d\theta$ du temps, savoir, de l'instant $t=\theta$ à l'instant $t=\theta+d\theta$. Or, d'après la formule la plus réduite (52) des termes simples (p. 95), où il n'est fait abstraction que du fac-



teur $e^{\frac{\theta-t}{c}}$ et où τ désigne la fraction $\frac{t-\theta}{C}$, chaque valeur partielle de u ne varie, dans l'espace, qu'avec la distance

$$r = \sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+\ldots}$$

du point quelconque $(\xi, \eta, \ldots)$, où on la considère, au siège $(\alpha, \beta, \ldots)$ de la source élémentaire correspondante.

Ce fait important est lié à un caractère moins spécial que lui, offert par les mêmes solutions simples, et dont on pourrait le déduire. Celui-ci consiste en ce que, passé l'époque, θ, du fonctionnement instantané de la source, ou de la production de l'accroissement local u_0 de température, l'expression (52), même (et surtout) en lui adjoignant le facteur $e^{\frac{\theta-t}{c}}$, devient immédiatement, et reste désormais, graduellement variable dans tout l'espace, sans s'annuler autre part qu'à l'infini. En effet, elle ne présente de singularité qu'à l'instant $t=\theta$, où $\tau=0$ et où elle s'annule partout sauf au siège $r=0$ de la source.

Or il suit de cette graduelle variation, dans tout l'espace, du terme simple (52), qu'un déplacement très petit du point d'émission d'un élément quelconque, dq, de la chaleur produite par la source, ne modifie pas, dans un rapport appréciable, les températures ultérieures en résultant au point donné $(\xi, \eta, \ldots)$ du corps. On peut donc rendre chaque source élémentaire, par d'insignifiants déplacements des points d'émission qui la composent, exactement symétrique ou pareille tout autour d'un centre; cas où ses effets ne dépendent évidemment, à un moment donné et dans le milieu isotrope, que de la distance r à ce centre.

222. Différence profonde existant, sous ce rapport, entre la propagation par conductibilité et la propagation par ondes. — Il n'en serait plus de même si l'équation indéfinie des températures contenait la dérivée seconde de u par rapport au temps, au lieu de la dérivée première : ce qui rapprocherait cette équation de celle du son. On sait [1] qu'alors, dans chaque terme simple, la valeur de u

---

[1] *Voir*, sur ce sujet capital, les n°s 460* et 476* de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, *Compléments*, p. 448*

s'annulerait en avant d'une onde progressant avec une vitesse finie; de sorte que u ne varierait pas graduellement, mais dans un rapport infini, de part et d'autre du *front* de l'onde. Donc, de minimes déplacements des points d'émanation y feraient changer notablement u; et l'on ne pourrait plus, sans erreur très notable, supposer symétrique tout autour d'un centre chaque source élémentaire ([1]). L'erreur dont il s'agit s'aggraverait encore, dans les cas où chaque onde élémentaire est nettement limitée à son arrière autant qu'à son avant et n'a ainsi qu'une épaisseur infiniment petite; ce qui n'y laisse subsister la fonction u, représentative du mouvement, que dans une partie toujours infime de l'espace. Alors, en effet, les amplitudes peuvent varier dans un rapport quelconque, quand on passe d'un rayon, émané du centre des ébranlements, à un autre rayon ([2]).

223. Extension probable du même fait au cas de fonctions $\varphi(u)$ non linéaires ou d'une conductibilité extérieure variable avec la température. — La parité de l'échauffement dans tous les sens, à partir d'une source unique de chaleur, n'est ainsi démontrée, il est vrai, que dans les cas de conductibilité extérieure constante, les seuls où l'équation des températures, avec son terme $\varphi(u)$, soit linéaire et admette une intégrale générale formée par la simple addition des intégrales particulières se rapportant aux divers points et aux divers instants d'émanation. Mais il doit en être de même dans les autres cas, c'est-à-dire quelle que soit la fonction $\varphi(u)$.

On peut, du moins, l'inférer de l'exemple fourni par le simple

---

à 451* et 521* à 522*), ou bien la théorie de la *délimitation latérale des rayons sonores ou lumineux*, aux pages 674 à 697 du Volume intitulé *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, etc., ou, encore, vers la fin du présent Volume, les première et dernière parties de la grande Note sur la théorie mécanique de la lumière.

([1]) A moins toutefois qu'elle ne fût censée *rigoureusement* réduite à un point, et, alors, convenablement associée à d'autres, analogues.

([2]) Ces considérations montrent que le fait, pour nos solutions relatives à une source calorifique élémentaire, de dépendre seulement des deux variables t et r, n'est pas évident *a priori*, comme inclineraient vite à le faire penser, d'abord l'observation, puis, bientôt, le sentiment, des phénomènes calorifiques, et comme je l'avais *implicitement* admis, en 1867, dans ma Thèse de doctorat.

refroidissement, qu'il nous a été donné d'y aborder. En effet, la formule approchée (60) y fait, lors d'un siège élémentaire d'émanation, u fonction des deux seules variables t et r; car l'auxiliaire f, donnée par (57), (54) ou (53), dépend encore des coordonnées ξ, η, ... par l'expression unique $(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+\ldots$, carré de la distance r de chaque point $(\xi, \eta, \ldots)$ au siège primitif $(\alpha, \beta, \ldots)$ de la chaleur ainsi en train de se dissiper. Or la question du refroidissement n'est évidemment que le cas le plus simple de celle de l'échauffement, savoir, le cas où les sources données sont intermittentes, et actives seulement durant de courts instants, séparés par de longs intervalles.

224. Échauffement produit par une source élémentaire dont on donne les débits successifs. — Puisque, aux distances notables d'une source de petite étendue, les températures u dépendent des coordonnées x, y, z par la variable unique r, et qu'elles se trouvent ainsi indépendantes de la forme de la source ou du mode de distribution de son débit dans toute l'étendue de son siège, on peut admettre qu'elles seront les mêmes, soit quand ce débit proviendra d'actions chimiques intérieures, soit quand il sera transmis d'une certaine distance par une tige métallique s'insérant dans le corps expérimenté, pourvu que celui-ci soit alors protégé contre le rayonnement de toutes les parties de la tige autres que son extrémité. C'est le dernier cas qui se produisait, comme on sait, dans les expériences du physicien de Senarmont sur les plaques cristallines.

Mais revenons à la formule (70) (p. 104), pour voir ce qu'elle devient quand les sources se réduisent ainsi à une seule, élémentaire, ou que, par exemple, la fonction $S(\theta, a\xi, b\eta, \ldots)$ est nulle en dehors des limites $\xi=\alpha$, $\eta=\beta$, ... et $\xi=\alpha+d\alpha$, $\eta=\beta+d\beta$, ... Appelons alors $\psi(t)$ le débit de la source (par unité de temps) à l'époque t, dans le milieu isotrope, ou $\psi(\theta)$ le produit

$$S(\theta, a\alpha, b\beta, \ldots)\,d\alpha\,d\beta\,\ldots.$$

La formule (68) (p. 103), en y remontant des variables d'intégration ω, ω', ... aux variables primitives $\alpha=\xi+2\omega\sqrt{\tau}$,

$\beta = \eta + 2\omega'\sqrt{\tau}, \ldots,$ donnera

$$F(\theta, \tau, \xi, \eta, \ldots)$$
$$= \frac{1}{(2\sqrt{\pi\tau})^n} e^{-\frac{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+\ldots}{4\tau}} S(\theta, a\alpha, b\beta, \ldots)\, d\alpha\, d\beta \ldots = \frac{\psi(\theta)}{(2\sqrt{\pi\tau})^n} e^{-\frac{r^2}{4\tau}};$$

et la relation (70), si l'on convient d'y regarder τ comme exprimant le quotient $\frac{t-\theta}{C}$, sera dès lors

$$(73) \qquad u = \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{C}{c}\tau - \frac{r^2}{4\tau}} \frac{\psi(\theta)\, d\theta}{C(2\sqrt{\pi\tau})^n} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{C}{c}\tau - \frac{r^2}{4\tau}} \frac{\psi(t - C\tau)}{(2\sqrt{\pi\tau})^n}\, d\tau,$$

son dernier membre se déduisant du second par l'adoption de τ, comme variable d'intégration, à la place de θ.

Telle est donc la formule qui, à diverses distances r de la source élémentaire donnée, relie la température actuelle u aux débits successifs antérieurs $\psi(\theta)$ de cette source [1].

225. Cas particulier d'un état permanent. — Quand, à partir d'un certain moment, la source se règle et prend un débit Q constant, ou que, désormais, $\psi(t) = Q$, l'état calorifique finit lui-même, comme on sait, par être permanent et les températures u tendent vers des valeurs indépendantes de t. A des distances quelconques r autour d'une source élémentaire, ces valeurs limites constitueront donc une fonction de la variable unique r. Cela résulte déjà de la démonstration précédente, applicable quelque grand que soit t et, par suite, même aux valeurs limites de u. Mais on peut aussi le démontrer directement, comme il suit :

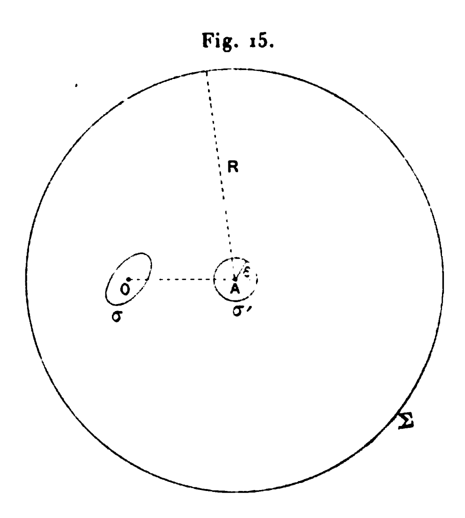
Appelons μ^2 le rapport constant $\frac{C}{c}$; et supposons la source concentrée, à l'origine O des coordonnées $\xi, \eta, \ldots,$ dans un petit espace, que limitera toujours une certaine figure *isotherme* σ de

(1) Cette formule (73), dans le cas particulier d'un corps athermane et d'une conductibilité extérieure nulle (où $c = \infty$), conduit à quelques lois très simples de propagation, que l'on trouvera au n° 467* de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, *Calcul intégral, Compléments*, p. 471* à 478*). On l'applique aussi, sans difficulté, au cas où le siège de la source élémentaire considérée de chaleur se déplace d'une manière quelconque, dans le corps ou milieu indéfini qu'elle chauffe (même t. II, p. 517* à 520*).



très petites dimensions, ensemble de deux points voisins (sur l'axe des ξ) dans le cas d'une seule dimension, et courbe ou surface fermée dans les autres cas, de deux ou trois dimensions, suivant

Fig. 15.



les ξ, η, ... Nous aurons, vu (44) et (67) (p. 91 et 101), comme équation indéfinie régissant les températures u permanentes dans toutes les régions du corps extérieures à σ,

$$(74) \qquad \Delta_2 u = \mu^2 u.$$

226. Démonstration directe, dans ce cas, de la parité de l'échauffement tout autour d'une source élémentaire. — Cela posé, admettons qu'on veuille obtenir la valeur de u en un point quelconque du corps, A par exemple, situé à une distance donnée OA de l'origine (*fig.* 15).

Nous décrirons, autour de ce point A comme centre, d'une part, une figure σ' d'un rayon infiniment petit *constant*, ε, et, d'autre part, une figure analogue Σ, mais dont le rayon constant R soit infiniment grand. Imaginons, en A, une source concentrée dans l'intérieur de σ' et du même débit, Q, que la proposée O, mais constituée pareillement tout autour de A, ou telle que, par raison de symétrie, les températures permanentes u' qu'elle ferait naître fussent uniquement fonction de la distance r des divers points (ξ, η, ...) du corps à son centre A. Cette seconde source

sera donc purement fictive, ainsi que les températures correspondantes u', évidemment régies, hors de la figure σ', par l'équation indéfinie

$$(75) \qquad \Delta_2 u' = \mu^2 u'.$$

Or multiplions cette équation par $-u\,d\xi\,d\eta\ldots$, puis ajoutons-la, terme à terme, à l'équation (74) multipliée de même par $u'\,d\xi\,d\eta\ldots$; et, après avoir observé que le résultat aura zéro pour second membre, intégrons les divers termes dans tout l'espace $\int\cdots\int d\xi\,d\eta\ldots$ intérieur à la grande figure Σ, mais extérieur aux deux petites σ et σ'. Si l'on appelle dn, $d\varepsilon$, respectivement, des normales très courtes, menées à deux éléments quelconques $d\sigma$, $d\sigma'$ des petites figures vers le dehors de celles-ci, et $d\mathrm{R}$ la normale analogue à un élément $d\Sigma$ de la grande figure, il viendra, en procédant comme dans une autre question (p. 48 et 49),

$$(76) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_\sigma \left(u\frac{du'}{dn} - u'\frac{du}{dn}\right) d\sigma - \int_{\sigma'} \left(u'\frac{du}{d\varepsilon} - u\frac{du'}{d\varepsilon}\right) d\sigma' \\ \displaystyle\quad = \int_\Sigma \left(u\frac{du'}{d\mathrm{R}} - u'\frac{du}{d\mathrm{R}}\right) d\Sigma. \end{cases}$$

Sur toute l'étendue de la figure σ, qui est isotherme pour la source proposée, u a une valeur commune, que nous appellerons U; et nous désignerons par $\frac{d\mathrm{U}}{dn}$ la dérivée de u sur l'élément $d\sigma$, suivant la normale correspondante dn. D'ailleurs, la fonction u' y varie avec continuité et n'y diffère pas sensiblement de sa valeur relative au point O, ou à la distance $r = \mathrm{OA}$, valeur que nous désignerons par u'_0. La première intégrale figurant dans (76) revient donc à

$$\mathrm{U}\int_\sigma \frac{du'}{dn}\,d\sigma - u'_0 \int_\sigma \frac{d\mathrm{U}}{dn}\,d\sigma.$$

Mais si l'on appelle ϖ l'espace qu'enclôt la figure σ, l'équation (75), multipliée par l'élément $d\varpi = d\xi\,d\eta\ldots$ et intégrée dans toute l'étendue ϖ, donne, par le même procédé de transformation d'intégrales où une intégration se fait exactement, en d'autres

ayant pour champ la limite du champ des premières,

$$\int_\sigma \frac{du'}{dn} d\sigma = \mu^2 \int_\varpi u' \, d\varpi = \mu^2 u'_0 \varpi;$$

et l'intégrale $\int_\sigma$, dans (76), devient ainsi

$$(77) \qquad u'_0 \left(\mu^2 \mathrm{U} \varpi - \int_\sigma \frac{d\mathrm{U}}{dn} d\sigma \right).$$

D'ailleurs, l'expression $-\int_\sigma \frac{d\mathrm{U}}{dn} d\sigma$, somme des flux de chaleur sortant, par unité de temps, de la figure σ (vu la valeur 1 du coefficient de conductibilité intérieure dans notre milieu isotrope), n'est autre chose que le débit donné Q de la source O.

Il en résulte que la valeur moyenne, sur σ, de $\frac{d\mathrm{U}}{dn}$, ne tend pas vers zéro avec ϖ; de sorte que, si U ne croît pas sans limite à l'approche de l'origine O, la dérivée $\frac{d\mathrm{U}}{dn}$ lui restera pour le moins comparable (au point de vue des valeurs numériques).

Si, au contraire, U y grandit indéfiniment, il est évident que sa dérivée correspondante $-\frac{d\mathrm{U}}{dn}$ y sera encore d'un ordre au moins aussi élevé; car nulle intégrale ne peut, *dans un champ infiniment petit,* grandir autant que la fonction placée sous son signe $\int$. Or la dérivée $-\frac{d\mathrm{U}}{dn}$ deviendra infinie quand le corps aura deux ou trois dimensions et que, par suite, la figure σ entourant l'espace ϖ décroîtra indéfiniment lors de son rapprochement du point O; car alors, le débit $-\int_\sigma \frac{d\mathrm{U}}{dn} d\sigma$ conservant sa valeur Q, la valeur moyenne de $-\frac{d\mathrm{U}}{dn}$ est inverse de σ.

Quoi qu'il en soit, la valeur moyenne de $-\frac{d\mathrm{U}}{dn}$ sera, dans la parenthèse de (77), pour le moins comparable à $\mu^2\mathrm{U}$ (numériquement), comme on voit, tandis que le facteur ϖ y a une dimension infiniment petite de plus que $\int d\sigma$ ou σ; le premier terme $\mu^2\mathrm{U}\varpi$ de cette parenthèse est donc toujours négligeable par

rapport au second, Q. Et l'intégrale $\int_\sigma$, dans la formule (76), se trouve avoir simplement pour valeur Qu'_0.

Quant à l'intégrale $\int_{\sigma'}$, où la fonction u, et non plus u', varie graduellement, elle est exactement, pour la source fictive siégeant en A et de débit Q, ce qu'était la précédente pour la source réelle; de sorte que, si l'on appelle u_A la valeur cherchée de u au point A, cette intégrale $\int_{\sigma'}$ donnera, au premier membre de (76), le terme $-Qu_A$.

Voyons maintenant quel peut être l'ordre de grandeur du second membre, c'est-à-dire de l'intégrale $\int_\Sigma$. Comme u' et $\frac{du'}{dR}$ y sont fonction seulement de R, on peut écrire ainsi ce second membre :

$$\frac{du'}{dR}\int_\Sigma u\,d\Sigma - u'\int_\Sigma \frac{du}{dR}\,d\Sigma. \tag{78}$$

Or $-\int_\Sigma \frac{du}{dR}\,d\Sigma$ exprime la chaleur qui, dans l'unité de temps, sort effectivement par la figure Σ; et l'on peut admettre qu'elle est, au plus, de l'ordre de grandeur du débit Q de la source. Car, le corps ou milieu matériel compris entre les limites σ, σ' et Σ ayant ses températures invariables, et celles-ci, même, étant continues dans tout l'intérieur de la limite évanouissante σ', dès lors négligeable, la chaleur qui sort par la figure Σ égale, à tout instant, l'excédent de la chaleur, Q, fournie par la source sur celle que le corps ou milieu en question rayonne sans cesse au dehors; et cette dernière n'exprime généralement qu'une partie de Q. Donc le second terme de (78) a un de ses facteurs au plus de l'ordre de grandeur de Q, tandis que l'autre, u', s'évanouit quand il est pris à une distance R croissant sans limite.

Il en est de même du premier terme, qui peut s'écrire, en appelant $\mathfrak{M}u$ la moyenne des valeurs de u sur toute l'étendue Σ,

$$(-\mathfrak{M}u)\left(-\frac{du'}{dR}\Sigma\right).$$

Car $-\frac{du'}{dR}\Sigma$ y est évidemment la partie du débit Q fourni idéale-

ment par la source fictive à siège A, qui sort dans l'unité de temps à travers la figure Σ, et $\mathfrak{M}u$ y tend, comme u', vers zéro lorsque R devient infini.

Ainsi, le second membre de (76) est évanouissant par rapport à chacun des termes du premier membre; et cette relation revient à $Q(u'_0 - u_A) = 0$, ou donne simplement $u_A = u'_0$.

C'est bien dire que *la température permanente*, u_A, *maintenue au point quelconque* A *du corps par la source élémentaire donnée* O, *égale la température analogue* u'_0 *que maintiendrait, à pareille distance* $r = OA$, *une source élémentaire de même débit* Q, *constituée pareillement dans toutes les directions autour de son centre.*

227. Expressions qu'y reçoit la température, dans une barre et dans un corps massif. — Supposons donc u fonction de la variable unique r. Son paramètre différentiel Δ_2 admettra dès lors, comme on sait, l'expression $\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{du}{dr}$, dans un espace à n dimensions ou coordonnées $\xi, \eta, \ldots$. Et l'équation indéfinie (74) deviendra

$$(79)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{du}{dr} = \mu^2 u, \\ &\text{ou} \\ &\frac{d^2 . u r^{\frac{n-1}{2}}}{dr^2} = \left[\mu^2 - \frac{(3-n)(n-1)}{4r^2}\right]\left(u r^{\frac{n-1}{2}}\right). \end{aligned} \right.$$

Elle est, sous sa dernière forme, à coefficients constants dans les deux cas $n = 1$, $n = 3$, c'est-à-dire d'une barre et d'un corps massif; et elle donne alors, M, N désignant deux constantes,

$$(80)\qquad u r^{\frac{n-1}{2}} = M e^{-\mu r} + N e^{\mu r}.$$

Or, si l'on n'annule pas la constante N, cette formule, pour r croissant indéfiniment, rendra le produit $u r^{\frac{n-1}{2}}$ très grand de l'ordre de $e^{\mu r}$, ou incomparablement plus que la puissance $r^{\frac{n-1}{2}}$; et u ne s'annulera pas asymptotiquement, comme l'exige la condition relative à $r = \infty$. Donc on doit poser $N = 0$.

Quant à la constante M, elle devra, pour r infiniment petit,

donner

$$-\frac{du}{dr}\sigma = Q.$$

Plus explicitement, dans le cas de la barre, où la figure σ se réduit à deux points très voisins situés respectivement de part et d'autre de la source O, sur l'axe des ξ, et à chacun desquels on peut attribuer la valeur 1, cette condition deviendra

$$-2\frac{du}{dr} = Q \text{ (pour } r = 0\text{)},$$

c'est-à-dire, vu que la formule (80) est alors $u = Me^{-\mu r}$,

$$2M\mu = Q; \qquad \text{d'où} \qquad M = \frac{Q}{2\mu}.$$

Et l'on aura

$$(81) \qquad \text{(pour une barre)} \quad u = \frac{Q}{2\mu}e^{-\mu r} = \frac{Q}{2\mu}e^{-\mu\sqrt{\xi^2}}.$$

Dans le cas d'un corps massif où σ sera une très petite sphère $4\pi r^2$ décrite autour de la source O, l'on y aura sensiblement, r étant très petit,

$$u = \frac{M}{r}, \qquad -\frac{du}{dr}\sigma = 4\pi M; \qquad \text{d'où} \qquad M = \frac{Q}{4\pi}.$$

La formule (80) donnera donc

$$(82) \qquad \text{(pour un corps massif)} \quad u = \frac{Q}{4\pi r}e^{-\mu r} = \frac{Q}{4\pi}\frac{e^{-\mu\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}.$$

On remarquera que les deux formules (81) et (82), propres aux deux cas ainsi traités $n = 1$ et $n = 3$, sont comprises dans celle-ci :

$$(83) \qquad u = \frac{Q}{2\mu}\left(\frac{\mu}{2\pi r}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\mu r}.$$

Nous verrons un peu plus loin (p. 125) que cette dernière s'applique encore au cas des plaques, ou de $n = 2$, mais seulement, alors, en tant que formule asymptotique, c'est-à-dire aux distances r de la source assez grandes, et avec une approximation croissante avec elles.

TRENTE ET UNIÈME LEÇON.

SUITE : ÉCHAUFFEMENT PERMANENT DE LA PLAQUE A PARTIR D'UN CENTRE.

---

228. Recherche de l'expression, beaucoup plus compliquée, des températures permanentes d'une plaque. — Ce troisième cas d'une plaque, ou de $n = 2$, est, en effet, bien moins simple. Si l'on pose $\mu r = \iota$, la première équation (79) y devient

$$\frac{d^2 u}{d\iota^2} + \frac{1}{\iota}\frac{du}{d\iota} = u; \tag{84}$$

et u n'est autre que la fonction, J_0, dont l'expression en intégrales définies est donnée par la formule (87) de la XLI[e] Leçon de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (¹), mais avec changement de r en $\iota\sqrt{-1}$. Il vient donc,

---

(¹) Tome II, second fascicule (*Calcul intégral, Compléments*), p. 308* à 311*, form. (80) et (87) : après avoir, dans cette formule (87), remplacé r par $\iota\sqrt{-1}$, nous mettons aussi c pour $c + c_1 \log\sqrt{-1}$. L'introduction du symbole $\sqrt{-1}$ ne change rien à l'applicabilité de cette intégrale générale (87); car celle-ci s'obtient et se démontre de la même manière, soit qu'on fasse figurer sous le signe $\int$ des intégrales définies le cosinus circulaire de $r\cos\alpha$, ou son cosinus hyperbolique. Cela revient, d'une part, à donner le double signe $\mp$ au terme u, dans le second membre de l'équation différentielle (84) ci-dessus, ou aux termes $-y$, $-J$, des équations différentielles (78) et (80) du Tome II cité, et, d'autre part, à évaluer, à la page 310* du même Tome, les expressions $\pm\varphi_{m+1}$, $\varphi_m \pm \dfrac{d^2\varphi_m}{dr^2}$, au lieu de φ_{m+1}, $\varphi_m + \dfrac{d^2\varphi_m}{dr^2}$.

c et c_1 désignant deux constantes arbitraires,

$$(85) \qquad u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [c + c_1 \log(\iota \sin^2 \alpha)] \operatorname{coh}(\iota \cos \alpha)\, d\alpha.$$

Comme u doit rester fini (et même s'annuler) pour ι infini, il faudra déterminer le rapport mutuel des deux constantes c et c_1, de manière qu'il en soit ainsi. Cherchons donc vers quelle forme tend cette expression (85) quand ι grandit indéfiniment. Le cosinus hyperbolique, demi-somme de deux exponentielles dont l'une s'évanouit alors, y devient $\frac{1}{2} e^{\iota \cos \alpha} = \frac{1}{2} e^{\iota - \frac{\iota \alpha^2}{2} + \dots}$. En faisant sortir le facteur $\frac{1}{2} e^{\iota}$ du signe $\int$, on a

$$(86) \qquad u = \frac{1}{2} e^{\iota} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [c + c_1 \log(\iota \sin^2 \alpha)]\, e^{-\frac{\iota \alpha^2}{2} + \dots}\, d\alpha.$$

Sous le signe $\int$, l'exponentielle décroissante rend évidemment négligeables, quand ι est très grand, tous les éléments où α a une valeur sensible, c'est-à-dire tous ceux où l'exposant $\iota \cos \alpha - \iota$ de e est, alors, comme infini négatif. Or, dans ceux où α est, au contraire, très petit et où l'exponentielle ne s'évanouit pas, l'exposant est réductible à $-\frac{\iota \alpha^2}{2}$; car le terme suivant de la série,

$$\frac{\iota \alpha^4}{2.3.4} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\iota \alpha^2}{2}\right) \frac{\alpha^2}{3.4},$$

s'y trouve très petit de l'ordre de α^2. De même, $\iota \sin^2 \alpha$ s'y réduit à $\iota \alpha^2$. Posons donc $\alpha \sqrt{\iota} = \beta$; et nous aurons, sauf erreur relative finalement nulle sur u, en observant que la nouvelle limite supérieure de l'intégrale dépasse toute valeur donnée (si ι est assez grand),

$$(87) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\text{pour } \iota \text{ très grand}) \quad u = \frac{e^{\iota}}{2\sqrt{\iota}} \int_0^{\infty} (c + 2 c_1 \log \beta)\, e^{-\frac{\beta^2}{2}}\, d\beta \\ &\qquad = \frac{e^{\iota}}{2\sqrt{\iota}} \left(c \sqrt{\frac{\pi}{2}} + 2 c_1 \int_0^{\infty} e^{-\frac{\beta^2}{2}} \log \beta\, d\beta \right). \end{aligned} \right.$$

229. Intégration de l'équation du problème, sous la condition que l'intégrale reste finie à l'infini. — Comme on veut que u ne devienne pas infini, il faudra annuler la parenthèse du dernier membre, ou établir entre c et c_1 le rapport

$$(88) \qquad \frac{c}{c_1} = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2}{2}} \log\beta \, d\beta.$$

L'intégrale qui figure ici peut être rattachée à la fonction eulérienne Γ, définie, comme on sait, par la formule

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\, dx = \int_0^\infty e^{-x+(n-1)\log x}\, dx,$$

ou bien, en posant $x = \frac{\beta^2}{2}$ (d'où $dx = \beta\, d\beta = e^{\log\beta}\, d\beta$), par celle-ci,

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2}{2} + (2n-1)\log\beta + (n-1)\log\frac{1}{2}}\, d\beta.$$

Différentions en n : nous aurons

$$\Gamma'(n) = \int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2}{2} + (2n-1)\log\beta + (n-1)\log\frac{1}{2}} \left(2\log\beta + \log\frac{1}{2}\right) d\beta$$

$$= \frac{1}{2^{n-2}} \int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2}{2}} \beta^{2n-1} \log\beta\, d\beta + \left(\log\frac{1}{2}\right)\Gamma(n).$$

En faisant $n = \frac{1}{2}$, puis isolant l'intégrale cherchée et observant que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, il viendra

$$(89) \qquad \int_0^\infty e^{-\frac{\beta^2}{2}} \log\beta\, d\beta = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{\pi}\log 2\right];$$

et la formule (88) sera enfin

$$(90) \qquad \frac{c}{c_1} = -\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} - \log 2.$$

Le rapport $\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}$, dérivée de $\log\Gamma(n)$ pour $n = \frac{1}{2}$, s'évaluera au moyen de la Table de Legendre qui donne les logarithmes déci-

maux (et non les logarithmes naturels figurant ici) de la fonction $\Gamma(n)$. Stokes a ainsi trouvé ([1]), pour le rapport de c à c_1, la valeur 1,270363.

230. Manière dont l'intégrale s'évanouit alors aux distances infinies de l'origine. — D'ailleurs, avec la valeur (90) du rapport de c à c_1, la formule (87) montre que l'expression $u\sqrt{\iota}\,e^{-\iota}$ tend vers zéro pour ι infini. Pour abréger, appelons φ cette expression; et, après avoir observé que, dans le cas actuel où $n=2$, l'équation (79) (p. 114), prise sous sa seconde forme, revient à

$$\frac{d^2.u\sqrt{\iota}}{d\iota^2}=\left(1-\frac{1}{4\iota^2}\right)u\sqrt{\iota}, \tag{91}$$

remplaçons-y $u\sqrt{\iota}$ par $e^{\iota}\varphi$. Nous aurons

$$\frac{d^2\varphi}{d\iota^2}+2\frac{d\varphi}{d\iota}=-\frac{\varphi}{4\iota^2}. \tag{92}$$

Multiplions celle-ci par $d\iota$, et intégrons de $\iota=\iota$ à $\iota=\infty$, comme si le second membre était connu. Il viendra, vu l'évanouissement de φ et de sa dérivée pour ι infini,

$$\frac{d\varphi}{d\iota}+2\varphi=\int_{\iota}^{\infty}\frac{\varphi\,d\iota}{4\iota^2}. \tag{93}$$

Or, si ι est supposé très grand, φ a, sous le signe $\int$, ses valeurs absolues tout au plus du même ordre que la première d'entre elles, relative à la limite inférieure ι; de sorte que le second membre est au plus comparable à $\varphi\int_{\iota}^{\infty}\frac{d\iota}{4\iota^2}=\frac{1}{4\iota}\varphi$.

Appelons donc ε une quantité évanouissante quand ι croît sans limite; et l'équation (93) pourra s'écrire $\frac{d\varphi}{d\iota}+2\varphi=\varepsilon\varphi$, ou, en

([1]) Dans son grand Mémoire sur la résistance de l'air aux oscillations du pendule, cité aux nos 20 et 28 de la Note finale I ci-après et traduit par M. Wolf dans le Tome V des *Mémoires publiés par la Société française de Physique*. C'est aux pages 321 à 329 de ce Tome V que se trouve exposée l'analyse remarquable par laquelle Stokes a, le premier, déterminé le rapport que doivent avoir entre elles les deux constantes c et c_1 de la formule (85), pour que cette intégrale (85) de (84) reste finie à la limite $\iota=\infty$. La démonstration ci-dessus me semble réduire cette question à une très grande simplicité.

divisant par φ et remplaçant φ par $u\sqrt{\iota}e^{-\iota}$, c'est-à-dire $\log\varphi$ par $\log(u\sqrt{\iota}e^{\iota}) - 2\iota$,

$$(94) \qquad \frac{d.\log(u\sqrt{\iota}e^{\iota})}{d\iota} = \varepsilon.$$

Cette relation signifie que, une fois ι devenu assez grand, la fonction $u\sqrt{\iota}e^{\iota}$ se maintient sensiblement constante (sauf erreur relative très petite) dans tout intervalle fini où varie ι, c'est-à-dire que le produit $u\sqrt{\iota}$ y décroît à la manière de l'exponentielle $e^{-\iota}$. Dans de telles conditions, il est inévitable que ce produit, non seulement ne croisse pas sans limite, mais même tende vers zéro pour ι infini. Et l'on voit de plus que, dans le cas actuel $n=2$, l'expression de u varie, sinon en toute rigueur (comme dans les deux autres cas $n=1$ et $n=3$), mais du moins à très peu près, proportionnellement à l'inverse du produit $\iota^{\frac{n-1}{2}}e^{\iota}$, ou du produit $r^{\frac{n-1}{2}}e^{\mu r}$, quand la variable ι est devenue assez grande.

231. Détermination de la constante arbitraire qui y subsiste. — Enfin, l'arbitraire c_1 devra être choisie de manière que, sur la circonférence $\sigma = 2\pi r$ d'un rayon $r = \frac{\iota}{\mu}$ très petit, on ait

$$(95) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (\text{pour } \sigma, r, \iota \text{ très petits}) \ -\dfrac{du}{dr}\sigma = Q, \\ \text{ou} \\ \qquad -2\pi r\dfrac{du}{dr} = -2\pi\iota\dfrac{du}{d\iota} = Q. \end{array} \right.$$

Or, pour ι très petit, la partie du second membre de (85) affectée du coefficient c a sa dérivée en ι évanouissante, et la partie affectée de c_1 n'a de sensibles, dans sa dérivée en ι, que les éléments d'intégrale provenant de la différentiation, sous le signe $\int$, du facteur très grand $\log(\iota\sin^2\alpha)$; car les éléments où figurera, sous le signe $\int$, la dérivée en ι de l'autre facteur variable $\operatorname{coh}(\iota\cos\alpha)$, savoir $\cos\alpha\operatorname{sih}(\iota\cos\alpha)$, auront leur somme infiniment petite de l'ordre de $\iota\log\iota$. Il viendra sensiblement

$$(96) \qquad (\text{pour } \iota \text{ très petit}) \quad \frac{du}{d\iota} = \frac{c_1}{\iota}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{coh}(\iota\cos\alpha)\,d\alpha = \frac{c_1}{\iota}\frac{\pi}{2};$$

et la relation (95) donnera $-\pi^2 c_1 = Q$, ou $c_1 = -\frac{Q}{\pi^2}$. L'expression de la température permanente u sera donc, d'après (85) et (90),

$$(97)\quad (\text{pour une plaque}) \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{Q}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \log\frac{\iota \sin^2\alpha}{2}\right) \operatorname{coh}(\iota\cos\alpha)\, d\alpha, \\ \text{où} \\ \iota = \mu r = \mu\sqrt{\xi^2+\eta^2}. \end{array} \right.$$

232. Développement en série de l'intégrale obtenue. — Le calcul de cette expression (97) et, plus généralement, de l'intégrale (85) de l'équation différentielle (84) peut se faire, en les développant en séries, toujours convergentes, suivant les puissances entières et positives de ι, à part le facteur $\log\iota$ que contient en plus, dans tous ses termes, l'une des séries.

A cet effet, on remplacera le cosinus hyperbolique, figurant dans (85) ou dans (97), par la somme

$$(98)\qquad 1 + \frac{\iota^2\cos^2\alpha}{1.2} + \frac{\iota^4\cos^4\alpha}{1.2.3.4} + \frac{\iota^6\cos^6\alpha}{1.2.3.4.5.6} + \ldots;$$

et, d'une part, on observera, dans le produit développé et intégré de cette série par $c + c_1(\log\iota + 2\log\sin\alpha)$, que

$$(99)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\alpha\, d\alpha = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n},$$

d'autre part, on effectuera comme il suit le calcul des intégrales définies, également introduites par le développement,

$$(100)\quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\alpha \log\sin\alpha\, d\alpha = \int_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}\alpha\, d(\sin\alpha\log\sin\alpha - \sin\alpha).$$

L'intégration par parties y donne, vu l'annulation, aux limites, du terme intégré, et vu aussi que $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$,

$$\begin{aligned} I_n &= (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{2n-2}\alpha - \cos^{2n}\alpha)(\log\sin\alpha - 1)\, d\alpha \\ &= (2n-1)\, I_{n-1} - (2n-1)\, I_n - (2n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2}\alpha\, d\alpha - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\alpha\, d\alpha\right). \end{aligned}$$

Résolvons par rapport à I_n et, en tenant compte de (99), il viendra la formule de réduction

$$(101)\qquad I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1} - \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\,\frac{1}{2n},$$

pour déduire successivement I_1, I_2, I_3, ... de I_0, produit de $\frac{\pi}{2}$ par la valeur moyenne de $\log\sin\alpha$ entre les deux limites $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Or la formule de Côtes, qui est, par exemple, la formule (47), à la page 41* de mon Volume de *Calcul différentiel* (¹), donne de suite, pour n très grand, en la divisant par $x-1$ et extrayant ensuite la racine $n^{\text{ième}}$ des deux membres, la valeur moyenne géométrique de l'expression $x^2 - 2x\cos 2\alpha + 1$, où x est constant et où la variable α recevrait successivement comme valeurs tous les multiples positifs, inférieurs à $\frac{\pi}{2}$, de $\frac{\pi}{2n+1}$; ce qui la ferait bien varier uniformément de zéro à $\frac{\pi}{2}$ (²). Cette moyenne géométrique, $\left(\frac{x^{2n+1}-1}{x-1}\right)^{\frac{1}{n}}$, est 1 pour x inférieur à l'unité (en valeur absolue), ou quand, x^{2n+1} s'annulant à la limite, il reste $\left(\frac{-1}{x-1}\right)^0$ ou $\left(\frac{1}{1-x}\right)^0$, c'est-à-dire 1; et elle est, identiquement, $x^2\left(x\frac{1-x^{-2n-1}}{x-1}\right)^{\frac{1}{n}}$, ou x^2, pour x^2 supérieur à l'unité, car elle devient alors $x^2\left(\frac{x}{x-1}\right)^0$ ou $x^2\times 1$.

Si l'on fait $x=1$, cas où $x^2 - 2x\cos 2\alpha + 1 = 4\sin^2\alpha$, la moyenne géométrique est donc 1; d'où il suit que $\sin^2\alpha$ a pour valeur moyenne géométrique $\frac{1}{4}$ et que $\sin\alpha$ a pour valeur moyenne

(¹) *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, t. I. deuxième fascicule (*Compléments*), p. 41*.

(²) On peut voir comment se définit et se calcule la valeur moyenne géométrique d'une fonction, dans un intervalle donné, au n° 274* du même *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, *Compléments*, p. 48* à 50*).

géométrique $\frac{1}{2}$. C'est dire que la valeur moyenne arithmétique de $\log \sin \alpha$ est $\log \frac{1}{2}$, ou que $I_0 = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$.

Il viendra donc, successivement :

$$(102) \quad \begin{cases} I_0 = \frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}, \\ I_1 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \left(\log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right), \\ I_2 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \left(\log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right), \\ I_3 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \left(\log \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Le développement, toujours convergent, des différentes parties de l'intégrale définie (85), ou (97), suivant les puissances entières et positives de ι, pourra donc s'effectuer, avec le facteur $\log \iota$ en plus dans chacun des termes de l'une des deux séries affectées du coefficient c_1.

N'ayant pas d'application à faire ici de la formule (97) de u, je m'en tiendrai là au sujet de son développement en série. Mais je chercherai encore son expression asymptotique, qui joint, à l'avantage d'une grande simplicité, celui de permettre la comparaison du cas actuellement étudié d'une plaque, où $n = 2$, aux autres cas, traités précédemment, d'une barre et d'un corps massif, où n avait les valeurs respectives 1 et 3.

233. Autre forme de la même intégrale, obtenue par une méthode de Laplace. — La formule *asymptotique* dont il s'agit, ou formule de u approchée à une erreur relative près évanouissante quand ι grandit indéfiniment, ne serait peut-être pas facile à déduire de l'expression (97). Mais elle résulte immédiatement d'une autre forme de l'intégrale, que donne une méthode de Laplace pour intégrer les équations différentielles *linéaires et à coefficients linéaires eux-mêmes*. C'est bien le cas de notre équation (84), écrite ainsi

$$(103) \qquad \iota \left(\frac{d^2 u}{d\iota^2} - u \right) + \frac{du}{d\iota} = 0.$$

Cette méthode de Laplace, dont on peut voir l'exposé et d'intéressantes applications au Tome III (p. 372 à 378) du *Traité d'Analyse* de M. Picard, consiste à former, pour l'équation proposée (103), une solution particulière en intégrale définie rentrant dans le type

$$u = \int_p^q e^{-\iota\alpha} f(\alpha)\, d\alpha, \tag{104}$$

où l'on choisira convenablement les deux limites *constantes* p, q et la fonction $f(\alpha)$. L'expression (104), portée dans notre équation (103), la change, effectivement, en

$$\int_p^q (\alpha^2 - 1) f(\alpha) . e^{-\iota\alpha} \iota\, d\alpha - \int_p^q e^{-\iota\alpha} \alpha f(\alpha)\, d\alpha = 0.$$

Or ici, sous le premier signe $\int$, $e^{-\iota\alpha}\iota\, d\alpha$ revient à $d(-e^{-\iota\alpha})$, et une intégration par parties donne dès lors au premier membre la forme

$$[e^{-\iota\alpha}(1 - \alpha^2) f(\alpha)]_p^q + \int_p^q e^{-\iota\alpha}[(\alpha^2 - 1) f'(\alpha) + \alpha f(\alpha)]\, d\alpha.$$

On satisfera donc identiquement à l'équation (103) si, d'abord, on pose

$$(\alpha^2 - 1) f'(\alpha) + \alpha f(\alpha) = 0, \qquad \text{ou} \qquad f(\alpha) = \frac{C}{\sqrt{\alpha^2 - 1}},$$

C désignant une constante arbitraire, et si, de plus, on choisit pour p, q deux limites annulant le terme intégré $e^{-\iota\alpha}(1 - \alpha^2) f(\alpha)$, ou $-Ce^{-\iota\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 1}$, savoir, les deux limites $p = 1$, $q = \infty$. Or la solution ainsi obtenue de (103),

$$u = C \int_1^\infty \frac{e^{-\iota\alpha}\, d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}, \tag{105}$$

s'annule évidemment pour ι infini; et elle sera, par suite, une autre forme de (97), pourvu que nous y déterminions C par la condition $-2\pi\iota \frac{du}{d\iota} = Q$ (à la limite $\iota = 0$). Mais la formule (105) donne, en effectuant finalement une intégration par parties et po-

sant $\iota\alpha = \beta$ dans le résultat,

$$(106)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{d\iota} &= -C\int_1^\infty e^{-\iota\alpha}\frac{\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} = -C\int_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} e^{-\iota\alpha}\,d\sqrt{\alpha^2-1} \\ &= -C\int_1^\infty e^{-\iota\alpha}\iota\sqrt{\alpha^2-1}\,d\alpha = -\frac{C}{\iota}\int_\iota^\infty e^{-\beta}\sqrt{\beta^2-\iota^2}\,d\beta. \end{aligned} \right.$$

Le produit par $-2\pi\iota$ de cette expression, spécifié pour $\iota = 0$, devient donc, grâce à unè nouvelle intégration par parties,

$$(107)\quad -2\pi\iota\frac{du}{d\iota} = 2\pi C\int_{\beta=0}^{\beta=\infty}\beta\,d(-e^{-\beta}) = 2\pi C\int_0^\infty e^{-\beta}\,d\beta = 2\pi C;$$

et l'égalité de ce produit à Q donne $C = \frac{Q}{2\pi}$.

En définitive, l'expression (105) de u, fournie par la méthode de Laplace, et parfaitement équivalente à (97) quoique bien plus simple, devient, sous deux formes dont la seconde se déduit de la première, en posant $\alpha = 1 + \frac{\lambda^2}{\iota}$:

$$(108)\quad u = \frac{Q}{2\pi}\int_1^\infty \frac{e^{-\iota\alpha}\,d\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} = \frac{Q}{\pi}\frac{e^{-\iota}}{\sqrt{2\iota}}\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda^2}\,d\lambda}{\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{2\iota}}}.$$

234. Expression asymptotique qui s'en déduit pour les températures permanentes dans la plaque, et qui est conforme à leur expression générale dans une barre et un corps massif. — La méthode d'intégration de Laplace convenait donc admirablement à cette question. On le reconnaît surtout en observant que la nouvelle expression obtenue (108) de la température, sous sa dernière forme, devient extrêmement simple pour les grandes valeurs de ι. Alors, en effet, l'intégrale qui figure au dernier membre tend vers $\int_0^\infty e^{-\lambda^2}\,d\lambda$, c'est-à-dire vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; car le radical placé sous le signe $\int$ s'y réduit sensiblement à l'unité pour toutes les valeurs de λ modérées, ou susceptibles de donner des éléments d'une somme totale notable. La forme asymptotique cherchée de u sera donc

$$(109)\quad (\text{pour } \iota \text{ très grand})\quad u = \frac{Q}{2}\frac{e^{-\iota}}{\sqrt{2\pi\iota}} = \frac{Q}{2}\frac{e^{-\mu r}}{\sqrt{2\pi\mu r}}.$$

Elle est précisément ce que donnerait, spécifiée pour le cas d'une plaque où $n = 2$, la formule générale (83) de u (p. 115) convenant aux cas déjà traités $n = 1$ et $n = 3$ d'une barre et d'un corps massif. Seulement, tandis que, dans ces cas plus simples, la formule générale (83) était exacte pour toutes les distances r à la source calorifique, elle ne devient applicable, dans le cas actuel de deux dimensions, qu'à d'assez grandes distances de cette source.

On voit, en même temps, que l'expression (109) est approchée par *excès;* car tous les éléments de l'intégrale figurant dans le troisième membre de (108) sont ceux de l'intégrale même $\int_0^\infty e^{-\lambda^2} d\lambda$, multipliés par le facteur $\left(1 + \frac{\lambda^2}{2\iota}\right)^{-\frac{1}{2}}$, décroissant à mesure que λ s'éloigne de zéro et, par conséquent, inférieur à sa première valeur 1.

La simplicité de la formule (108), comparée à (97), tient sans doute à l'analogie assez étroite de la fonction de ι à représenter, avec l'exponentielle $e^{-\alpha\iota}$ constituant le facteur en ι de l'élément $e^{-\alpha\iota} f(\alpha)\, d\alpha$ de l'intégrale de Laplace, analogie qui rend possible une expression simple du même élément par rapport à α. L'intégrale de Laplace paraît, à cet égard, aussi avantageuse, dans le problème actuel, que l'était la forme également exponentielle des éléments de l'intégrale générale (44) (p. 38) du problème de l'échauffement d'un mur, comparée à ceux de l'intégrale (16) (p. 11) du problème de son refroidissement, quand il s'est agi de représenter le refroidissement du mur, par rayonnement, à partir d'un état initial uniforme.

TRENTE-DEUXIÈME LEÇON.

DISTRIBUTION DES TEMPÉRATURES AUTOUR D'UNE SOURCE CALORIFIQUE : ÉMANATION SOIT RECTILIGNE, SOIT TOURBILLONNANTE, DE LA CHALEUR, SUIVANT QUE LA CONTEXTURE EST, OU NON, SYMÉTRIQUE.

---

235. Points, lignes et surfaces isothermes autour d'une source élémentaire, dans des barres, plaques et masses hétérotropes. — Revenons maintenant au corps hétérotrope proposé, à coordonnées $x, y, \ldots$ (form. 42, p. 91), corps où les débits des sources sont les produits par $ab\ldots$ de leurs valeurs dans le corps isotrope correspondant, à coordonnées $\xi, \eta, \ldots$. Le problème de l'échauffement soit variable, soit permanent, étant censé résolu, pour le corps isotrope, dans le cas d'une source élémentaire située à l'origine O, l'expression de u obtenue, fonction ou de t et r, ou de r seul, conviendra donc aussi pour le corps proposé, à la condition d'y remplacer r, c'est-à-dire $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\ldots}$, par sa valeur en $x, y, \ldots$,

$$r = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \ldots}, \tag{110}$$

où a^2, b^2, ... désignent les conductibilités principales que contient l'équation indéfinie (41) (p. 91).

Cela posé, admettons que, pour tous les corps, d'un même nombre n de dimensions notables, extraits d'un bloc homogène et chauffés ensuite à l'origine (c'est-à-dire vers leur milieu), on ait rendu pareils la fonction $\varphi(u)$, exprimant leur rayonnement au dehors, et les quotients Q, par $ab\ldots$, des débits successifs de la source. Il est clair que la fonction u de r et de t, ou de r seul, sera, dès lors, identiquement la même pour tous; et, à chaque

époque t, les points qui s'y trouveront à une température désignée quelconque correspondront à une même valeur de r. Donc, vu (110), le lieu des points isothermes aura, dans tous, l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\ldots=\text{const.} \tag{111}$$

236. **Surfaces isothermes d'un corps massif et points isothermes des barres qu'on en extrait.** — S'il s'agit, d'abord, d'un corps massif, les surfaces isothermes y seront bien, comme on avait été déjà conduit à le penser (t. I, p. 200), des ellipsoïdes concentriques et homothétiques à l'ellipsoïde principal.

S'il s'agit de barres passant par l'origine et orientées dans toutes les directions par rapport au système des deux ellipsoïdes principal et des conductibilités (supposé construit autour de l'origine dans le corps d'où les barres auront été extraites), a se trouvera, d'après (40) (p. 90), remplacé par le demi-diamètre, A, de l'ellipsoïde des conductibilités, coïncidant avec l'axe de la barre. Et, par suite, *le lieu* $\frac{X^2}{A^2}=\text{const.}$ *des points isothermes, sur les axes de toutes les barres, sera constitué par la famille des ellipsoïdes concentriques et homothétiques à celui des conductibilités.* Il est vrai que u, ou plutôt U, dans l'équation (40) (p. 90), désigne alors la température moyenne sur une petite section plane, d'une certaine orientation, coupant l'axe au point d'abscisse X, et non la température vraie u en ce point. Mais la différence $U-u$ est insensible.

237. **Courbes isothermes des plaques.** — S'il s'agit enfin de plaques planes taillées en sens divers dans le milieu, et que l'on transportera fictivement, sans changer leur orientation, de manière à y faire coïncider les origines O, a et b seront, comme on a vu au n° 208 (p. 84), les demi-axes A, B de l'intersection que fait le feuillet moyen de la plaque dans un ellipsoïde semblable à celui des conductibilités et passant par les deux ellipses de l'ellipsoïde principal qui, tangentes à l'intersection de celui-ci par le même feuillet moyen, se trouvent être, en même temps, conjuguées à l'axe d'asymétrie. *Les lignes isothermes*

$$\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}=\text{const.},$$

tracées sur le feuillet moyen de chaque plaque, seront donc les intersections de la plaque par divers ellipsoïdes lieux de points isothermes des barres, c'est-à-dire concentriques et homothétiques à l'ellipsoïde des conductibilités.

Ici, l'équation indéfinie, qui est (16) (p. 77), contient, il est vrai, au lieu de la température u au point (X, Y) du feuillet moyen, une moyenne U, savoir, celle des températures vraies le long d'une petite droite d'orientation fixe, passant par ce point (X, Y); mais la différence $U - u$ est encore insensible.

Considérons, en particulier, les plaques taillées suivant l'axe d'asymétrie, ou pour lesquelles l'ellipsoïde indicateur de leurs conductibilités principales n'est autre que l'ellipsoïde des conductibilités. Celui-ci sera évidemment un lieu de courbes à égale température pour toutes ces plaques. Et si l'on prend, dans les autres plaques, les lignes isothermes qui offrent précisément cette température, elles se trouveront, de même, sur les ellipsoïdes indicateurs des conductibilités principales de ces plaques. C'est dire que le lieu des courbes marquant cette même température dans toutes les plaques est l'espace total compris entre les deux ellipsoïdes principal et des conductibilités.

238. Importance particulière de l'ellipsoïde des conductibilités. — Comme les lignes isothermes que l'on peut suivre ou constater à la surface des barres ou des plaques se confondent presque avec les points de l'axe de ces barres, ou avec les courbes du feuillet moyen de ces plaques, qui ont leurs températures respectives, on voit que *l'ellipsoïde représentatif des phénomènes observables* dans ces corps *est, non pas l'ellipsoïde principal, mais celui des conductibilités* (¹).

239. Construction des surfaces, planes ou cylindriques, isothermes dans les barres et les plaques. — Occupons-nous maintenant des petites surfaces isothermes existant soit dans les barres,

(¹) Seulement, notre ellipsoïde des conductibilités, qui se confond avec l'ellipsoïde principal dans les corps à contexture symétrique, diffère entièrement de celui que Lamé avait considéré sous ce nom et auquel il avait pensé pour le rôle que joue le nôtre. (*Voir*, dans ses *Leçons sur la Théorie analytique de la chaleur*, le *Discours préliminaire*, p. XIX.)

soit dans les plaques, et que nous savons (t. I, p. 155 et 156) être, à très peu près, dans les barres, les plans qui sont isothermes pour les courants cheminant suivant l'axe, et, dans les plaques, les cylindres décrits, suivant les ellipses isothermes du feuillet moyen, par une génératrice ayant la direction de la droite qui est toujours isotherme pour les courants parallèles au feuillet moyen. Il résulte de la manière même dont on a déterminé plus haut (p. 88) le coefficient A de conductibilité de la barre, ou (p. 79) l'ellipse figurative des conductibilités principales de la plaque, que les plans isothermes offrant une même température dans toutes les barres, et coupant ainsi l'axe sur un même ellipsoïde, isotherme pour toutes, celui des conductibilités, par exemple, seront, si on les prolonge suffisamment, tangents à un même ellipsoïde, l'ellipsoïde principal; et que les cylindres isothermes pour toutes les plaques ou s'appuyant, par exemple, sur les ellipses figuratives de leurs conductibilités principales, se trouveront tous, si on les prolonge aussi, circonscrits à ce même ellipsoïde, l'ellipsoïde principal.

240. Analogie avec certains modes simples d'échauffement d'un corps massif. — Supposons maintenant nos barres et nos plaques non seulement infiniment minces, mais aussi rendues, d'une part, imperméables à la chaleur sur leur superficie, d'autre part, diathermanes, à leur intérieur, au point de garder dans l'équation indéfinie de leurs températures le même terme $\varphi(u)$ pour exprimer la chaleur rayonnante qu'elles émettent. Enfin, admettant qu'elles soient chauffées de même, associons celles qui ont pareille orientation et qui, par exacte juxtaposition ou superposition, peuvent reconstituer un corps homogène, continu et indéfini. Imaginons donc qu'on les agrège ou les empile ainsi, en faisant coïncider, à partir de la source même qui est dans chacune, les bords de leurs petites surfaces isothermes. Celles-ci seront parfaitement planes ou cylindriques, par le fait même que l'imperméabilité des surfaces jointives rendra les courants rigoureusement dirigés soit suivant les *fibres* (ou barres élémentaires) constitutives du milieu, soit dans les plans des *feuillets* (ou plaques élémentaires) dont il sera formé.

Les surfaces isothermes du corps massif ainsi produit seront

donc ou des plans indéfinis parallèles, ou des cylindres de longueur infinie à base d'ellipse, conaxiques et homothétiques, réalisant cette distribution des températures soit par plans parallèles, soit par droites parallèles, dont l'équation indéfinie a été donnée aux nos **198** et **200** (p. 66 et 69). En effet, vu la parité, sur toute l'étendue indéfinie de leur siège ou plan, ou rectiligne, des sources calorifiques qu'il contiendra, la distribution des températures par plans ou par droites parallèles à ce siège se conserve d'elle-même, une fois produite, comme il est évident; et les courants sont, dès lors, dans le corps massif, dirigés d'eux-mêmes, précisément comme on le suppose, par le simple jeu de la conductibilité intérieure, ou sans que les surfaces séparatives des feuillets ou des fibres constituant ce corps aient besoin de rester imperméables. Il y aura donc bien, quant aux températures, identité d'un tel milieu, ainsi chauffé, avec le corps même ayant fourni les barres ou les plaques, supposé muni d'un foyer calorifique, plan ou rectiligne, d'étendue ou de longueur indéfinies.

On voit que, dans tous les milieux analogues, ainsi chauffés pareillement ou sur tout un plan, ou suivant une droite, d'orientation quelconque, *les surfaces isothermes seront constituées par les systèmes de plans tangents parallèles, ou par les cylindres, circonscrits à de mêmes ellipsoïdes, concentriques et homothétiques à l'ellipsoïde principal.* C'est, du reste, ce qu'on pourrait déduire aussi des formes, indiquées aux nos **200** et **198** (p. 69 et 66),

$$C\frac{du}{dt} = \text{soit } a'^2\frac{d^2u}{dx'^2} - \varphi(u) + S, \ \text{ soit } a'^2\frac{d^2u}{dx'^2} + b'^2\frac{d^2u}{dy'^2} - \varphi(u) + S,$$

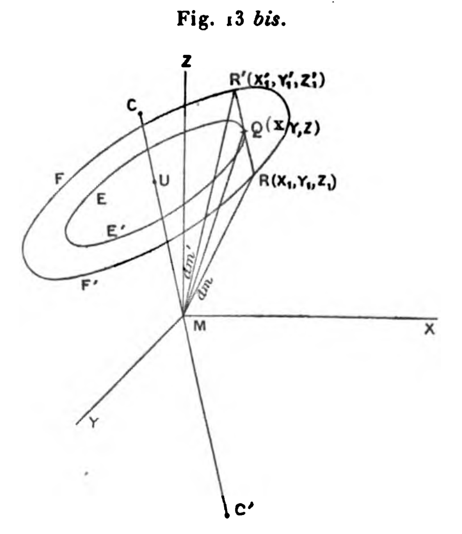
que prend alors l'équation indéfinie; car, même en coordonnées obliques, cette forme rentre encore dans le type (41) (p. 91) et peut être traitée de même.

241. Émission de la chaleur en ligne droite autour d'une source, dans les corps massifs et les plaques de contexture symétrique. — Que la contexture soit ou non symétrique, la chaleur se propage en ligne droite dans une mince barre prismatique, puisque les plans isothermes y ont précisément la direction qu'il faut pour orienter le courant suivant l'axe. Mais, dans les plaques et dans les

corps massifs, la chaleur n'émane généralement en ligne droite, d'une source élémentaire, que si la contexture est symétrique.

En effet, considérons d'abord un corps massif; et soit MQ (*fig.* 13 *bis*) un rayon rectiligne quelconque, issu d'une source ayant son siège en M. Les surfaces isothermes seront des ellipsoïdes concentriques et homothétiques à l'ellipsoïde principal décrit autour de M, dans lequel nous supposerons que EQE′ soit l'ellipse conjuguée menée par le point Q à l'axe d'asymétrie MC du corps [1].

Fig. 13 *bis*.



En tous les points de MQ, les éléments plans isothermes se trouvent donc parallèles au plan tangent en Q à l'ellipsoïde principal; et, par suite, les filets ou courants élémentaires de chaleur y affecteront une orientation commune, celle du courant en Q, donnée, comme on a vu (t. I, p. 146), par le diamètre MR de l'ellipsoïde des conductibilités. Or MR ne se confond avec MQ que si les deux ellipses EQE′, FR′R coïncident; ce qui n'arrive, sauf aux deux extrémités C et C′ du diamètre commun, que dans les corps où, les conductibilités latérales $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ s'annulant, la contexture est symétrique. Les corps massifs à contexture symétrique

(1) La *fig.* 13 *bis* de cette page est simplement la reproduction de la *fig.* 13 du Tome Ier (p. 141).

sont donc bien les seuls où la chaleur suive les rayons rectilignes émanés de la source.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'une plaque ayant sa source calorifique en M. Là encore les éléments plans isothermes seront parallèles, et imposeront aux courants une orientation commune, en tous les points d'un rayon quelconque émané de M dans le feuillet moyen, puisqu'ils appartiendront à des cylindres homothétiques, à base d'ellipse, dont l'axe commun passera par M.

Imaginons le feuillet moyen dirigé de telle manière que le point Q de la figure soit, sur l'ellipsoïde principal à centre M, le point de contact d'une génératrice du cylindre isotherme circonscrit à cet ellipsoïde. Le plan tangent au cylindre tout le long de cette génératrice, et aussi à l'ellipsoïde principal en Q, contiendra, comme on a vu (t. I, p. 146), l'extrémité R du rayon MR de l'ellipsoïde des conductibilités, qui donne la direction du courant traversant effectivement ce plan au pied de la génératrice, point où celle-ci perce le feuillet moyen. Appelons Q′ ce pied de la génératrice. Donc l'extrémité R, située d'ailleurs, non moins que M, sur le feuillet moyen que suivent dans la plaque tous les courants, appartient à la trace Q′R, sur ce même feuillet, du plan tangent, trace qui est la tangente en Q′ à l'ellipse isotherme indicatrice des conductibilités principales de la plaque et intersection du cylindre par le feuillet moyen. Ainsi, MR n'aura la direction du rayon MQ′, c'est-à-dire de la droite joignant la source M au pied de la génératrice, que si le point quelconque Q′ de l'ellipse isotherme en question se confond avec le point correspondant R de l'ellipsoïde des conductibilités, ou si, par conséquent, l'ellipse indicatrice des conductibilités principales de la plaque se trouve placée sur l'ellipsoïde même des conductibilités. Or on sait qu'elle est sur un ellipsoïde concentrique et homothétique à celui des conductibilités, mais non identique, sauf quand on a pris le feuillet moyen suivant l'axe d'asymétrie MC. En dehors de ce cas particulier, il faut donc encore annuler $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, ou identifier les deux ellipsoïdes principal et des conductibilités, en admettant la symétrie de contexture du corps, pour que les courants suivent, dans la plaque, les rayons rectilignes tracés à partir de la source sur le feuillet moyen.

242. Tourbillonnement de la chaleur autour des sources, dans les corps massifs de contexture asymétrique. — Quand la contexture n'est pas symétrique, la construction des courants en chaque point résulte des considérations qui précèdent.

Traitons d'abord le cas du corps massif. Réduisant, par la pensée, la source de chaleur au centre M, observons que, le long du rayon quelconque MQ, les courants, dirigés parallèlement à MR, rasent le plan MQR tangent au cône qui aurait MQ pour génératrice et l'ellipse EQE′ pour directrice. Comme la même circonstance se produit sur toutes les génératrices des cônes analogues qui ont leur sommet en M et pour directrices les ellipses conjuguées à l'axe d'asymétrie MC dans l'ellipsoïde principal, on voit que la chaleur tourbillonne sur tous ces cônes, sans les quitter. Relativement à un observateur qui, les pieds à l'origine et le corps suivant MC, la regarderait s'éloigner de la source M, ou plutôt passer, sans cesse, d'une ellipse parallèle et semblable à EQE′, à l'ellipse extérieure suivante tracée sur le même cône, elle tournerait de gauche à droite; car on se souvient (t. I, p. 146) que MR est à droite de MQ par rapport à l'observateur dont il s'agit.

Les spirales ainsi parcourues, et dont les tangentes reprennent leur direction à chaque spire ou au retour de la courbe sur chaque génératrice MQ, ont le sommet M pour *point asymptote*. En effet, si V désigne l'angle variable QMR et θ l'angle total décrit, à partir d'un rayon donné R_0 sur le cône MEQE′, par le rayon vecteur $R = MQ$ du point Q décrivant une de ces spirales, il est clair que, pour θ croissant de $d\theta$, R grandit, sur une même spirale, de

$$R\, d\theta \tang\left(\frac{\pi}{2} - V\right),$$

ou que l'on a

$$dR = R \cot V\, d\theta, \qquad \text{et, par suite,} \qquad \log\frac{R}{R_0} = \int_0^\theta \cot V\, d\theta.$$

Or, comme V oscille entre deux limites dont la moindre excède zéro et dont l'autre n'atteint pas deux droits, l'intégrale ne devient infinie que pour θ infini; et il y a, dans les deux sens à partir de R_0, une infinité de rotations autour de MC, ou une infinité de spires.

243. Tourbillonnement analogue de la chaleur, dans les plaques de contexture asymétrique. — Passons au cas d'une plaque; et soit, comme plus haut (p. 133), Q' le pied, sur le feuillet moyen, de la génératrice du cylindre isotherme circonscrit à l'ellipsoïde principal qui est tangente en Q à cet ellipsoïde. On a vu que le rayon, MR, de l'ellipsoïde des conductibilités, donnant la direction des courants aux divers points de la droite MQ' émanée de la source, a son extrémité R sur la tangente menée, en Q', à l'ellipse isotherme du feuillet moyen représentative des conductibilités principales de la plaque. Il faudra donc, sur le feuillet moyen, tracer cette ellipse, ainsi que l'ellipse extérieure, concentrique et homothétique, qui est l'intersection de l'ellipsoïde des conductibilités par le même feuillet, et puis mener, en chaque point Q' de l'ellipse intérieure, une tangente $R_1Q'R$, jusqu'à la rencontre de l'ellipse extérieure en deux points R_1 et R. L'un de ces deux points sera l'extrémité cherchée de la droite MR donnant la direction des courants sur le rayon MQ'.

Pour voir lequel des deux on devra choisir, supposons d'abord le feuillet moyen conjugué à l'axe d'asymétrie MC, ou parallèle aux ellipses comme EQE'. Alors le cylindre isotherme circonscrit à l'ellipsoïde principal a son ellipse de contact sur le feuillet moyen lui-même, ou son axe suivant MC; et Q' n'est autre que Q. Donc, pour la plaque ainsi disposée, les ellipses EQE' se réduisent à une seule et se confondent avec l'ellipse isotherme : dès lors, la tangente Q'R se mène de gauche à droite, par rapport à l'observateur ayant ses pieds en M, sur le feuillet moyen, et sa tête suivant la normale à ce feuillet, tirée du côté où est l'axe d'asymétrie MC.

Or, si, à partir de cette position, la plaque, changeant, tourne arbitrairement autour de M, mais de manière que l'observateur qui lui est normal reste sans cesse du côté de l'axe d'asymétrie MC, tous les éléments de la figure se transformeront graduellement, depuis le cylindre isotherme circonscrit à l'ellipsoïde principal, et son ellipse diamétrale de contact, jusqu'à l'ellipse isotherme figurative des conductibilités principales et ses tangentes $R_1Q'R$, aboutissant aux extrémités R des rayons correspondants MR de l'ellipsoïde des conductibilités indicateurs des courants. De plus, ces tangentes $R_1Q'R$ ne s'annuleront, comme on a vu, ou ne rendront

possible un échange entre les deux points R et R_1, qu'au moment final où le feuillet moyen contiendra l'axe d'asymétrie.

Donc, dans toutes les positions de la plaque, la tangente Q'R se tirera de gauche à droite. Et la chaleur émanera, par conséquent, de la source M, en tournoyant sans cesse de gauche à droite dans le plan du feuillet moyen, à mesure qu'elle passera de chaque ellipse isotherme à l'ellipse suivante extérieure. Là encore, le centre M d'émanation est évidemment un point asymptote.

On s'explique dès lors le nom de *coefficients rotationnels,* qui a été donné quelquefois aux conductibilités indirectes ou d'asymétrie $\mathfrak{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathfrak{F}$.

Nous voyons d'ailleurs comment se construira, sur l'ellipsoïde principal, le point de contact, Q, de la génératrice isotherme Q'Q passant par un point donné quelconque Q' de l'ellipse indicatrice. On mènera en Q', de gauche à droite, la tangente Q'R à cette ellipse, jusqu'à la rencontre, en R, de l'ellipsoïde des conductibilités; puis on fera passer par le point R le plan conjugué à l'axe d'asymétrie MC; et son intersection par l'ellipsoïde principal sera l'ellipse EQE', à laquelle, enfin, on mènera de droite à gauche la tangente RQ. Le point Q de contact de celle-ci sera justement celui qu'on cherche, et qu'il faudra joindre à Q' pour avoir la droite isotherme de la plaque en Q'.

On voit aussi que chaque plaque utilisera successivement, dans cette construction, toutes les ellipses EQE' de l'ellipsoïde principal, qui sont conjuguées à l'axe MC d'asymétrie et ont leurs plans respectifs traversés par l'ellipse d'intersection du feuillet moyen et de l'ellipsoïde des conductibilités. Ces plans se trouvent compris entre les deux d'entre eux auxquels est tangente la même ellipse, extérieure et semblable à l'ellipse indicatrice des conductibilités principales de la plaque, tandis que cette dernière ellipse, plus petite, est circonscrite à celle d'intersection de l'ellipsoïde principal par le feuillet moyen, ou inscrite, comme celle-ci, entre les deux plans, encore conjugués à MC (mais moins écartés l'un de l'autre), tangents à l'intersection en question, de l'ellipsoïde principal par le feuillet moyen.

244. Courants et flux de chaleur autour d'une source, dans un corps massif. — Signalons enfin, dans le cas du corps massif

chauffé à l'origine M des coordonnées, quelques propriétés simples des flux de chaleur, aux divers points de l'ellipsoïde isotherme quelconque dont le paramètre r est la racine carrée positive de l'expression

$$r^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Comme cette expression donne

$$\frac{dr}{d(x, y, z)} = \frac{1}{r}\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right),$$

les dérivées partielles de r en x, y, z ont mêmes valeurs tout le long de chaque rayon MQ émané de la source; car x, y, z, r y varient proportionnellement. On peut donc y remplacer les x, y, z relatifs au point où le rayon MQ perce l'ellipsoïde isotherme considéré, par les x, y, z du point Q, situé sur l'ellipsoïde principal pour lequel $r = 1$. Cela posé, et la température u ne dépendant de x, y, z que par la variable r, ses dérivées relatives à x, y, z seront, en un point quelconque de MQ, $\frac{du}{dr}\frac{dr}{d(x, y, z)}$, ou bien, si l'on convient d'y prendre les $\frac{dr}{d(x, y, z)}$ au point Q,

$$\frac{du}{dr}\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right);$$

et les expressions (57) (t. I, p. 130) des flux principaux deviendront

$$F_x = \frac{du}{dr}\left(x - \mathfrak{F}\frac{y}{b^2} + \mathfrak{E}\frac{z}{c^2}\right) = \frac{du}{dr}x_1, \qquad F_y = \frac{du}{dr}y_1, \qquad F_z = \frac{du}{dr}z_1,$$

où x_1, y_1, z_1 désignent les coordonnées du point R correspondant à Q dans l'ellipsoïde des conductibilités (t. I, p. 141, form. 80).

Le courant de chaleur en un point quelconque du rayon MQ sera donc représenté par une droite ayant sur les axes les trois projections $\frac{du}{dr}(x_1, y_1, z_1)$, droite valant dès lors $\frac{du}{dr}\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, ou $\frac{du}{dr}(\text{MR})$, c'est-à-dire, au facteur près $\frac{du}{dr}$, le rayon même MR de l'ellipsoïde des conductibilités, qui se trouve exprimer ainsi le courant en grandeur et en direction. Celui-ci, par unité d'aire, est simplement $\frac{du}{dr}(\text{MR})$, tout le long du rayon MQ.

Le flux sur un élément plan quelconque s'obtiendra en multipliant $\frac{du}{dr}(\mathrm{MR})$ par le cosinus de l'angle que fera avec MR la normale à l'élément. Son expression sera très simple, pour deux sortes d'éléments plans, savoir, d'une part, pour ceux qui sont conjugués à l'axe d'asymétrie MC ou qui constituent, le long de chaque ellipse comme EQE′, une mince zone traversée par un tourbillon conique élémentaire de chaleur, d'autre part, pour les éléments isothermes ou appartenant à l'ellipsoïde de paramètre r.

245. Débit calorifique d'un tourbillon élémentaire. — Considérons d'abord les premiers. Si l'on y appelle δ la distance, à la source M, du plan de la zone elliptique dont il s'agit, contiguë à l'ellipsoïde de paramètre r, la distance analogue pour le plan parallèle mené en Q vaudra évidemment $\frac{\delta}{r}$; et comme ce sera la projection de MR sur la normale aux éléments plans considérés, le cosinus de l'angle cherché sera $\frac{\delta}{r\,\mathrm{MR}}$. On aura donc comme expression du flux $\frac{du}{dr}\frac{\delta}{r}$.

Ainsi, *le flux traversant chaque étroite zone elliptique, section plane d'un tourbillon élémentaire conjuguée à l'axe d'asymétrie, est uniforme sur toute l'étendue de la zone et simplement proportionnel (par unité d'aire) à la distance du plan de la section à la source, pour toutes les zones contiguës à un même ellipsoïde isotherme.*

246. Débit calorifique d'un élément de surface isotherme. — *L'expression du flux est* précisément la même, c'est-à-dire encore $\frac{du}{dr}\frac{\delta}{r}$, et *variable comme la distance δ des plans des éléments à la source,* pour les divers éléments superficiels d'un ellipsoïde isotherme. Car la distance, à l'origine M, du plan tangent mené en (x, y, z), le long de MQ, à l'ellipsoïde $r = \text{const.}$, est, comme on sait,

$$\delta = \frac{r^2}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}} \qquad \left(\text{d'où } \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}} = \frac{\delta}{r^2}\right),$$

tandis que les cosinus directeurs de la normale sont respecti-

vement

$$\frac{\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right)}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}} \quad \text{ou} \quad \frac{\delta}{r}\left(\frac{x}{ra^2}, \frac{y}{rb^2}, \frac{z}{rc^2}\right),$$

expressions dans les dernières desquelles les quantités entre parenthèses, homogènes du degré zéro en x, y, z, r, peuvent être évaluées au point Q du rayon indéfini considéré et, par conséquent, réduites alors à $\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}$. Les cosinus directeurs de MR étant $\frac{(x_1, y_1, z_1)}{\text{MR}}$, il vient, pour le cosinus cherché de l'angle de MR avec la normale à l'élément isotherme, $\frac{\delta}{r\,\text{MR}}\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}\right)$, c'est-à-dire simplement $\frac{\delta}{r\,\text{MR}}$, vu que le point $R(x_1, y_1, z_1)$ appartient au plan tangent en $Q(x, y, z)$ à l'ellipsoïde principal. Et, dès lors, le flux traversant l'élément isotherme considéré devient

$$\frac{du}{dr}(\text{MR})\frac{\delta}{r\,\text{MR}} = \frac{du}{dr}\frac{\delta}{r}.$$

TRENTE-TROISIÈME LEÇON.

DE L'AGITATION CALORIFIQUE OU INVISIBLE, DANS LES CORPS ANIMÉS DE MOUVEMENTS VISIBLES DE DÉFORMATION OU DE VIBRATION : ÉQUATION FONDAMENTALE DE LA THERMODYNAMIQUE.

247. Retour à l'équation des forces vives démontrée dans la deuxième Leçon. — Nous nous sommes borné jusqu'ici, sauf dans la deuxième Leçon, à considérer un corps solide, n'éprouvant aucun autre mouvement visible de déformation, ou vibratoire, que les faibles dilatations provoquées par son échauffement même et dont nous pouvions faire abstraction. Essayons maintenant de mettre en équation les phénomènes, si fréquents, où coexistent au contraire des mouvements visibles et le mouvement calorifique.

On a vu dans la deuxième Leçon (t. I, p. 14 à 28) que, d'une part, l'énergie actuelle s'y compose de la demi-force vive afférente au mouvement visible et de celle, dite *chaleur sensible,* correspondant à l'agitation calorifique (telle qu'elle se fait autour des situations moyennes actuelles des particules à l'époque t); que, d'autre part, l'énergie potentielle s'y compose, dans tout corps d'assez médiocre étendue pour que l'attraction newtonienne mutuelle de ses diverses parties soit négligeable, d'une énergie interne purement élastique, fonction de la configuration moléculaire *moyenne* du corps (ou énergie évaluée en supposant chaque molécule fixée dans sa situation *moyenne*) et d'une énergie calorifique, dite *chaleur potentielle;* enfin, que le travail extérieur comprend les travaux, dans le mouvement visible, du poids du corps et des pressions exercées sur sa surface, plus les *flux* de chaleur *entrés* par les divers éléments de celle-ci. Or groupons ensemble, dans l'équation des forces vives où elles se trouvent

ajoutées, la chaleur sensible, la chaleur potentielle et l'énergie purement élastique : nous en ferons une somme appelée simplement *énergie interne,* à raison soit de ce fait qu'elle est cachée dans les divers fragments du corps, et n'apparaît pas comme mouvement visible, soit du caractère qu'elle a d'être *propre* aux particules, ou proportionnelle, dans chacune, au nombre des fragments pareils la composant. Alors l'équation des forces vives, telle que l'établit la deuxième Leçon, s'énoncera en disant que, dans le corps considéré (supposé *athermane* et *sans source* intérieure de chaleur), *la somme de l'énergie actuelle du mouvement visible et de l'énergie interne a pour variation, d'un instant à l'autre, le travail, dans le mouvement visible, du poids du corps et des pressions exercées sur sa surface, accru des flux de chaleur entrés par cette surface.*

248. Ce qu'est l'état élastique de la matière. — En général, dans une particule matérielle soumise à des déformations perceptibles qui changent d'une certaine manière sa figure *visible,* la disposition *intérieure* des molécules n'est pas tout à fait, à un moment donné quelconque du mouvement, ce qu'elle deviendrait plus ou moins vite et resterait définitivement, si la déformation visible s'arrêtait à ce moment donné; car les groupes moléculaires de la particule se rangeraient alors, de la manière la plus simple et la plus stable, *dans l'emplacement total qui leur serait ainsi assigné,* et il leur faudrait un certain temps pour le faire. A une même disposition relative des centres de gravité des groupes moléculaires de la particule, disposition suffisante pour définir la configuration *visible* actuelle, correspondent donc, suivant la manière dont celle-ci a été amenée, une infinité de configurations internes ou invisibles, à éléments innombrables, dont une seule est celle qui se produirait et subsisterait si le mouvement visible était suspendu, et dont l'une ou l'autre, se réalisant à la suite de tel ou tel enchaînement d'états visibles successifs, dépend non d'un seul état visible, mais, *directement,* quoique à des degrés divers, de l'infinité des états qui ont pu se succéder, en effet, dans un certain ordre. Autrement dit, se donner le mouvement *visible* (moyen local) de la particule, ou les situations successives de ses fragments *saisissables,* ne suffit pas pour pouvoir, *à chaque*

instant, construire idéalement la particule *en fonction de la configuration visible au même instant,* y ajoutât-on la connaissance parfaite des rapports qui lient l'invisible au visible; puisqu'une infinité d'états *visibles* successifs peuvent influer, pour des parts distinctes, sur chaque configuration moléculaire *interne* (même abstraction faite de l'agitation calorifique, ou en imaginant les molécules maintenues dans leurs situations moyennes).

Ainsi, se donner les diverses configurations apparentes de la particule équivaut seulement (et encore dans un solide assez peu déformé pour garder inaltérée sa contexture élastique) à se donner les configurations moléculaires qui se réaliseraient et subsisteraient si, comme il vient d'être dit, chacune des figures *visibles* successives de la particule, une fois produite, se conservait indéfiniment. Dans un fluide, cela n'équivaut même qu'à se donner les configurations *isotropes*, ou intérieurement pareilles *en tous sens*, que prendrait et garderait la particule (avec échanges possibles de rôle ou de place entre molécules), si les déformations visibles s'arrêtaient, aux divers moments du phénomène. Les écarts entre la configuration interne *vraie* de la particule, à chaque instant, et sa configuration idéale d'équilibre intérieur ou *de repos* pour la place qu'elle occupe alors, croissent, naturellement, avec la rapidité du mouvement de déformation : ils ne s'annuleraient en toute rigueur que lors de déformations visibles *infiniment lentes*.

Cela posé, dans la plupart des solides déformés entre leurs *limites d'élasticité* ou sans altération de contexture (c'est-à-dire reprenant leur figure première après suppression des actions déformatrices), et dans les fluides proprement dits ou non visqueux, les écarts dont il s'agit ici, qui empêchent la configuration interne d'une particule d'être la même fonction de sa figure *visible* actuelle à l'état de mouvement qu'à l'état de repos, sont néanmoins assez faibles, sauf lors de déformations extrêmement rapides; et ils n'ont pas une influence notable, en dehors des phénomènes où s'accuse le petit *frottement intérieur* des fluides ou des solides. On peut donc, avec une certaine approximation, les négliger et, abstraction faite de l'agitation calorifique, regarder la configuration interne de chaque particule comme dépendant uniquement du changement visible de volume et de forme éprouvé à partir d'un état primitif censé connu, si la particule est solide, ou

comme dépendant seulement de son changement relatif soit de volume, soit, ce qui revient au même, de densité, si elle est fluide. La particule est dite alors à l'*état élastique,* parce que les pressions exercées sur ses éléments plans sont les forces qualifiées ordinairement d'*élastiques*.

249. Extension de la notion de température, et des formules des flux de chaleur, aux particules matérielles élastiques, animées à la fois d'agitation calorifique et de mouvements visibles. — Une fois admis ce qui précède (ou les frottements intérieurs censés négligeables), les actions intermoléculaires, étant *fonctions de la configuration interne,* sont très sensiblement les mêmes que dans la particule maintenue en équilibre apparent ou privée de son mouvement visible; et, par suite, une agitation calorifique quelconque y survenant, ou, plutôt, l'agitation calorifique vraie dont on faisait abstraction, désormais restituée, s'y produisent à fort peu près comme si le mouvement visible n'existait pas, c'est-à-dire en donnant lieu très sensiblement, pour pareils degrés d'agitation et aux diverses phases du mouvement vibratoire, aux mêmes déplacements de part et d'autre des situations moyennes, aux mêmes actions et réactions intérieures et, enfin, aux mêmes travaux de ces actions entre molécules que dans la particule à l'état de repos apparent. D'où il suit : 1° que la *température,* caractéristique du degré actuel de cette agitation dans chaque région de la particule supposée rester en place, le caractérisera ou le définira aussi dans la particule animée de son mouvement visible, lequel altère bien sa figure, mais seulement avec une extrême lenteur relative (vu la brièveté des périodes de l'agitation, de l'ordre du trillionième ou du quatrillionième de seconde); et, 2° que les sommes de travaux afférents aux déplacements calorifiques, dites *flux de chaleur,* s'exprimeront, en fonction des *pentes* ou *dérivées* premières de cette température suivant trois sens rectangulaires, pour les divers éléments plans *matériels* de la particule en mouvement visible, comme dans la particule en repos apparent.

Il est vrai que, durant un instant dt, la matière contiguë à l'élément plan de la particule considéré éprouvera un commencement de déformation visible ou moyenne locale et, par rapport à l'élément plan, de légers déplacements; mais ce seront, à côté de l'in-

fluence capitale des pentes de la température, des circonstances insignifiantes, pour l'expression des flux, et seulement propres à altérer les coefficients de conductibilité dans un rapport infinitésimal.

Enfin, pour la même raison, l'énergie interne sera, dans chaque fragment de la particule, la même fonction de la température que si la particule n'avait aucun mouvement visible; et les pressions, ou sommes d'actions moléculaires, exercées sur ses divers éléments plans, seront aussi les mêmes fonctions de la température que dans la particule censée occuper d'une manière permanente son emplacement actuel.

Les considérations qui ont prouvé, dans le cas d'une particule en repos apparent, la quasi-neutralisation des flux de chaleur sur toute sa surface (t. I, p. 100 à 105), s'appliquent, sans y rien changer, à une particule qui se déforme; et il continue à en résulter, en particulier, *l'égalité du flux sortant d'un corps au flux entrant dans le corps contigu,* même quand il peut y avoir vitesse finie de glissement des deux couches superficielles de ces corps l'une sur l'autre, comme dans un écoulement de mercure, sur du verre, par exemple.

250. Variables dont dépendent l'énergie interne, les pressions et les coefficients de conductibilité, dans les fluides et dans les solides élastiques. — L'énergie interne, les pressions, les coefficients de conductibilité, fonctions déterminées, dans une même particule *à l'état élastique,* de sa configuration visible actuelle et, en outre, de la température en tant que définissant l'agitation, ne pourront donc dépendre que de la densité et de la température, si la particule est fluide; car alors, grâce à la reconstitution incessante de l'isotropie, le volume (lié à la densité) sera la seule circonstance de la configuration visible, qui influe sur la structure moléculaire interne. Nous appellerons :

ϖ le volume actuel de la particule;

ρ sa densité et $M = \rho\varpi$ sa masse;

θ sa température;

p, dans le cas actuellement considéré d'une particule fluide, la pression par unité d'aire, normale sur tout élément plan et égale sur les éléments plans se croisant en un même point de la parti-

ticule ou même, très sensiblement, dans toute son étendue, à raison de la petitesse de ses dimensions;

Enfin, U l'énergie interne de son unité de masse, ou $MU = \rho U \varpi$ l'énergie interne de la particule, et K son coefficient de conductibilité calorifique, unique à raison de l'isotropie du fluide.

Il est clair que p, U, K seront trois certaines fonctions de ρ et de θ, fonctions changeant seulement avec la nature chimique du fluide ou caractéristiques de sa composition. En particulier, l'énergie interne U sera l'analogue de ce qu'était la chaleur totale, par unité de masse, des particules solides considérées jusqu'ici, à dilatation à peu près insensible par la chaleur et que l'on supposait d'ailleurs, du moins dans les solides à température presque uniforme, se faire librement, grâce à l'absence de toute pression notable sur la surface ([1]). L'énergie interne comprend, il est vrai, outre la chaleur totale, l'énergie purement élastique; mais nous pouvions faire abstraction de celle-ci, dans nos solides en repos apparent et à surface libre, où elle ne se trouvait pas en jeu.

Passons maintenant à ce cas d'une particule solide, que nous supposerons assez éloignée de son point de fusion pour pouvoir être regardée plutôt comme voisine du zéro absolu, et que nous prendrons, en outre, un peu écartée, par des déformations *élastiques,* de l'état, dit *naturel,* où, à la température qu'elle a, aucune pression sensible ne s'exercerait sur sa surface, ni, par suite (vu sa petitesse), sur ses éléments plans intérieurs. Considérons-y trois *fibres,* ou files matérielles de molécules, sensiblement rectangulaires, se croisant en un de ses points : les trois *dilatations* linéaires (rapports de leurs allongements effectifs à leurs longueurs primitives), qu'elles auront éprouvées à partir de l'état naturel, et leurs trois *glissements* relatifs (légers décroissements de leurs angles) seront, en tout, *six* petites *déformations élémentaires,* définissant complètement le changement *visible* de configuration de la particule, comme on le démontre dans la théorie de l'élasticité. Si, pour fixer les idées, on suppose ces trois fibres, ou éléments matériels rectilignes, que nous appellerons ds_x, ds_y, ds_z, à peu près parallèles aux axes des x, y, z dans tous les états de la

---

([1]) Sauf une pression atmosphérique *constante,* qu'on peut le plus souvent négliger.

particule, leurs trois dilatations se représenteront par ∂_x, ∂_y, ∂_z et les glissements relatifs des fibres ds_y et ds_z, ds_z et ds_x, ds_x et ds_y, par g_x, g_y, g_z.

Le changement interne de configuration de la particule, à partir de l'état naturel correspondant à la température θ effectivement existante ou donnée, sera donc défini au moyen des six variables ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_x, g_y, g_z, auxquelles se joindra cette température θ réglant les effets généraux de l'agitation calorifique. Ainsi, l'énergie interne U de l'unité de masse, les pressions exercées sur l'unité d'aire des éléments plans matériels de la particule, décomposées suivant des directions bien définies dans celle-ci, enfin les coefficients de conductibilité calorifique, figurant dans l'expression des flux relatifs à ces éléments plans, seront certaines fonctions, parfaitement déterminées, de ces sept variables, que nous appellerons, pour abréger, les ∂, g et θ.

Toutefois, les petites déformations ∂, g ne modifient évidemment pas beaucoup la configuration; et, par suite, dans les termes où figurera déjà un facteur très petit, on pourra, avec une faible erreur relative, dans l'évaluation des autres facteurs, raisonner comme si, à température constante, l'état naturel persistait, ou que les ∂, g fussent nuls. Par exemple, les coefficients de conductibilité, que multiplieront les dérivées de grandeur modérée $\frac{d\theta}{d(x,y,z)}$, seront sensiblement les mêmes dans la particule déformée *élastiquement* que dans la particule à l'état naturel.

Passons à l'énergie interne U. A l'état naturel où les ∂, g sont nuls, sa valeur, que nous appellerons alors Ψ, dépend seulement de la température absolue T, c'est-à-dire de $T_0 + \theta$, où T_0 désigne la température absolue choisie comme *origine* de la variable *de grandeur modérée* θ. Par suite, si les ∂, g s'écartent de zéro, la différence $U - \Psi$ sera une certaine fonction Φ des ∂, g s'annulant avec ceux-ci. Or, on peut admettre qu'aux températures assez basses cette fonction Φ diffère relativement peu de ce qu'elle est, pour mêmes valeurs des ∂, g, au zéro absolu. Sans négliger entièrement sa variation avec T, nous la supposerons, à une première approximation, assez lente, dans notre solide *éloigné de son point de fusion,* pour que, lorsque nous remplacerons T par $T_0 + \theta$, la partie de cette variation correspondant aux légers

changements θ de la température soit négligeable. Ainsi, notre énergie interne U, exprimée au moyen des δ, g et θ, se composera, du moins dans une première étude, d'une partie *élastique*, Φ, dépendant *seulement* des déformations δ, g, avec lesquelles elle s'annule, et d'une partie *calorifique* Ψ, fonction seulement de la température θ.

251. Équation fondamentale de la Thermodynamique. — Il est temps maintenant de revenir à notre équation des forces vives (p. 141), pour en éliminer le plus possible les éléments du mouvement visible et la rendre, par là, propre à nous renseigner sur l'agitation invisible, ou, plus précisément, sur le changement élémentaire de la température, puisque celle-ci définit cette agitation dans ses caractères généraux.

Appliquée à une simple particule M, fluide ou solide, l'équation dont il s'agit contient à son premier membre, avec la variation élémentaire MdU de l'énergie interne MU, la différentielle, relative au temps, de la demi-force vive du mouvement visible, lequel se confond très sensiblement avec le mouvement du centre de gravité de la particule. Mais l'accélération du centre de gravité est produite par la résultante de toutes les actions effectives exercées du dehors, censées appliquées au centre de gravité même, où l'on aurait accumulé toute la masse M. Ainsi, la différentielle de la demi-force vive en question, relative au mouvement visible, égale le travail des actions extérieures, poids et pressions, dans le mouvement du centre de gravité. Or ce travail figure justement au second membre, mais pour le mouvement visible total et non pas seulement pour celui du centre de gravité. Si donc on supprime, au premier membre, la différentielle de la demi-force vive du mouvement visible, pour n'y laisser subsister que le terme MdU, il faudra ne laisser subsister, au second, du travail total du poids et des pressions, que la portion relative au mouvement visible de la particule *par rapport à son centre de gravité*. Alors le poids, qu'on peut supposer appliqué au centre de gravité même, donne un travail nul; et il reste seulement le travail des pressions.

De plus, l'état physique variant peu dans l'étendue d'une particule, les pressions sur des éléments plans parallèles quelconques n'y éprouvent, d'un point à l'autre, que des variations de l'ordre

des dimensions mêmes, ou très petites du premier ordre; et l'on peut remplacer, sur chaque élément de la surface, ces pressions par leur valeur, au centre de gravité, sur un élément plan égal et parallèle (valeur fonction de l'état physique existant en ce centre), plus une petite différence, de l'ordre du rayon de la particule. Sur toute la surface, qui est du second ordre, la somme absolue de ces petites différences est donc du troisième; et la somme de leurs travaux durant un instant dt, pour les déplacements visibles évalués par rapport à des axes d'orientation constante se croisant au centre, est au moins du quatrième ordre en petitesse, quand on la rapporte à l'unité de temps; car les déplacements dont il s'agit seront au plus, dans un temps quelconque, comparables aux dimensions de la particule. Or, au contraire, le travail de la partie principale des pressions (celle qui correspond à l'état physique du centre de gravité) est de l'ordre de la somme totale de ces pressions respectivement multipliées par les déplacements dont il s'agit, ou du troisième ordre, comme l'est également la somme des flux de chaleur entrés par la surface et comme l'est aussi, à raison de son facteur M, l'énergie interne MU ou, par suite, sa variation dans l'unité de temps.

Nous appellerons $d\mathfrak{G}$ le travail élémentaire des pressions, censées ainsi réduites, par des altérations très petites, à ce qu'elles seraient sur les divers éléments de la surface si l'état physique était, sous ces éléments, ce qu'il est au centre, ou se trouvait *uniforme* dans toute la particule. Ce travail pourra d'ailleurs être évalué, à l'occasion, dans le mouvement visible tout entier et non dans le mouvement relatif à des axes d'orientation constante menés par le centre; car l'hypothèse d'un état physique uniforme assure l'équilibre exact des pressions sur toute la surface de la particule ([1]), de sorte que, transportées au centre de gravité, les pressions réduites comme on l'admet donnent une résultante nulle et, par suite, un travail nul dans le mouvement effectif du centre.

Appelons dQ la somme des flux de chaleur entrés dans la particule durant un instant dt; et l'équation des forces vives, ainsi

---

([1]) Cette proposition, presque évidente, sera d'ailleurs établie rigoureusement dans la note qui termine le numéro suivant.

réduite à trois termes, sera

$$\text{(1)} \qquad M\,dU = dQ + d\mathfrak{T}.$$

C'est *l'équation fondamentale de la Thermodynamique*. On la démontre, d'ordinaire, pour une masse fluide d'étendue finie, et non pour une particule quelconque, mais en faisant abstraction de la pesanteur, et en produisant assez lentement la compression ou la détente du fluide pour que le mouvement visible ait sa demi-force vive constamment négligeable ([1]). Comme cela suppose réalisés, à chaque instant, l'équilibre du fluide et, par conséquent, l'uniformité de sa pression, l'égalisation des pressions convenue dans le calcul du terme $d\mathfrak{T}$ s'y trouve toute faite. Mais la démonstration ainsi donnée n'est pas générale, puisque la formule (1) à laquelle elle conduit subsiste, du moins pour une simple particule, dans le cas de mouvements visibles coexistant avec l'agitation calorifique, non moins que dans celui, auquel on s'y borne, de l'équilibre.

252. Le travail $d\mathfrak{T}$ des pressions qui y figure est un travail de déformation ou relatif au changement des dimensions de la particule. — Il est bon d'observer que, dans la formule (1), le travail $d\mathfrak{T}$ des pressions réduites ou *uniformisées* est un travail correspondant à la déformation ou, du moins, au changement de dimensions de la particule, et non à la rotation qu'elle peut éprouver en même temps autour du centre de gravité; car ce dernier travail serait nul. En effet, l'hypothèse de pressions égales sur les éléments plans parallèles entraîne la neutralisation exacte, dans tout mouvement d'ensemble soit translatif, soit rotatif, de celles qui s'exercent sur la surface, c'est-à-dire l'annulation non seulement de leurs composantes suivant un axe quelconque, mais aussi de leurs moments relatifs à cet axe.

On le voit immédiatement dans le cas d'un fluide, où une même

---

([1]) Au n° 249 (p. 143) nous avons, il est vrai, admis l'extrême lenteur, généralement réalisée, du mouvement relatif visible (ou moyen local) des divers éléments de notre particule, les uns par rapport aux autres, comparativement aux vibrations calorifiques; mais une telle lenteur n'empêche nullement, chez la particule, les grandes vitesses de translation, pouvant donner lieu, dans un corps d'étendue notable, aux rapides déformations de la masse.

pression *normale* p s'exerce alors, par unité d'aire, sur tous les éléments $d\sigma$ de surface de la particule, ou du volume ϖ considéré. Appelant α, β, γ les trois angles d'une normale dn à $d\sigma$, menée vers le dehors, examinons, par exemple, les composantes,

$$-p \cos\alpha \, d\sigma,$$

suivant les x positifs, des pressions extérieures.

Si nous divisons le volume ϖ en filets prismatiques élémentaires parallèles aux x, nous pourrons prendre pour éléments $d\sigma$ les faces limitant ces filets à leurs deux bouts et dont le produit par $\cos\alpha$ exprime, en valeur absolue, la section droite, que j'appellerai ε, des filets. Aux deux bouts d'un même filet, les pressions suivant les x seront donc respectivement $p\varepsilon$, $-p\varepsilon$: exactement égales et opposées, elles ont bien leurs projections totales, sur un même axe, nulles, leurs moments totaux nuls et enfin, dans tout déplacement où la longueur du filet sera invariable, leur travail total nul ([1]).

([1]) **Expression générale du travail $d\mathfrak{T}$ et démonstration analytique de la même équation fondamentale.** — Dans le cas d'un corps quelconque, les composantes, que j'appellerai p_x, p_y, p_z, de la pression exercée sur l'unité d'aire des éléments $d\sigma$, admettent, en fonction des trois cosinus directeurs $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$ de la normale dn, des expressions plus générales, que l'on démontre au début de la *Théorie de l'élasticité*. Ce sont les formules

$$(a) \qquad \begin{cases} p_x = N_x \cos\alpha + T_z \cos\beta + T_y \cos\gamma, \\ p_y = T_z \cos\alpha + N_y \cos\beta + T_x \cos\gamma, \\ p_z = T_y \cos\alpha + T_x \cos\beta + N_z \cos\gamma, \end{cases}$$

où N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z désignent les composantes suivant les axes, au nombre de six distinctes, des pressions exercées, aux mêmes points (x, y, z), sur les trois éléments plans ω_x, ω_y, ω_z perpendiculaires aux axes. Le cas d'un fluide, à pression p, s'en déduit par les hypothèses $N_x = N_y = N_z = -p$, $T_x = 0$, $T_y = 0$, $T_z = 0$.

La supposition d'un état physique uniforme rend ces six composantes N, T indépendantes de x, y, z.

Cela posé, la composante totale et le moment total, relatifs, par exemple, à l'axe des x, des pressions $(p_x d\sigma, p_y d\sigma, p_z d\sigma)$ exercées sur les divers éléments $d\sigma$ de la surface σ limitant le volume ϖ, seront $\int_\sigma p_x \, d\sigma$ et $\int_\sigma (y p_z - z p_y) \, d\sigma$, c'est-à-dire

$$(a') \qquad N_x \int_\sigma \cos\alpha \, d\sigma + T_z \int_\sigma \cos\beta \, d\sigma + T_y \int_\sigma \cos\gamma \, d\sigma$$

253. Expression de ce travail $d\mathfrak{C}$ pour une particule fluide. — Dans le même cas simple d'un fluide à l'état élastique, le travail $d\mathfrak{C}$ s'évalue aisément. La pression normale et uniforme p, à y considérer, donne la force $p\,d\sigma$ sur chaque élément matériel $d\sigma$ de

---

et

$$(a'') \quad \int_\sigma (T_y y - T_z z)\cos\alpha\, d\sigma + \int_\sigma (T_x y - N_y z)\cos\beta\, d\sigma + \int_\sigma (N_z y - T_x z)\cos\gamma\, d\sigma.$$

Transformons, dans ces expressions, les intégrales de surface en intégrales de volume, par la formule générale que nous avons eu plusieurs fois l'occasion d'appliquer et qui, si φ désigne une fonction continue quelconque de x, y, z, est

$$(b) \qquad \int_\sigma \varphi \cos(\alpha, \beta, \gamma)\, d\sigma = \int_\varpi \frac{d\varphi}{d(x, y, z)}\, d\varpi.$$

Il faudra faire successivement, dans les divers termes de (a') et (a''),

$$\varphi = 1, \qquad \varphi = T_y y - T_z z, \qquad \varphi = T_x y - N_y z, \qquad \varphi = N_z y - T_x z.$$

Il viendra bien, identiquement, pour (a'), zéro et, pour (a''), $T_x\varpi - T_x\varpi$, c'est-à-dire encore zéro.

Un procédé analogue permet de former simplement, pour une particule ou même pour un volume ϖ quelconque, l'expression générale du travail $d\mathfrak{C}$.

Soient u, v, w les composantes, fonctions continues en x, y, z, de la vitesse actuelle du mouvement visible. Les déplacements, suivant les axes, durant un instant dt, de l'élément quelconque $d\sigma$ de surface, seront $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$; et l'on aura, pour le travail des trois composantes $p_x\,d\sigma$, $p_y\,d\sigma$, $p_z\,d\sigma$ de la pression qu'il supporte, $dt(p_x u + p_y v + p_z w)\,d\sigma$. Le travail total $d\mathfrak{C}$ sera donc

$$(b') \qquad dt \int_\sigma (p_x u + p_y v + p_z w)\, d\sigma,$$

ou bien, par la substitution à p_x, p_y, p_z de leurs expressions (a),

$$(b'') \quad \left\{ \begin{aligned} & dt \int_\sigma (N_x u + T_z v + T_y w)\cos\alpha\, d\sigma \\ & \quad dt \int_\sigma (T_z u + N_y v + T_x w)\cos\beta\, d\sigma + dt \int_\sigma (T_y u + T_x v + N_z w)\cos\gamma\, d\sigma. \end{aligned} \right.$$

Transformons, par la formule (b), les intégrales de surface en intégrales de volume, sans oublier que les N, T sont ici rendus constants; et nous aurons

$$(b''') \quad \left\{ \begin{aligned} d\mathfrak{C} = dt \int_\varpi \Big[& N_x \frac{du}{dx} + N_y \frac{dv}{dy} + N_z \frac{dw}{dz} \\ & + T_x\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) + T_y\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) + T_z\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\Big]\, d\varpi. \end{aligned} \right.$$

S'il s'agit d'une simple particule, les dérivées continues de u, v, w auront très sensiblement même valeur dans tout son intérieur, et la formule cherchée sera

la surface. Or celui-ci, sensiblement égal et parallèle à lui-même pendant un instant dt, envahit, durant cet instant, l'espace extérieur à la particule, en parcourant, suivant la normale à $d\sigma$, tirée vers le dehors ou en sens inverse de la force, un

---

enfin

$$(c)\quad \left\{ \begin{aligned} d\mathfrak{T} = \varpi\, dt \Big[& N_x \frac{du}{dx} + N_y \frac{dv}{dy} + N_z \frac{dw}{dz} \\ & + T_x \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) + T_y \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) + T_z \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right) \Big]. \end{aligned} \right.$$

Bref, *l'expression du travail $d\mathfrak{T}$, rapporté à l'unité de volume de la particule et à l'unité de temps, se confond avec le sextinome*

$$N_x \frac{du}{dx} + N_y \frac{dv}{dy} + N_z \frac{dw}{dz} + T_x \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) + T_y \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) + T_z \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right).$$

Quand le corps est fluide, ou que les T sont nuls et les N égaux à $-p$, le sextinome se réduit à

$$-p \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right).$$

Or la condition dite *de continuité* (en Hydrodynamique) montre que le trinome multipliant $-p$ a pour valeur $-\frac{\rho'}{\rho}$, où ρ' est la dérivée, par rapport au temps t, de la densité ρ de la particule. D'ailleurs, la masse constante M de celle-ci est le produit de la densité par le volume ϖ; et la différentiation en t de l'égalité $\rho\varpi = M$ permet de substituer $\frac{\varpi'}{\varpi}$ à $-\frac{\rho'}{\rho}$.

Le travail $d\mathfrak{T}$ devient donc, pour une particule fluide,

$$(c')\qquad d\mathfrak{T} = -p\varpi'\, dt = -p\, d\varpi,$$

ou le produit, au signe près, de la pression par l'accroissement élémentaire du volume. C'est précisément ce que nous donnera, au numéro suivant (p. 153), une démonstration purement géométrique.

Il suffirait de transformer par la même méthode l'expression générale (b'') du travail des pressions, mais sans y *uniformiser* celles-ci, c'est-à-dire en attribuant aux forces N, T leurs grandeurs effectives fonctions de x, y, z, pour avoir sa valeur dans le mouvement visible absolu, ou telle que le contenait l'équation des forces vives d'où nous sommes partis (p. 141) dans cette Leçon. Cette valeur comprendra, outre les termes de l'expression (b'''), constituant $d\mathfrak{T}$, l'ensemble de ceux que donne la différentiation des N, T en x, y, z, savoir

$$(d)\quad \left\{ \begin{aligned} dt \int_\varpi \Big[& u \left(\frac{dN_x}{dx} + \frac{dT_z}{dy} + \frac{dT_y}{dz}\right) \\ & + v \left(\frac{dT_z}{dx} + \frac{dN_y}{dy} + \frac{dT_x}{dz}\right) + w \left(\frac{dT_y}{dx} + \frac{dT_x}{dy} + \frac{dN_z}{dz}\right) \Big] d\varpi. \end{aligned} \right.$$

Or, si l'on y joint le travail élémentaire

$$\rho X\, d\varpi . u\, dt + \rho Y\, d\varpi . v\, dt + \rho Z\, d\varpi . w\, dt,$$

petit chemin (positif ou négatif) dn, et en décrivant ainsi un prisme élémentaire généralement oblique, à base $d\sigma$. Le travail correspondant est donc $-p\,d\sigma\,dn$, produit où $d\sigma\,dn$ exprime justement le petit espace prismatique envahi par l'élément $d\sigma$ de surface. Dès lors, le travail total $d\mathfrak{T}$ sera la somme $-p\Sigma\,d\sigma\,dn$, ou le produit de $-p$ par l'accroissement total, positif ou négatif, qu'aura gagné sur l'espace extérieur le volume ϖ de la particule fluide considérée. Et l'on aura

$$(2)\qquad d\mathfrak{T} = -p\,d\varpi \quad \text{(pour une particule fluide).}$$

---

des trois composantes $X\rho\,d\varpi$, $Y\rho\,d\varpi$, $Z\rho\,d\varpi$ du poids de chaque élément $\rho\,d\varpi$ de masse compris dans le volume matériel ϖ, composantes que nous appellerons X, Y, Z par unité de masse, il viendra la somme

$$(d')\qquad dt\int_{\varpi}\left[u\left(\frac{dN_x}{dx}+\frac{dT_z}{dy}+\frac{dT_y}{dz}+\rho X\right)+\dots\right]d\varpi;$$

et les trois équations, bien connues, du mouvement visible des milieux matériels, fournies par l'application du principe des quantités de mouvement, suivant les trois axes, à chaque particule $\rho\,d\varpi$, permettront de la remplacer par la somme

$$(d'')\qquad dt\int_{\varpi}\rho(uu'+vv'+ww')\,d\varpi,$$

où u', v', w' désignent les trois accélérations du mouvement visible, c'est-à-dire la dérivée en t des trois *vitesses* u, v, w *de la particule*. Or cette somme n'est, évidemment, autre chose que l'accroissement élémentaire de la demi-force vive

$$\int_{\varpi}\frac{\rho\,d\varpi}{2}(u^2+v^2+w^2)$$

du volume matériel ϖ dans son mouvement visible, c'est-à-dire, précisément, le terme qui, avec $M\,dU$, constitue le premier membre de l'équation des forces vives.

Ainsi l'analyse fournit d'une manière très naturelle la réduction qui, effectuée intuitivement, nous a permis d'éliminer du premier membre de l'équation des forces vives l'énergie actuelle du mouvement visible, en bornant le second membre au travail des pressions *uniformisées* et aux flux de chaleur.



TRENTE-QUATRIÈME LEÇON.

SUITE : MISE EN ÉQUATION DES PHÉNOMÈNES DE CONVECTION CALORIFIQUE PAR LES FLUIDES; PROPAGATION DE LA CHALEUR DANS UN SOLIDE DÉFORMÉ OU VIBRANT.

---

254. **Équation indéfinie, aux dérivées partielles, de la température dans un fluide en mouvement.** — Nous pouvons maintenant former l'équation indéfinie, aux dérivées partielles, de la température θ, pour un fluide en mouvement et à l'état élastique (état où il se trouvera presque toujours, à très peu près).

Alors les deux variables ρ, θ, densité et température, fonctions continues de x, y, z, t comme les composantes u, v, w de la vitesse *visible*, définissent en chaque point (x, y, z) l'état physique; et les formules (1), (2) (p. 149 et 153) donnent, pour une particule quelconque $M = \rho\varpi$, la relation

$$M\, dU + p\, d\varpi = dQ.$$

Or, d'une part, l'énergie U de l'unité de masse et la pression p y sont deux certaines fonctions, censées données, de ρ et de θ : d'autre part, à raison de l'invariabilité de la masse $\rho\varpi$, $d\varpi$ admet l'expression $-\varpi\frac{\rho'}{\rho}dt$; et M est $\rho\varpi$.

En outre, d'après les formules (110) et (41) du Tome I (p. 169 et 120), dQ a la valeur

$$dQ = \left(\frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz}\right)\varpi\, dt = \left(\frac{d.K\frac{d\theta}{dx}}{dx} + \frac{d.K\frac{d\theta}{dy}}{dy} + \frac{d.K\frac{d\theta}{dz}}{dz}\right)\varpi\, dt,$$

où K est encore une fonction donnée de ρ et de θ.

En remplaçant enfin $d\mathrm{U}$ par

$$\frac{d\mathrm{U}}{d\rho}\rho'\,dt + \frac{d\mathrm{U}}{d\theta}\theta'\,dt,$$

où θ' désignera la dérivée en t de la température θ de la particule, de même que ρ' désigne la dérivée analogue de sa densité, on aura, après division finale par $\varpi\,dt$,

$$(3)\quad \rho\left[\left(\frac{d\mathrm{U}}{d\rho}-\frac{p}{\rho^2}\right)\rho'+\frac{d\mathrm{U}}{d\theta}\theta'\right]=\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d\theta}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(\mathrm{K}\frac{d\theta}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(\mathrm{K}\frac{d\theta}{dz}\right).$$

U, p, K étant, pour une masse fluide de nature donnée, des fonctions censées connues de ρ et de θ, cette équation détermine, en tous les points intérieurs de la masse, la dérivée θ', par rapport au temps, de la température des diverses parties, en fonction de l'état *actuel* et de la dérivée analogue ρ' de la densité. Or, comme celle-ci est définie en fonction de l'état actuel, de même que les accélérations u', v', w', suivant les axes, du mouvement visible, ou dérivées en t des trois vitesses u, v, w des particules, par les équations usuelles de l'Hydrodynamique, le changement élémentaire de la température θ dans chaque particule fluide intérieure se trouve ainsi déterminé. Donc la formule (3) constituera, pour la masse fluide, l'équation aux dérivées partielles de la température; et, en la joignant aux équations classiques d'Euler, ou équations habituelles en u', v', w', ρ' de l'Hydrodynamique, on aura un système complet aux dérivées partielles pour calculer, dans la masse fluide, les valeurs successives des cinq fonctions u, v, w, ρ, θ de x, y, z, t définissant le mouvement visible et l'état physique.

Il va presque sans dire que la dérivée θ', prise en suivant la particule M animée des vitesses u, v, w, sera une dérivée *complète*, analogue à u', v', w', ρ', et non une dérivée, $\frac{d\theta}{dt}$, prise *sur place* ou sans que x, y, z varient. Il faudra, pour l'obtenir, faire croître simultanément t, x, y, z de dt, $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$; de sorte qu'on aura

$$(4)\quad \theta'=\frac{d\theta}{dt}+u\frac{d\theta}{dx}+v\frac{d\theta}{dy}+w\frac{d\theta}{dz}.$$

255. Conditions définies adjointes. — A ce système de cinq

équations *indéfinies* aux dérivées partielles, il faudra joindre les conditions définies ordinaires, spéciales aux surfaces limites, savoir :

1° La connaissance de l'équation de la surface, quand celle-ci sera constituée par une paroi ou fixe, ou animée d'un mouvement donné;

2° L'égalité de la pression p à une constante connue, finie ou nulle, sur les surfaces liquides limitées soit par une atmosphère, soit par l'espace vide;

3° La persistance, sur les surfaces limites, de la couche fluide superficielle, en ce sens que toute particule de la couche superficielle ne cesse pas, à des infiniment petits près du second ordre, de vérifier l'équation de la surface, quand on suit cette particule durant un instant dt, ou qu'on fait croître t de dt et les coordonnées x, y, z de $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$;

4° L'égalité des températures et des flux de chaleur, sur les deux faces de la couche mixte séparant une paroi et un fluide athermane qui y glisse, ou deux pareils fluides contigus;

5° Enfin l'égalité du flux, sortant par une surface libre, à une fonction linéaire donnée de la température θ, quand cette surface libre est celle d'un solide ou d'un liquide *fixe* (non volatil), en contact avec l'éther seul; et, au contraire, l'égalité du flux sortant à une pareille fonction linéaire de θ (exprimant la chaleur rayonnante ou cédée à l'éther), accrue du flux entrant dans le gaz contigu, quand la surface libre dont il s'agit est celle d'un solide ou d'un liquide limités par une atmosphère, à laquelle ils communiquent d'ailleurs leur température θ.

Cette cinquième condition sera la seule, de tout notre système d'équations, où il soit tenu compte des actions propres de l'éther, c'est-à-dire des changements de chaleur condensée en chaleur rayonnante, ou *vice versa*. Autrement dit, nos fluides, y compris même les gaz, seront supposés n'émettre ni n'absorber la chaleur rayonnante, en quantité sensible, dans leurs particules intérieures. Cette hypothèse paraît être bien suffisamment approchée à une première approximation.

Telles seront les équations à intégrer, quand l'état du système étudié sera *permanent*, ou que ρ, θ, u, v, w dépendront de x, y, z, mais non de t. Dans le cas général d'un état *non permanent*,

on devra se donner de plus, en x, y, z, les valeurs dites *initiales* de ρ, θ, u, v, w, à une époque particulière t_0 du phénomène.

256. Importantes simplifications, dans les phénomènes fréquents où la conservation des volumes fluides est admissible. — En dehors des deux hypothèses, familières aux physiciens, d'une température θ uniforme se conservant (*isothermie*) et d'une conductibilité K négligeable (*adiabatie*), la complication d'un tel système d'équations serait désespérante, si la densité ρ éprouvait des variations comparables à sa valeur. Mais, dans la plupart des phénomènes, les vitesses u, v, w changent largement la forme des particules, sans que le volume ϖ et, par suite, la densité ρ éprouvent d'appréciables modifications. Même, par exemple, chez les *gaz*, circulant entre des corps modérément chauds ou froids, la pression, la température absolue, la densité ρ varient de minimes fractions de leurs valeurs totales.

Dès lors, dans l'équation en ρ' (dite de *continuité*), qui a la forme

$$(5)\qquad -\frac{\rho'}{\rho} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz},$$

le premier terme n'est, en général, presque rien *à côté des autres;* et l'on n'altère que très peu l'équation, c'est-à-dire les rapports de grandeur de ces autres termes, en le supprimant. La relation (5), ainsi devenue

$$(6)\qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

exprime alors la *conservation des volumes fluides*.

L'extrême petitesse de la dérivée ρ' ne permettra cependant pas toujours de réduire au terme en θ' le premier membre de l'équation (3); et, cela, à raison des fortes valeurs que pourra y prendre le facteur $\frac{dU}{d\rho}$. Mais une autre circonstance simplificatrice, d'ailleurs distincte de celle de conservation des volumes fluides, se présentera dans les phénomènes que nous étudierons, pour débarrasser également de la variable ρ l'équation (3). Les courants liquides ou gazeux, à température variable, que nous aurons à considérer, appartiendront toujours à une masse fluide assez éten-

due, et à limites assez extensibles, pour que les pressions y varient incomparablement moins qu'elles ne feraient si, par exemple, chaque particule devait, malgré son échauffement, garder en toute rigueur son volume primitif.

Autrement dit, les petits changements de ρ se feront, avec une erreur *relative* négligeable, comme si la fonction p de ρ et de θ avait et gardait, dans tout le fluide à considérer, une valeur constante, savoir, par exemple, une moyenne de ses valeurs vraies. Donc ρ sera très sensiblement la *fonction de* θ définie par l'équation $p =$ cette constante; et ρ' en égalera la dérivée multipliée par θ'. Posons alors, dans (3),

$$C = \rho\left[\frac{dU}{d\theta} + \left(\frac{dU}{d\rho} - \frac{p}{\rho^2}\right)\frac{d\rho}{d\theta}\right], \tag{7}$$

C désignant ce qu'on appelle le *calorique spécifique de l'unité de volume à pression constante;* et, après substitution à ρ, dans C et K, de son expression en θ ainsi définie, l'équation (3) deviendra

$$C\theta' = \frac{d}{dx}\left(K\frac{d\theta}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(K\frac{d\theta}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(K\frac{d\theta}{dz}\right). \tag{8}$$

Comme C et K seront uniquement fonctions de la température θ, cette relation (8) aurait exactement la forme de l'équation indéfinie ordinaire des températures dans un solide athermane, homogène et isotrope, en repos apparent, si la dérivée θ' n'y recevait pas l'expression polynome (4), où figurent les vitesses u, v, w du mouvement visible, et se réduisait à la dérivée *sur place* $\frac{d\theta}{dt}$. Il suffira, d'ailleurs, que la température θ varie entre des limites modérément écartées, pour que C, K soient sensiblement constants; et l'on aura alors l'équation que nous utiliserons, analogue à celle de Fourier pour les solides,

$$\theta' = \frac{K}{C}\Delta_2\theta. \tag{9}$$

257. Accord de ces équations avec celle de Fourier pour les fluides athermanes. — Dans les équations (8) et (9), le terme que fournit le travail mécanique $d\mathfrak{T}$, converti en chaleur, se trouve représenté par la petite partie de C où figure la pression p : il ne

change donc pas la forme de l'équation, vu surtout que la valeur de C sera donnée, *en bloc*, par l'expérience.

Ainsi, la Thermodynamique n'était pas nécessaire pour établir ces équations : l'ancienne hypothèse du fluide calorique y suffisait. De fait, c'est Poisson qui les a obtenues ([1]).

Fourier avait trouvé antérieurement, dans un Travail posthume *Sur le mouvement de la chaleur dans les fluides*, inséré en 1833 (trois ans après la mort de son auteur) au tome XII des *Mémoires de l'Académie des Sciences* de Paris, une équation plus compliquée, en considérant un élément fixe ϖ de l'espace où se meut le fluide et en égalant l'accroissement élémentaire de la chaleur, que j'appellerai $\gamma\varpi$, du fluide contenu à l'époque t dans cet espace, à la somme algébrique de la chaleur qu'y apporte le fluide entrant et de celle qui y pénètre par conductibilité. Il prend celle-ci, comme dans les solides, de la forme $(K\Delta_2\theta)\varpi\, dt$; car il suppose constant le coefficient K de conductibilité. Quant à la précédente, elle s'évalue exactement comme le fait, dans l'équation ordinaire de continuité des fluides, l'excédent de la quantité de matière entrée dans un espace donné ϖ, en vertu des vitesses u, v, w, sur la quantité de matière sortie : elle a donc pour expression, si l'on substitue à la quantité de matière par unité de volume, ou *densité* ρ, la quantité analogue γ de chaleur,

$$-\left(\frac{d.u\gamma}{dx}+\frac{d.v\gamma}{dy}+\frac{d.w\gamma}{dz}\right)\varpi\, dt.$$

Et, l'accroissement total de la quantité $\gamma\varpi$ de chaleur dans l'espace fixe ϖ étant $\frac{d\gamma}{dt}\varpi\, dt$, il vient la relation

$$\frac{d\gamma}{dt}=K\Delta_2\theta-\frac{d.u\gamma}{dx}-\frac{d.v\gamma}{dy}-\frac{d.w\gamma}{dz}. \tag{10}$$

Fourier admet implicitement, sans doute par une analogie instinctive avec le cas des solides qui lui était familier, l'expression $C\theta$ pour la quantité γ de chaleur de l'unité de volume, avec C indépendant de la densité ρ, qu'il supposait cependant variable.

([1]) *Voir*, par exemple, la formule (10) de sa *Théorie mathématique de la chaleur* (p. 93).



D'après cette hypothèse, l'unité de volume d'un fluide à une température donnée ne posséderait pas plus de chaleur sous forte densité que sous faible densité. Faisant donc $\gamma = C\theta$, avec C constant, il ne donne la relation (10) que sous la forme

$$C\frac{d\theta}{dt} = K\Delta_2\theta - C\left(\frac{d.u\theta}{dx} + \frac{d.v\theta}{dy} + \frac{d.w\theta}{dz}\right);$$

car celle-ci est, aux notations près, l'équation (3) de son Mémoire.

Dans les applications que nous ferons de la formule (9), la condition (6) de conservation des volumes fluides sera vérifiée; et l'on voit qu'elle rend bien cette équation de Fourier identique à (9), où θ' a l'expression (4).

Mais si la densité ρ devait varier, il faudrait éviter de prendre C constant, c'est-à-dire de supposer la chaleur γ *de l'unité de volume* indépendante de la densité ρ et proportionnelle à la température θ; car, dans les gaz, seuls fluides où la densité varie beaucoup, c'est plutôt la *chaleur par unité de masse* qui est simplement proportionnelle à la température.

Or, appelons γ_1 cette chaleur par unité de masse, ou posons, dans (10),

$$\gamma = \rho\gamma_1$$

(en continuant d'ailleurs à raisonner, avec Fourier, dans l'hypothèse du fluide calorique); et la substitution de $\rho\gamma_1$ à γ changera aisément l'équation (10) en celle-ci :

$$\rho\frac{d\gamma_1}{dt} + \gamma_1\frac{d\rho}{dt} = K\Delta_2\theta - \gamma_1\left(\frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho v}{dy} + \frac{d.\rho w}{dz}\right) - \rho\left(u\frac{d\gamma_1}{dx} + v\frac{d\gamma_1}{dy} + w\frac{d\gamma_1}{dz}\right),$$

qui, par transposition au premier membre, des deux derniers termes triples, devient elle-même, vu les expressions connues des dérivées *complètes* de fonctions comme ρ et γ_1 par rapport au temps,

$$\rho\gamma_1' + \gamma_1\left[\rho' + \rho\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right)\right] = K\Delta_2\theta.$$

La relation de continuité (5) annulant dans celle-ci le terme en γ_1, on a donc, comme équation de Fourier *rectifiée et ré-*

duite à son expression la plus simple,

$$\rho \gamma_1' = K \Delta_2 \theta. \quad (10\ bis)$$

Or il suffit d'y prendre γ_1 de la forme $c\theta$, puis de faire $\rho c = C$, pour obtenir l'équation (9) de Poisson.

258. Équation indéfinie des températures, dans un solide élastique déformé ou vibrant. — Avant de passer aux applications les plus simples des équations précédentes, jetons un coup d'œil sur le cas d'un solide déformé *élastiquement,* c'est-à-dire ayant ses particules écartées de leur état naturel par les petites déformations ∂, g (p. 146), qui, dans l'état de mouvement du solide, seront six fonctions du temps t et des coordonnées x, y, z. Nous nous bornerons ici [1], comme il a été dit (p. 146), à l'hypothèse de températures absolues assez basses ou, plutôt, assez éloignées de la température de fusion du corps, pour que l'énergie interne U de l'unité de masse soit la somme $\Phi + \Psi$ de deux fonctions distinctes, dépendant seulement, l'une, Φ, des déformations ∂, g, et l'autre, Ψ, de la température θ.

L'expérience montre que, dans un solide éloigné de son point de fusion, pris d'ailleurs à une température initiale uniforme et entouré de corps ou d'éther à cette température, les déformations élastiques soit lentes, soit même rapides ou corrélatives à des vibrations sonores, n'entraînent pas, comme dans les gaz, d'appréciables échauffements ou refroidissements, et que, par suite, elles ne provoquent pas des flux calorifiques sensibles à travers les éléments plans du corps. C'est dire que la production de petites valeurs quelconques des ∂, g, à une température initiale θ constante, laisse négligeable, dans l'équation fondamentale (1) (p. 149), le terme, dQ, exprimant la chaleur gagnée par une particule sur ses voisines. Or, alors, vu la constance de θ, la différentielle dU n'est autre que sa première partie $d\Phi$, et l'équation (1) devient

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} d\mathfrak{T} = M\,d\Phi = M\Big(&\frac{d\Phi}{d\partial_x}d\partial_x + \frac{d\Phi}{d\partial_y}d\partial_y + \frac{d\Phi}{d\partial_z}d\partial_z \\ &+ \frac{d\Phi}{dg_x}dg_x + \frac{d\Phi}{dg_y}dg_y + \frac{d\Phi}{dg_z}dg_z\Big). \end{aligned} \right.$$

[1] C'est-à-dire dans le texte, non dans la grande note ci-après, où la question sera poussée plus loin.

L'expérience montre encore qu'à l'inverse, dans notre solide éloigné de son point de fusion, tout échauffement θ modéré a ses effets mécaniques extrêmement réduits, ou ne produit que des dilatations à peine observables; de sorte qu'un *même* état naturel peut, au point de vue du volume et de la configuration visible, être censé convenir, avec une certaine approximation, à toutes les températures θ dont il s'agit. On comptera donc les déformations élastiques ∂, $\mathfrak{g}$ à partir de cet état naturel *commun :* ce qui, si un changement de température survient, dispensera de considérer les menues déformations propres qu'il amène, ou d'ajouter aux ∂, $\mathfrak{g}$ définis plus haut (p. 145), pour avoir les déformations totales d'une particule à partir d'un premier état, de petites parties, fonctions de θ, correspondant au changement de l'état naturel entre les deux températures primitive et actuelle.

Alors, même à température θ variable, le travail $d\mathfrak{T}$ produit, dans la déformation élémentaire *visible* de la particule, par les pressions qu'elle supporte, s'annulerait si les six différentielles $d\partial_x$, ..., $d\mathfrak{g}_z$ restaient nulles, puisqu'il n'y aurait pas de déformation, au degré d'approximation convenu. Ainsi, $d\mathfrak{T}$ ne contient pas de terme en $d\theta$. De plus, chacune des six différentielles $d\partial_x$, ..., $d\mathfrak{g}_z$ n'entraînant que d'infiniment petites variations des pressions exercées sur la surface, le travail $d\mathfrak{T}$ total sera encore la somme des travaux auxquels donneraient lieu, séparément, les déplacements dus à chacune des déformations $d\partial$, $d\mathfrak{g}$, supposées s'effectuer l'une après l'autre. Et il ne dépendra pas davantage de la variation $d\theta$ de température, encore moins influente que celle des ∂, $\mathfrak{g}$ sur les pressions, d'après l'hypothèse qui annihile son effet sur la configuration visible d'état naturel. Donc, *soit que la température* θ *reste constante, soit qu'elle varie, le travail élémentaire* $d\mathfrak{T}$, *pour chaque particule, égale sensiblement la différentielle totale exacte de la fonction* $M\Phi$ *des* ∂, $\mathfrak{g}$, *énergie potentielle d'élasticité de la particule.*

Dès lors, faisant maintenant varier θ d'une manière quelconque, remplaçons, dans l'équation (1) (p. 149), $d\mathfrak{T}$ par $M\,d\Phi$; et, vu la forme admise $\Phi + \Psi$ de U, il viendra

$$(12)\qquad M\,d\Psi = dQ.$$

Or, la *chaleur*, $\Psi(\theta)$, de l'unité de masse de la particule, a

comme différentielle le produit de la *capacité calorifique*, $\Psi'(\theta)$, de cette unité de masse, par la différentielle $\theta' dt$ de sa température θ. Et nous savons, d'autre part, que la somme, dQ, des flux de chaleur entrés dans le volume ϖ de la particule, durant le même instant dt, a pour expression

$$\left(\frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz}\right) \varpi\, dt,$$

où F_x, F_y, F_z sont (p. 146) les fonctions linéaires, étudiées dans notre premier Volume (p. 115 à 135), des pentes $\frac{d\theta}{d(x, y, z)}$ de la température suivant les sens rectangulaires des x, y, z. En remplaçant de plus M par $\rho\varpi$, et $\rho\Psi'(\theta)$, capacité calorifique de l'unité de volume, par C, il vient l'équation

$$(13) \qquad C\theta' = \frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz}.$$

Cela posé, les déplacements, que nous appellerons ξ, η, ζ, éprouvés suivant les trois axes, à partir d'un état ou *primitif*, ou *moyen*, par la particule solide vibrante qui avait, dans cet état, certaines coordonnées x_0, y_0, z_0, seront toujours fort petits; et ils pourront d'ailleurs être regardés, pour *cette* particule, comme des fonctions de t *seul*, mais, pour l'*ensemble* des particules, comme des fonctions des quatre variables indépendantes t, x_0, y_0, z_0. Il sera donc possible de concevoir effectué un changement de variables substituant x_0, y_0, z_0, t à x, y, z, t : car on a, entre ces variables, les quatre équations

$$x = x_0 + \xi, \qquad y = y_0 + \eta, \qquad z = z_0 + \zeta, \qquad t = t',$$

où, pour éviter toute confusion, le temps est appelé t' quand il se trouve associé à x_0, y_0, z_0; et, en vertu de ces équations, où l'on peut imaginer ξ, η, ζ remplacés par leurs valeurs en x_0, y_0, z_0, t', toute fonction de x, y, z, t, comme θ, devient fonction de x_0, y_0, z_0, t'.

Or, vu la petitesse constante de ξ, η, ζ, les formules symboliques pour transformer les dérivées prises dans l'espace, c'est-à-dire sans faire varier le temps, différeront fort peu de

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx_0}, \qquad \frac{d}{dy} = \frac{d}{dy_0}, \qquad \frac{d}{dz} = \frac{d}{dz_0};$$

et x, y, z différeront aussi fort peu de x_0, y_0, z_0. Donc le second membre de (13) aura très sensiblement, une fois exprimé en x_0, y_0, z_0, la même forme qu'en x, y, z.

Mais alors, au premier membre, la dérivée θ', qui est justement prise, entre les deux époques t, $t + dt$, pour la même particule, ou sans que x_0, y_0, z_0 varient, devient $\frac{d\theta}{dt'}$.

Et, si l'on convient d'effacer les indices o des coordonnées, avec l'accent de t', tout en rapportant effectivement les particules à leurs coordonnées ou primitives, ou moyennes, et non actuelles, l'équation (13) sera enfin

$$C\frac{d\theta}{dt} = \frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz}. \tag{14}$$

Bref, *l'équation indéfinie des températures, dans un solide déformé ou vibrant, est très sensiblement la même que si ses particules restaient immobiles dans leurs situations ou primitives d'équilibre, ou moyennes.*

259. Indépendance mutuelle approchée du mouvement visible et de l'agitation calorifique, dans un solide. — Il en sera évidemment de même de l'expression des flux calorifiques relatifs aux surfaces ou limites, ou séparatives, et, par suite, des conditions définies spéciales à ces surfaces; de sorte que la température θ variera et la chaleur se propagera, dans le solide, comme si le mouvement *visible* de déformation ou de vibration n'existait pas.

Le mouvement visible lui-même, au degré d'approximation supposé par nos formules, se fera comme si les variations modérées θ qu'éprouve la température n'existaient pas davantage. En effet, de ce fait que le travail de déformation $d\varpi$ des pressions exercées sur chaque particule est, pour toutes les variations élémentaires possibles des ∂, g, la différentielle de la fonction $M\Phi$ et se trouve, par suite, indépendant de la température θ, l'on peut conclure que les pressions n'en dépendent pas [1]. Or ce sont elles

[1] Pour le prouver, observons que ces pressions, en chaque point du solide, sont fonctions, comme on a vu dans une note précédente (p. 150), de six d'entre elles, N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z; et que l'expression de $d\varpi$ est (p. 152), par unités de

qui produisent le mouvement visible des particules; et celui-ci doit bien se faire comme si l'on avait $\theta = 0$.

Ainsi, les *trois* hypothèses, prises pour point de départ, de la conservation de la température initiale (quand on la suppose uniforme), dans un solide vibrant élastiquement au sein d'un milieu à cette même température, de la conservation analogue, par une particule modérément chauffée, de sa configuration visible, enfin du dédoublement de l'énergie interne U en deux parties dépendant, l'une, des déformations visibles ∂, g seules, l'autre, de la température θ seule, impliquent *l'indépendance mutuelle du mouvement visible et de l'agitation calorifique.*

---

volume et de temps,

$$(e)\quad N_x \frac{du}{dx} + N_y \frac{dv}{dy} + N_z \frac{dw}{dz} + T_x\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right) + T_y\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right) + T_z\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right).$$

Les neuf dérivées $\frac{d(u,v,w)}{d(x,y,z)}$ gardent à très peu près, comme on vient de le remarquer, la même forme, quand x, y, z y sont les coordonnées primitives ou moyennes, et non pas les coordonnées actuelles. Or, alors, les vitesses u, v, w deviennent les dérivées partielles $\frac{d(\xi,\eta,\zeta)}{dt}$; et l'expression (e), multipliée par dt, donne, comme travail $d\mathfrak{G}$ par unité de volume,

$$(e')\quad \left\{ \begin{array}{l} N_x\, d\frac{d\xi}{dx} + N_y\, d\frac{d\eta}{dy} + N_z\, d\frac{d\zeta}{dz} \\ \qquad + T_x\, d\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) + T_y\, d\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right) + T_z\, d\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right). \end{array} \right.$$

Mais on démontre, dans la théorie générale des petites déformations dues à des déplacements donnés ξ, η, ζ, théorie faisant partie de celle de l'Élasticité, que les *petites* déformations élémentaires $\partial_x, \partial_y, \partial_z, g_x, g_y, g_z$ subies par une *particule* à partir de *son état naturel*, soit *actuel*, soit même *primitif*, ont, pour leurs différentielles d'un instant à l'autre, précisément les expressions

$$d\frac{d\xi}{dx},\quad d\frac{d\eta}{dy},\quad \ldots,\quad d\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right);$$

car ces déformations elles-mêmes (comptées à partir de l'état naturel dont il s'agit) égalent très sensiblement, pour chaque particule, leurs petites valeurs constantes dans l'état particulier à partir duquel se comptent les petits déplacements ξ, η, ζ, accrues respectivement des six termes variables, simples ou doubles, $\frac{d\xi}{dx}, \frac{d\eta}{dy}, \ldots, \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)$. Et, d'autre part, les six composantes de pression $N_x, \ldots, T_z$, exercées, suivant les trois axes, sur l'unité d'aire *actuelle* des éléments plans *actuellement* normaux aux x, y, z, ne diffèrent pas sensiblement des pressions analogues, décomposées suivant les trois éléments matériels recti-

On pourrait, il est vrai, se dispenser de joindre la troisième hypothèse aux deux premières. Car celles-ci donnent (p. 161 et 162), pour l'expression dU formée *à température* θ *constante*, une valeur $\frac{d\mathfrak{T}}{M}$, où θ ne figure pas et qui est dès lors la différentielle totale exacte d'une certaine fonction Φ des déformations ∂, g seules; d'où il suit bien que la différence $U - \Phi$ a sa différentielle en ∂, g nulle quel que soit θ et se réduit à une simple fonction Ψ de θ, ou que la troisième hypothèse, $U = \Phi + \Psi$, résulte des deux premières. Toutefois, il convenait de la formuler et même de la signaler spécialement; car elle paraît subsister, du moins convenablement entendue, à un degré d'approximation plus élevé que les deux premières, comme on verra (p. 171) vers la fin de la Note par laquelle je vais compléter le présent aperçu (¹).

---

lignes ds_x, ds_y, ds_z de la particule, que supporte l'unité d'aire *primitive* des trois éléments plans, matériels aussi, contenant chacun deux de ces éléments rectilignes, composantes qui sont évidemment, dans le cas le plus général, des fonctions déterminées des ∂, g et de θ.

Enfin, M $d\Phi$ s'écrit encore $\rho\varpi\, d\Phi$, ou $d(\rho\Phi)\varpi$, produit où la densité actuelle ρ est censée remplacée par la densité *invariable*, très peu différente, de la particule à l'état naturel et à température θ nulle.

Cela donne, pour l'unité du volume actuel ϖ, une variation $d.\rho\Phi$, d'énergie élastique, où $\rho\Phi$ est, ici, fonction seulement des ∂, g; et, de son égalité à (e'), telle qu'elle est établie dans le texte, il résulte

$$N_x\, d\partial_x + N_y\, d\partial_y + \ldots + T_z\, dg_z = d.\rho\Phi = \frac{d.\rho\Phi}{d\partial_x} d\partial_x + \frac{d.\rho\Phi}{d\partial_y} d\partial_y + \ldots + \frac{d.\rho\Phi}{dg_z} dg_z,$$

c'est-à-dire, vu l'indépendance mutuelle des différentielles $d\partial_x$, $d\partial_y$, ..., dg_z,

$$(e'') \quad \begin{cases} N_x = \dfrac{d.\rho\Phi}{d\partial_x}, & N_y = \dfrac{d.\rho\Phi}{d\partial_y}, & N_z = \dfrac{d.\rho\Phi}{d\partial_z}, \\ T_x = \dfrac{d.\rho\Phi}{dg_x}, & T_y = \dfrac{d.\rho\Phi}{dg_y}, & T_z = \dfrac{d.\rho\Phi}{dg_z}. \end{cases}$$

On voit bien que les *pressions* N, T de la particule, *dérivées partielles premières*, relatives aux déformations correspondantes ∂, g, *du potentiel d'élasticité* $\rho\Phi$ supposé *ici* indépendant de la température, n'en dépendent pas davantage.

(¹) **Petites dilatations thermiques d'un solide; son potentiel d'élasticité et son énergie interne à une deuxième approximation.** — Cette première approximation du texte est évidemment une simple synthèse, sans pénétration réciproque, de la théorie de l'élasticité, telle qu'on l'a considérée en général jusqu'ici, et de la théorie analytique de la chaleur, réduite à l'ordre de phénomènes que Fourier soumettait à son analyse. Et elle s'applique dans la limite des variations soit de forme, soit de température, que supposent les expé-

260. Problèmes les plus simples de convection calorifique. — Puisque la chaleur se propage, du moins à une première approxi-

---

riences confirmatrices de ces théories respectives, ainsi dérivées d'une même doctrine. Mais il faut pousser plus loin les calculs, si l'on veut atteindre le phénomène de la dilatation des solides par la chaleur.

Abordons-en l'étude en généralisant, pour l'étendre aux variations modérées θ de la température, le principe expérimental, formulé vers 1678 par Robert Hooke (*ut extensio sic vis*), de la proportionnalité des forces élastiques aux extensions ou déformations qui les provoquent. Ainsi, nous supposerons *linéaires* non seulement par rapport aux ∂, g, mais aussi par rapport à θ, les six forces N, T dont il a été parlé dans la note précédente (p. 165), mais qui seront produites maintenant, à l'intérieur ou sur les faces de la particule ϖ, par l'échauffement θ concurremment avec les déformations ∂, g, *à partir de l'état naturel relatif à la température spéciale* $\theta = 0$. Il est donc entendu que, pour n'avoir pas à ajouter aux ∂, g définis plus haut (p. 146) les petites déformations spéciales, fonctions de θ, dues au changement de l'état naturel entre la température prise comme origine et la température actuelle, nous appelons ∂, g les déformations totales mêmes, en partie *thermiques* et en partie *élastiques*, éprouvées par la particule depuis l'état naturel correspondant à la température origine, tandis que, jusqu'ici, ∂, g désignaient leurs parties purement élastiques, ou comptées seulement depuis l'état naturel relatif à la température effective θ.

Et nous aurons six formules de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} (N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z) = \text{des fonctions linéaires homogènes} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{de } \theta, \partial_x, \partial_y, \partial_z, g_x, g_y, g_z. \end{array} \right.$$

Les *coefficients d'élasticité* dans ces formules, ou coefficients des ∂, g, ne dépendront pas de θ; car leurs petites variations dues aux élévations modérées θ de la température n'ajouteraient, une fois multipliées par les ∂, g, que des termes du second ordre.

Il ne s'adjoindra donc, aux formules ordinaires des N, T, que les termes simplement proportionnels à θ, et que nous écrirons, respectivement, $-\nu_x\theta$, $-\nu_y\theta$, $-\nu_z\theta$, $-\tau_x\theta$, $-\tau_y\theta$, $-\tau_z\theta$ dans N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z. Rien n'obligeant à modifier les résultats de première approximation en ce qui concerne les autres termes, relatifs à la température fixe $\theta = 0$, admettons provisoirement, pour plus de simplicité et sauf à reconnaître bientôt l'exactitude de notre hypothèse, que l'ensemble de ces autres termes continuera à être les dérivées premières d'une fonction $\rho\Phi$ des ∂, g seuls, laquelle sera évidemment une fonction homogène et entière du second degré. Et si nous posons, pour abréger,

$$(i) \qquad \rho\Phi' = -\theta(\nu_x\partial_x + \nu_y\partial_y + \nu_z\partial_z + \tau_x g_x + \tau_y g_y + \tau_z g_z) + \rho\Phi,$$

les nouvelles expressions des forces N, T seront encore les dérivées respectives, par rapport aux ∂, g, d'un *potentiel*, savoir, de la fonction $\rho\Phi'$ des ∂, g, θ; en sorte que, d'une part, l'on aura

$$(i') \qquad N_x = \frac{d.\rho\Phi'}{d\partial_x}, \qquad N_y = \frac{d.\rho\Phi'}{d\partial_y}, \qquad \ldots, \qquad T_z = \frac{d.\rho\Phi'}{dg_z},$$

et, d'autre part, vu la formule (e') de $d\mathfrak{T}$, en rapportant le travail de déforma-

mation, dans un solide qui se déforme comme dans un solide en repos, il n'y a pas lieu de nous arrêter davantage au problème de

---

tion $d\mathfrak{G}$ à l'unité de volume actuel ou même primitif,

$$(i'') \qquad d\mathfrak{G} = N_x\, d\partial_x + \ldots + T_z\, dg_z = d.\rho\Phi' - \frac{d.\rho\Phi'}{d\theta} d\theta.$$

Mais voyons comment se calculeront, pour la particule, les déformations *thermiques* ordinaires, c'est-à-dire produites, *à l'état naturel* ou pour des valeurs sans cesse nulles des N, T, par les variations θ de la température. Les expressions (i') des N, T étant homogènes du premier degré en ∂, g, θ, les six équations $(N, T) = 0$, résolues par rapport aux six déformations ∂, g, donneront à celles-ci des valeurs de la forme

$$(i''') \quad \partial_x = D_x\theta, \quad \partial_y = D_y\theta, \quad \partial_z = D_z\theta, \quad g_x = G_x\theta, \quad g_y = G_y\theta, \quad g_z = G_z\theta,$$

avec six coefficients *de déformation thermique* D, G. Les déformations thermiques de la particule seront donc *proportionnelles à l'échauffement* θ.

Il résulte d'un théorème de Cauchy sur toute déformation continue, qu'une sphère, idéalement découpée dans la particule en son primitif état naturel, se sera changée en un ellipsoïde, et que celui-ci aura pour axes trois fibres diamétrales de la sphère restées rectangulaires, d'une orientation dépendant des rapports mutuels qu'ont les coefficients D, G de déformation ; enfin, les *dilatations* de ces fibres, ou *dilatations principales* de la particule *à l'état naturel,* encore fonctions des D, G, seront, en outre, *proportionnelles à* θ. On sait comment l'éminent physicien Fizeau a, par des procédés optiques d'une étonnante précision, déterminé en direction et en grandeur ces trois dilatations principales dans un grand nombre de cristaux.

L'ellipsoïde se réduit évidemment à une sphère dans toute particule *amorphe* et, plus généralement, *isotrope*, où l'échauffement θ, conservant l'isotropie, laisse, à l'état naturel, la particule semblable à elle-même, en dilatant toutes ses fibres dans un même rapport. On a donc alors, dans les formules (i'''), des coefficients G nuls et des coefficients D égaux, qui ne sont autres que le *coefficient de dilatation linéaire* de la particule. Si, au lieu de laisser la particule se dilater librement par l'échauffement θ, on la comprimait de manière à annuler les déformations ∂, g, il est clair qu'elle n'en resterait pas moins isotrope, ou qu'une pression normale commune s'exercerait sur tous ses éléments plans; car les vibrations calorifiques se font, à l'intérieur d'un corps isotrope, indifféremment dans tous les sens : donc les trois composantes normales N de pression y auraient une même valeur $-\nu\theta$, et, les trois composantes tangentielles T, valeur nulle.

En rapportant une telle particule, après de petites déformations ∂, g quelconques, à trois axes dirigés suivant les *trois* dilatations linéaires *principales* alors produites, dilatations que nous appellerons ∂_1, ∂_2, ∂_3 et qu'accompagneront (par la définition même des dilatations principales) trois glissements g nuls, la symétrie supposée de la contexture primitive par rapport à toutes les directions obligera de prendre pour le potentiel $\rho\Phi'$ une fonction où ∂_1, ∂_2, ∂_3 entreront symétriquement. Ainsi $\rho\Phi'$ ne comprendra, à part son premier terme, en θ, $-\nu\theta(\partial_1 + \partial_2 + \partial_3)$, que deux termes, l'un, en $\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$, l'autre, en $\partial_2\partial_3 + \partial_3\partial_1 + \partial_1\partial_2$, ou, ce qui revient au même, grâce à une combinaison des

ses températures. Mais il n'en est pas de même du problème analogue relatif aux fluides, chez lesquels des déplacements notables

---

deux, l'un, en $(\partial_1+\partial_2+\partial_3)^2$, l'autre, en $\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2$. Il viendra donc, en appelant λ, μ (notations de Lamé) deux certains coefficients d'élasticité, indépendants, comme ν, de la direction des ∂_1, ∂_2, ∂_3 à raison de l'isotropie de la matière dans son état naturel primitif,

$$\rho\Phi' = -\nu\theta(\partial_1+\partial_2+\partial_3) + \frac{\lambda}{2}(\partial_1+\partial_2+\partial_3)^2 + \mu(\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2).$$

Soit $\rho\Phi'_0$ sa valeur (proportionnelle à θ^2) dans l'état naturel *actuel*, où $\partial_1=\partial_2=\partial_3=D\theta$; et, d'après (i''), la différence $\rho\Phi'-\rho\Phi'_0$, qu'on peut appeler *potentiel d'élasticité*, exprimera le travail total $\int d\mathfrak{G}$ de déformation d'une particule par unité de son volume, à température θ constante et à partir de l'état naturel *correspondant*.

Le potentiel $\rho\Phi'$ sera la somme analogue $\int d\mathfrak{G}$, mais comptée à partir de ∂, g nuls, c'est-à-dire depuis la figure de l'état naturel *primitif*. Ainsi, ce potentiel $\rho\Phi'$ est, dans chaque particule, une fonction déterminée de l'état physique actuel, entièrement indépendante des axes coordonnés choisis; et, d'autre part, si l'on revient des directions de ∂_1, ∂_2, ∂_3 aux x, y, z primitifs, la théorie générale des petites déformations donne, entre ∂_1, ∂_2, ∂_3 et ∂_x, ∂_y, ∂_z, g_x, g_y, g_z, trois relations, dont les deux plus simples sont

$$\partial_1+\partial_2+\partial_3=\partial_x+\partial_y+\partial_z, \qquad \partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2=\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2+\frac{g_x^2+g_y^2+g_z^2}{2}.$$

L'expression générale du potentiel $\rho\Phi'$ dans une matière isotrope sera donc, avec trois coefficients ν, λ, μ caractéristiques de cette matière,

$$(j)\quad \rho\Phi' = -\nu\theta(\partial_x+\partial_y+\partial_z)+\frac{\lambda}{2}(\partial_x+\partial_y+\partial_z)^2+\mu\left(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2+\frac{g_x^2+g_y^2+g_z^2}{2}\right).$$

On en déduira, grâce aux formules (i'), les expressions des forces en partie thermiques et en partie élastiques N, T, et, par suite, comme dans la théorie classique de l'élasticité, les équations du mouvement visible.

En général, que la contexture soit, ou non, isotrope, la première approximation, exposée dans le texte, aura fait connaître suffisamment les températures successives θ. Dès lors, les parties des pressions où figure θ reviendront à des forces fonctions explicites de x, y, z, t. Donc le problème du mouvement visible produit ou modifié par l'échauffement se traitera à la manière d'un problème d'élasticité, dans lequel s'adjoindraient, à la pesanteur et aux pressions, certaines actions extérieures, données en fonction du temps et des coordonnées primitives. Vu la forme linéaire des équations, la solution se composera d'une intégrale particulière, accrue de l'intégrale générale qu'on aurait sans ces actions extérieures. C'est dire que les vibrations produites par l'échauffement se superposeront simplement aux vibrations élastiques ordinaires.

Nous avons regardé comme valable la forme des termes en ∂, g des N, T fournie par la première hypothèse approchée du texte (p. 161 et 166), c'est-à-dire l'existence

peuvent résulter de fort petites causes et notamment de légères inégalités de température. Les équations que nous avons données

---

du potentiel $\rho\Phi$ relatif à ces termes; d'où a résulté le nouveau potentiel $\rho\Phi'$. Il importe d'observer que, même sans admettre la forme linéaire des N, T en ∂, g, θ, des considérations d'une tout autre nature établissent directement l'existence du potentiel purement élastique $\int d\mathfrak{S} = \rho\Phi' - \rho\Phi'_0$ et, en particulier, pour $\theta = 0$, celle du potentiel $\rho\Phi$. Ces considérations s'appuient, à la fois, sur la possibilité d'effectuer très lentement et, par suite, *à température très sensiblement constante*, les déformations ∂, g, à partir de l'état naturel de la particule, et sur le principe pratique de l'*impossibilité du mouvement perpétuel*, si bien démontré expérimentalement par les innombrables et toujours infructueuses tentatives des *inventeurs*. On peut voir, à ce sujet, la onzième de mes *Leçons synthétiques de Mécanique générale* (p. 128).

Un appel encore plus complet au même principe pratique (appelé alors *Principe de Carnot*) permet, comme on sait, de démontrer, pour le terme dQ de l'équation (1) (p. 149), c'est-à-dire pour l'expression $M\,dU - d\mathfrak{S}$, ou, à un facteur constant près (p. 165),

$$d.\rho U - (N_x d\partial_x + N_y d\partial_y + \ldots + T_z dg_z),$$

l'existence d'un facteur d'intégrabilité, inverse de la température absolue $T_0 + \theta$ de la particule.

En d'autres termes, l'expression

$$(j') \qquad \frac{d.\rho U}{T_0+\theta} - \frac{1}{T_0+\theta}\left(\frac{d.\rho\Phi'}{d\partial_x}d\partial_x + \ldots + \frac{d.\rho\Phi'}{dg_z}dg_z\right)$$

est la différentielle totale exacte d'une fonction déterminée (l'*entropie* de Clausius) des ∂, g et de $T_0+\theta$. Or de là résulte la possibilité de relier simplement à Φ' l'énergie interne U. Car l'expression (j') revient identiquement, après division par le facteur constant ρ (densité de la particule dans son primitif état naturel), à

$$d\frac{U-\Phi'}{T_0+\theta} + \left[U - \Phi' + (T_0+\theta)\frac{d\Phi'}{d\theta}\right]\frac{d\theta}{(T_0+\theta)^2};$$

et l'on voit qu'elle sera une différentielle exacte, à la condition nécessaire et suffisante que le terme en $d\theta$ en soit une à lui tout seul; ce qui exige évidemment que la quantité entre crochets dépende uniquement de la température θ.

Appelons Ψ cette fonction de θ, et nous aurons

$$(j'') \qquad U = \Phi' - (T_0+\theta)\frac{d\Phi'}{d\theta} + \Psi.$$

C'est ainsi que, grâce au principe de Carnot, lord Kelvin a pu, de la fonction Φ', c'est-à-dire, au fond, du potentiel d'élasticité, déduire, à une fonction près de θ, l'énergie interne U; ce que ne nous permettrait pas de faire l'équation (1), maintenant que nous ne pouvons plus, comme à une première approximation, annuler la chaleur dQ qu'absorbe la particule, dans une déformation même assez lente pour que θ n'y varie pas sensiblement.

Supposons nos températures absolues $T_0+\theta$ assez basses pour qu'on puisse.

ou indiquées pour ces mouvements, dans la première partie de la présente Leçon, comportent une application intéressante aux phénomènes de *convection calorifique* (t. I, p. 174, et t. II, p. 74), c'est-à-dire à l'étude de la chaleur que charrient des courants fluides quelconques, mais surtout ceux que fait naître, dans une masse fluide, indéfinie, par exemple, et à une température générale donnée, prise pour zéro du thermomètre, un solide fixe immergé, porté, aux divers points de sa surface, à une certaine température en excès a, ou à des température inégales et données.

---

tout en gardant les formules linéaires des N, T en ∂, g et θ, poser $T_0 = 0$. Alors le second membre de (j''), devenu $\Phi' - \theta \dfrac{d\Phi'}{d\theta} + \Psi$, se réduit immédiatement, vu la relation (i), à $\Phi + \Psi$; et l'énergie interne U garde sa formule de première approximation, où les variables ∂, g (mais comptées ici à partir de l'état naturel *primitif* ou correspondant à la température $\theta = 0$) sont *séparées* de la variable θ.

L'équation indéfinie en θ, qui se déduit de (1) en raisonnant comme dans le texte (p. 162 et 163), est dès lors

$$(j''') \qquad C\frac{d\theta}{dt} = \frac{dF_x}{dx} + \frac{dF_y}{dy} + \frac{dF_z}{dz} - \left(\nu_x \frac{d\partial_x}{dt} + \nu_y \frac{d\partial_y}{dt} + \ldots + \tau_z \frac{dg_z}{dt}\right)\theta.$$

La mise en compte du mouvement visible y ajoute le dernier terme, sextuple, où les dérivées en t des ∂, g seront, très sensiblement, des fonctions de x, y, z, t qu'aura fait connaître la première approximation.

Une deuxième approximation du calcul de θ reviendrait donc à supposer le corps en repos, ou non déformé, mais à lui attribuer des sources intérieures de chaleur dont le débit donné serait, par unité de volume,

$$-\left(\nu_x \frac{d\partial_x}{dt} + \nu_y \frac{d\partial_y}{dt} + \nu_z \frac{d\partial_z}{dt} + \tau_x \frac{dg_x}{dt} + \tau_y \frac{dg_y}{dt} + \tau_z \frac{dg_z}{dt}\right)\theta.$$

On remarquera que ce terme, le dernier de (j'''), où θ se trouve multiplié par un facteur de l'ordre des dérivées en t des ∂, g, n'est pas linéaire et doit pouvoir être presque toujours négligé.

Toutes les équations ci-dessus ont, dans le cas particulier d'une contexture isotrope à l'état naturel (et de l'hypothèse ancienne $\lambda = \mu$), la forme de celles que Duhamel avait obtenues, vers 1835, en essayant, notamment, d'appliquer aux solides la distinction des deux caloriques spécifiques à volume constant et à pression constante, bien connue dès lors pour les gaz, et qui avait permis à Laplace de mettre la formule de Newton sur la vitesse du son d'accord avec l'expérience : on peut voir, à ce sujet, les deux Mémoires de Duhamel, *Sur le calcul des actions moléculaires développées par les changements de température dans les corps solides* (Recueil des *Savants étrangers*, de l'Académie des Sciences de Paris, t. V) et *Sur les phénomènes thermodynamiques* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXVe Cahier).

Si la masse fluide est en repos aux grandes distances du corps, là où s'apaisent et disparaissent les courants locaux dont il s'agit, mis en mouvement par des excès θ de température gagnés au contact ou au voisinage du solide, l'on a le cas de convection le plus familier aux physiciens; car il est facile à produire et à observer dans des conditions bien définies. Dulong et Petit, vers 1820, l'ont soigneusement étudié, et plusieurs physiciens ont contrôlé, depuis, les importants résultats qu'ils avaient obtenus. Toutefois, un autre cas est plus simple, car le mouvement du fluide s'y trouve presque donné : c'est celui d'un solide chaud, immergé au sein d'un courant dont la vitesse générale, modifiée seulement autour du corps, est suffisante pour que, même près du corps, l'échauffement dû à celui-ci ne l'altère pas sensiblement.

Les questions dont il s'agit sont, au point de vue analytique, d'une nature si abstruse, que nous devrons nous borner à ces deux cas extrêmes, paraissant les moins complexes. Entre eux se placerait le cas, beaucoup plus difficile à aborder, d'un courant dont la vitesse est seulement comparable à celles qu'y font naître les inégalités de la température entre diverses parties de la masse fluide.

261. Manière dont y varie le poids de l'unité de volume fluide. — Pour obtenir, sous la forme la plus réduite possible, les équations de ces problèmes, il faut observer d'abord que, *sans la pesanteur,* les petites dilatations ou contractions thermiques du fluide altéreraient à peine son équilibre ou son mouvement; car elles n'entraîneraient, à l'état d'équilibre (par exemple), pour se produire autour du corps et rétablir l'égalité hydrostatique de pression, que d'insignifiants déplacements. Mais les petites différences de poids, par unité de volume, que produisent des inégalités modérées de la température sur un même plan horizontal, entraînent, au contraire, des déplacements verticaux très sensibles, les molécules chauffées ne retrouvant qu'assez haut au-dessus d'elles des molécules froides de densité pareille à la leur et avec lesquelles elles puissent se mettre à peu près en équilibre. D'où il suit que la diminution, négligeable en elle-même, de la densité ρ de toute particule devenue plus chaude, produit une *réduction de poids dont il faut tenir compte.*

Mais voyons comment évaluer cette réduction de poids, due uniquement à la minime diminution de la densité.

Imaginons d'abord assez lents nos mouvements de convection, pour que les équations de l'Hydrostatique y soient presque vérifiées à tout instant : la pression p y aura partout, sensiblement, sur chaque plan horizontal, sa valeur invariable des régions en repos un peu éloignées du corps, valeur qui, dans notre atmosphère, par exemple, décroît seulement de sa $\frac{1}{8000}$ partie environ pour 1^m d'élévation du niveau. Et chaque particule fluide, même voisine du corps, en changeant peu à peu de niveau, ne changerait de pression que dans cette proportion minime. En réalité, il n'en sera pas tout à fait ainsi, vu la rapidité modérée des mouvements que nous aurons à considérer effectivement. Mais on peut toutefois admettre que les changements de la pression p de chaque particule seront *du même ordre* que ceux de sa valeur *hydrostatique*.

Or cette circonstance suffira pour que la densité de chaque particule, ρ, considérée comme fonction de p et de θ, soit liée, très sensiblement, à l'échauffement θ, comme si sa pression p restait constante. Car, même s'il s'agit d'un gaz, de l'air atmosphérique, par exemple, à une température (ordinaire) de 285 degrés absolus, une élévation modérée θ de sa température, soit 10° pour fixer les idées, réduira, à pression constante, sa densité du $\frac{1}{28,5}$ ou des $\frac{2}{57}$, réduction qui, pour se produire à température constante, ou par abaissement de pression, exigerait l'énorme élévation $\frac{8000^m}{28,5}$ ou $\frac{16000^m}{57}$, soit 281^m, de son niveau hydrostatique. Comme une telle dénivellation hydrostatique de la particule est tout à fait disproportionnée à celles qui ont lieu, ce sera presque uniquement à raison de l'échauffement θ, ou comme si p ne changeait pas, que se produira la variation relative de ρ. Et il en serait de même, à bien plus forte raison, dans le cas d'un liquide, où les changements de pression modérés n'influent qu'imperceptiblement sur la densité.

Ainsi, le calcul des petites variations de ρ se fera dans l'hypothèse d'une pression p constante. Et voilà pourquoi, plus haut (p. 158), nous avons pu évaluer la capacité calorifique C dans cette hypothèse. Par suite, si α désigne le coefficient ordinaire de la

dilatation cubique *thermique* du fluide (0,00366 pour les gaz), l'unité de volume primitif du fluide aura été multipliée, à raison de l'élévation θ de température, par le binome $1+\alpha\theta$. Et le poids ρg de l'unité de volume aura été divisé par $1+\alpha\theta$, ou aura décru sensiblement de $\rho g\alpha\theta$, comme s'il s'était adjoint, au poids primitif ou normal de l'unité de volume, la petite force antagoniste, c'est-à-dire *ascensionnelle*, $\rho g\alpha\theta$. J'appellerai γ la valeur de cette force par unité de masse et d'échauffement. En d'autres termes, je poserai

$$g\alpha=\gamma;$$

et le produit $\gamma\theta$ exprimera une sorte de pesanteur supplémentaire, proportionnelle à l'échauffement θ, mais dirigée de bas en haut.

262. **Mise en équation de ces problèmes.** — Cela posé, choisissons un axe des z vertical, dirigé vers le haut comme la force variable $\gamma\theta$; associons-lui deux axes horizontaux rectangulaires des x, y et, enfin, imaginons que l'on défalque de la pression intégrale p sa valeur hydrostatique, réalisée aux grandes distances du corps, en appelant P l'excédent ainsi obtenu, c'est-à-dire la *partie non hydrostatique* de la pression. La condition de continuité et les trois équations classiques d'Euler, après suppression du terme ordinaire de pesanteur détruit par la pression hydrostatique, seront

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,\\ &\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dx}=-u',\qquad \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dy}=-v',\qquad \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dz}=\gamma\theta-w',\end{aligned}\right.$$

u', v', w' y désignant, suivant l'usage, les trois composantes de l'accélération du mouvement visible. Quant à l'équation aux dérivées partielles des températures θ, ce sera, d'après (9) (p. 158),

$$(16)\qquad \theta'=\frac{K}{C}\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}+\frac{d^2\theta}{dy^2}+\frac{d^2\theta}{dz^2}\right).$$

Voilà les cinq équations indéfinies du problème, en u, v, w, P, θ.

Exprimons maintenant les particularités que présenteront les vitesses u, v, w et la température θ, à la surface du solide *fixe* chauffé. Si λ, μ, ν désignent les trois cosinus directeurs de la nor-

male menée en (x, y, z) à cette surface, *vers l'intérieur du corps,* et que, par exemple, cette surface soit portée à des températures *connues* $a\psi$, dont nous appellerons a la moyenne, la composante normale $\lambda u + \mu v + \nu w$ de la vitesse du fluide y sera évidemment nulle, et sa température θ ne pourra pas (t. I, p. 173) y différer sensiblement de $a\psi$. On aura donc les deux relations définies

$$(17) \qquad \text{(à la surface du corps)} \left\{ \begin{aligned} \lambda u + \mu v + \nu w &= 0, \\ \theta &= a\psi. \end{aligned} \right.$$

De plus, sur une sphère de grand rayon décrite autour du corps, d'une part, la *pression dynamique* P du fluide et son échauffement θ seront insensibles, d'autre part, les vitesses u, v, w se réduiront aux trois composantes constantes de la vitesse générale et connue, v, emportant la masse fluide. Nous appellerons l, m, n, quand cette vitesse ne sera pas nulle, ses trois cosinus directeurs donnés; et nous aurons ainsi, comme conditions relatives aux points infiniment éloignés de l'origine, d'abord, dans tous les cas,

$$(18) \qquad \text{(à l'infini)} \quad (P, \theta) = 0,$$

et, de plus,

$$(19) \qquad \text{(à l'infini)} \left\{ \begin{aligned} &(u, v, w) = 0 \text{ si l'ensemble du fluide est en repos,} \\ &(u, v, w) = (l\text{v}, m\text{v}, n\text{v}) \text{ s'il y a un courant général.} \end{aligned} \right.$$

Supposons enfin, pour rendre nos problèmes plus accessibles, que l'on renouvelle sans cesse la provision de chaleur du corps, au point de maintenir invariables les températures $a\psi$ de sa surface. Nous savons qu'alors le phénomène se réglera plus ou moins vite par voie de permanence, et que u, v, w, P, θ ne dépendront plus de t, mais seulement de x, y, z, dans tout l'espace, environnant le corps, où ces fonctions ont des valeurs sensibles. Les expressions des dérivées complètes u', v', w', θ', débarrassées des dérivées partielles correspondantes *prises sur place,* deviennent simplement

$$(20) \quad (u', v', w', \theta') = u\frac{d(u, v, w, \theta)}{dx} + v\frac{d(u, v, w, \theta)}{dy} + w\frac{d(u, v, w, \theta)}{dz}.$$

Et les résultats obtenus s'appliqueront tout de même assez bien, par raison de continuité, au cas où on laissera le corps se refroidir, pourvu qu'il le fasse beaucoup plus lentement que ne s'établirait le régime permanent lui-même si les températures de la surface étaient maintenues.

Dans de telles conditions de permanence, il n'est pas impossible de tirer quelque parti de nos équations. C'est à quoi sera consacrée notre prochaine et dernière Leçon.

TRENTE-CINQUIÈME LEÇON.

SUR LE POUVOIR REFROIDISSANT D'UNE MASSE FLUIDE INDÉFINIE, SOIT DÉPOURVUE DE TOUT MOUVEMENT GÉNÉRAL, SOIT A L'ÉTAT DE COURANT UNIFORME.

263. Courants de convection, au sein d'une masse fluide d'ailleurs en repos : lois de simple proportionnalité ou de similitude. — Examinons, en premier lieu, celui de nos deux problèmes de convection, où il s'agit des courants produits dans une masse fluide d'ailleurs tranquille par un corps chaud qui s'y trouve immergé et, par suite, du *pouvoir refroidissant* des fluides, tel qu'il a été étudié chez les gaz par Dulong et Petit. C'est le plus difficile des deux problèmes ; car les intégrations paraissent y excéder complètement les forces de l'Analyse actuelle. Nous pourrons, cependant, y dégager certaines lois, et, d'abord, des lois de simple proportionnalité impliquées par la forme des équations. Un appel, sur un seul point, à quelques résultats d'expérience nous permettra d'étendre beaucoup le champ de ces lois.

Pour les obtenir, tâchons de remplacer tant les variables indépendantes x, y, z, que les fonctions θ, u, v, w, P, par d'autres, ξ, η, ζ, Θ, U, V, W, Π, qui soient respectivement proportionnelles à chacune d'elles, avec des coefficients de proportionnalité monomes en a, γ, $\frac{K}{C}$, ρ et choisis, s'il est possible, de manière à éliminer ces quatre paramètres. On reconnaît aisément qu'il convient de poser, pour cela :

$$(21)\quad \begin{cases} \xi = \left(\dfrac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}} x, \qquad \eta = \left(\dfrac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}} y, \qquad \zeta = \left(\dfrac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}} z, \\ \theta = a\Theta, \quad u = \left(\dfrac{a\gamma K}{C}\right)^{\frac{1}{3}} U, \quad v = \left(\dfrac{a\gamma K}{C}\right)^{\frac{1}{3}} V, \quad w = \left(\dfrac{a\gamma K}{C}\right)^{\frac{1}{3}} W, \\ P = \rho\left(\dfrac{a\gamma K}{C}\right)^{\frac{2}{3}} \Pi. \end{cases}$$

Les trois premières de ces relations donnent, pour exprimer les dérivées de θ, u, v, w, P en x, y, z, au moyen de celles de Θ, U, V, W, Π en ξ, η, ζ, les formules symboliques

$$(22) \qquad \frac{d}{d(x,y,z)} = \left(\frac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}} \frac{d}{d(\xi,\eta,\zeta)};$$

et les équations indéfinies (15), (16) (p. 174), où u', v', w', θ' ont les expressions (20), deviennent, après avoir été divisées respectivement, la première, par $\left(\frac{a^2\gamma^2 C}{K}\right)^{\frac{1}{3}}$, les trois suivantes, par $a\gamma$, enfin, la dernière, par $\left(\frac{a^5\gamma^2 C}{K}\right)^{\frac{1}{3}}$:

$$(23)\left\{\begin{array}{l} \frac{dU}{d\xi}+\frac{dV}{d\eta}+\frac{dW}{d\zeta}=0, \quad \frac{d\Pi}{d\xi}=-U', \quad \frac{d\Pi}{d\eta}=-V', \quad \frac{d\Pi}{d\zeta}=\Theta-W', \\ \Theta'=\frac{d^2\Theta}{d\xi^2}+\frac{d^2\Theta}{d\eta^2}+\frac{d^2\Theta}{d\zeta^2}, \\ \text{où } (U',V',W',\Theta')=U\frac{d(U,V,W,\Theta)}{d\xi}+V\frac{d(U,V,W,\Theta)}{d\eta}+W\frac{d(U,V,W,\Theta)}{d\zeta}. \end{array}\right.$$

Donnons-nous, d'ailleurs, l'équation du solide sous la forme

$$(24) \qquad f\left[\left(\frac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}}x, \quad \left(\frac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}}y, \quad \left(\frac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}}z\right]=0;$$

ce qui reviendra, si le coefficient $\left(\frac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ change et que nous voulions cependant avoir toujours la même fonction f, à considérer des corps semblables au proposé, mais de dimensions inversement proportionnelles à ce coefficient, ou d'un volume en raison directe de $\frac{K^2}{a\gamma C^2}$. Alors les cosinus directeurs λ, μ, ν de la normale resteront les mêmes aux points homologues; et les conditions définies ou aux limites, savoir, (17), (18), avec la première (19), deviendront :

$$(25)\left\{\begin{array}{l} [\text{à la surface } f(\xi,\eta,\zeta)=0] \quad \lambda U+\mu V+\nu W=0 \text{ et } \Theta=\psi(\xi,\eta,\zeta), \\ \left(\text{aux dist. } \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \text{ infinies}\right) \quad (\Pi, U, V, W, \Theta)=0. \end{array}\right.$$

Nous admettrons, à la surface de tous nos corps semblables iné-

galement chauffés, un mode de distribution pareil des excès $a\psi$ de température, c'est-à-dire des valeurs de ces excès exprimées, aux points homologues de tous, par une même fraction ou proportion $\psi(\xi, \eta, \zeta)$ de l'échauffement moyen donné a de la surface.

Le système d'équations (23) et (25) devant déterminer Θ, U, V, W, Π en fonction de ξ, η, ζ, il suffira de substituer, dans ses intégrales, à ces huit nouvelles variables, leurs expressions tirées de (21), pour avoir cinq relations, de la forme

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\theta}{a}, \frac{(u, v, w)}{\left(\frac{a\gamma K}{C}\right)^{\frac{1}{3}}}, \frac{P}{\rho\left(\frac{a\gamma K}{C}\right)^{\frac{2}{3}}}\right] \\ &= \text{des fonctions définies de } \left(\frac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}}x,\quad \left(\frac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}}y,\quad \left(\frac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}}z. \end{aligned}\right.$$

On voit que, si l'excédent a de température des corps considérés reçoit différentes valeurs, les vitesses u, v, w du fluide seront, aux points homologues de l'espace entourant ces corps, proportionnelles à la racine cubique $a^{\frac{1}{3}}$ de cet excédent; et qu'une même fonction Θ de celui-ci sera prise, en ces points homologues, par le fluide y effectuant son passage.

264. Ce qui résulte de ces lois pour les flux calorifiques de convection émanant de la surface du corps. — Le flux F de chaleur fourni au fluide dans l'unité de temps par l'unité d'aire d'un quelconque des corps, égal à celui que la couche fluide contiguë communique au liquide ou au gaz plus éloigné du solide, aura, comme on sait, l'expression

$$K\left(\lambda\frac{d\theta}{dx} + \mu\frac{d\theta}{dy} + \nu\frac{d\theta}{dz}\right).$$

En y introduisant les nouvelles variables et fonction ξ, η, ζ, Θ, on aura donc

$$(27)\qquad F = (KC^2\gamma)^{\frac{1}{3}}a^{\frac{4}{3}}\left(\lambda\frac{d\Theta}{d\xi} + \mu\frac{d\Theta}{d\eta} + \nu\frac{d\Theta}{d\zeta}\right).$$

Aux points homologues des surfaces $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ limitant les corps considérés, les cosinus directeurs λ, μ, ν et les dérivées $\frac{d\Theta}{d(\xi, \eta, \zeta)}$ ont mêmes valeurs respectivement. Donc, *le flux de*

chaleur que le fluide enlève à l'unité d'aire des corps semblables dont il s'agit est proportionnel, en ces points homologues, à la puissance $\frac{4}{3}$, $a^{\frac{4}{3}}$ *ou* $a^{1,333}$, *de l'excédent de température de chaque corps sur la masse du fluide;* et il dépend des autres propriétés physiques de celui-ci par le facteur $(KC^2\gamma)^{\frac{1}{3}}$, croissant avec sa conductibilité intérieure K, avec la capacité calorifique C de son unité de volume, enfin, avec le produit, γ, de la gravité g par l'accroissement α de cette unité de volume, pour un degré d'élévation de la température.

Si, l'excédent a venant à croître, le solide restait le même, au lieu de faire place à un autre plus petit, en volume, dans un rapport inverse de a, l'unité d'aire de sa surface serait moins courbe et, par conséquent, moins convexe que ne le suppose la formule (27) quand ξ, η, ζ y conservent leurs valeurs.

Alors, en effet, il faudrait, pour traiter le problème par le système d'équations (23) et (25), modifier, dans (25), vu les expressions (21) de ξ, η, ζ, la surface-type $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$, en multipliant par $a^{\frac{1}{3}}$ les coordonnées de tous ses points; ce qui multiplierait par $a^{\frac{2}{3}}$ l'aire de ses diverses parties, sans altérer leurs directions respectives.

Or, on conçoit que, toutes choses égales d'ailleurs, une forme moins convexe de l'unité de surface restreigne dans une légère mesure les rapports du solide avec le fluide ambiant, rapports qu'une forme concave réduirait évidemment. Ainsi, il est vraisemblable qu'une moindre convexité atténue la quantité de chaleur emportée par le fluide. Donc *le flux* F *doit*, en réalité, *quand l'excédent a augmente chez un même corps, croître un peu moins vite que la puissance* $a^{\frac{4}{3}}$ ou $a^{1,333}$; et l'on s'explique que les expériences de Dulong et Petit aient indiqué des flux calorifiques de convection sensiblement proportionnels à $a^{1,233}$, ou aient conduit à adopter un exposant de a inférieur à $\frac{4}{3}$ de 0,1 environ.

265. **Recours à une donnée de l'observation et conséquences importantes touchant le pouvoir refroidissant des fluides.** — La diminution de 0,1 ainsi effectuée sur l'exposant $\frac{4}{3}$ de a, dans (27), paraît donc constituer une correction, *empirique*, de la variation

produite sur le facteur trinome $\lambda \frac{d\Theta}{d\xi} + \mu \frac{d\Theta}{d\eta} + \nu \frac{d\Theta}{d\zeta}$ par un agrandissement des dimensions de la surface-type $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$ dans le rapport de 1 à $a^{\frac{1}{3}}$, agrandissement qui, par conséquent, aurait à peu près comme effet, sur le trinome, de diviser sa valeur par $a^{0,1}$ où $(a^{\frac{1}{3}})^{0,3}$, c'est-à-dire par la valeur relative de l'agrandissement, élevée à la puissance dont l'exposant est 0,3. Dès lors, l'agrandissement analogue dont il faudrait pouvoir évaluer l'effet réducteur sur le même trinome, si l'on fait varier indifféremment a, γ, C ou K sans modifier les dimensions du corps, sera, d'après les expressions (21) de ξ, η, ζ, dans le rapport de 1 à $\left(\frac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{\frac{1}{3}}$; et, vu que la fonction Θ définie par le système d'équations (23) et (25) change de la même manière à raison de cet agrandissement, quelle qu'en soit la cause, le trinome se trouverait, dans (27), divisé à peu près par $\left(\frac{a\gamma C^2}{K^2}\right)^{0,1}$. Ainsi, *le pouvoir refroidissant des divers fluides sur un même corps* serait, d'après (27), proportionnel au produit

$$(28)\qquad (KC^2\gamma)^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} \left(\frac{K^2}{a\gamma C^2}\right)^{0,1} = \gamma^{0,233} K^{0,533} C^{0,467} a^{1,233};$$

il serait, d'ailleurs, indépendant de la nature du corps et de l'état physique de sa surface, conformément à ce qu'a montré l'expérience.

Il faut toutefois remarquer que l'extension ainsi obtenue, en partie empirique, des formules théoriques du refroidissement par convection, est valable seulement pour les formes de corps (sphérique et, dans une certaine mesure, cylindrique modérément longue) expérimentées par Dulong et Petit.

D'après les observations de ces deux physiciens, le pouvoir refroidissant varierait à peu près, pour divers gaz en particulier, avec leur densité ρ, comme l'indique le facteur $C^{0,467}$ ci-dessus, où C est proportionnel à ρ et sensiblement indépendant de la température absolue. Mais ils ont reconnu aussi que cette température absolue y figure environ de la même manière que ρ, ou en tant que multipliant ρ, de manière à n'entrer, comme ρ, dans l'expression du pouvoir refroidissant, que par l'intermédiaire de la pression p, proportionnelle à leur produit d'après les lois

de Mariotte et de Gay-Lussac. Cela, joint à la formule (28), conduirait à attribuer aux gaz, du moins entre les limites des expériences de Dulong et Petit, une conductibilité K à peu près indépendante de la densité ρ et proportionnelle à la puissance $\frac{0,467}{0,533} = \frac{7}{8}$ de la température absolue; car le facteur $\gamma^{0,233}$ est sensiblement constant, γ y étant le produit de la *gravité g* par le coefficient de dilatation cubique $\frac{1}{273} = 0,00366$ commun à tous les gaz ([1]).

266. Autre loi simple, dans le cas de corps à surface presque verticale : proportionnalité de l'accélération ascendante à l'échauffement. — Il semble qu'on peut encore, simplement, dégager des équations précédentes un intéressant résultat, du moins quand le corps est plus étendu suivant le sens vertical que dans les sens horizontaux, ou même quand c'est un plateau large, mais beaucoup moins épais que haut, suspendu verticalement, de manière à avoir, par exemple, ses deux faces perpendiculaires à l'axe des x. Alors les courants peuvent être principalement verticaux et, emportant la chaleur dans le sens des z positifs, ne laisser l'échauffement du fluide se produire d'une manière sensible qu'à des distances horizontales du corps bien moindres que sa hauteur.

Dès lors, dans les trois dernières équations (15) (p. 174), l'accélération *ascendante* w' sera bien plus grande que les accélérations *latérales* u', v'; et, de plus, les dérivées en x de ces trois quantités, là où celles-ci sont sensibles, excéderont dans de grands rapports leurs dérivées en z.

Cela étant, égalons, s'il s'agit, par exemple, du plateau normal aux x, les deux valeurs de $\frac{1}{\rho}\frac{d^2 P}{dx\,dz}$ tirées par différentiation des équations en w' et u'. Nous aurons la relation d'intégrabilité

$$\frac{d}{dx}(\gamma\theta - w') = -\frac{du'}{dz}.$$

([1]) Les expériences, très délicates, qui ont été faites pour apprécier la conductibilité calorifique K des gaz indiquent, en effet, des valeurs de K simplement proportionnelles à des puissances de la température absolue dont les exposants ne paraissent pas être très inférieurs à l'unité et peuvent bien ne guère différer de la fraction $\frac{7}{8}$.

Multiplions-la par dx, et intégrons, du côté du plateau où x est, par exemple, positif, depuis $x = \infty$, où θ, w', u' s'annulent, jusqu'à une valeur de x quelconque. Il viendra, en transposant $-w'$,

$$\gamma\theta = w' - \int_{\infty}^{x} \frac{du'}{dz} dx.$$

Or, ici, le dernier terme est bien moindre qu'il ne serait, si l'on y remplaçait la dérivée en z de u' par sa dérivée en x, supposée notablement plus forte; ce qui donnerait à ce terme, comme valeur, $-u'$, c'est-à-dire une fraction encore minime du terme précédent w'. Ainsi l'on a, sauf erreur négligeable,

$$(29) \qquad w' = \gamma\theta.$$

Autrement dit, *l'accélération ascendante du fluide est partout proportionnelle à son échauffement actuel* θ. Donc les courants de convection accroissent sans cesse leur vitesse verticale, à mesure qu'ils s'élèvent non seulement à côté du corps, mais même au-dessus de lui ou, après l'avoir dépassé, jusqu'à ce qu'ils se soient, tout en montant, assez étendus latéralement pour avoir acquis des dimensions horizontales comparables à la hauteur totale parcourue, et avoir mis ainsi en défaut, avec notre raisonnement, la formule même (29).

On voit que ces courants naissent à de petites distances au-dessous du corps, là où commence à se faire sentir sa chaleur, qu'ils s'accélèrent et, par suite, s'effilent ou s'aplatissent de plus en plus contre le corps, en s'adjoignant sur leur côté extérieur le fluide latéral qu'ils échauffent en chemin; après quoi ils s'étendent très loin au-dessus du corps, en s'y continuant, à raison de leur vitesse acquise, même après s'être presque entièrement refroidis.

267. Équation aux dérivées partielles du quatrième ordre, non linéaire, à laquelle se ramène le problème pour un mince plateau vertical. — Malgré la relation simplificatrice (29), il semble difficile d'aborder l'intégration effective des équations du problème. Pour voir du moins à quels termes on pourrait la réduire, ramenons-la au calcul d'une seule fonction auxiliaire φ, dans le cas relativement simple, auquel nous nous bornerons, d'un mince plateau vertical, indéfini suivant le sens horizontal des y, avec un

échauffement $a\psi(z)$ ne dépendant que de z. Alors les mouvements, par raison de symétrie, se feront dans les plans parallèles à celui des xz, et de la même manière dans tous ; de sorte que la vitesse du fluide aura seulement les deux composantes w, u et ne dépendra, comme l'échauffement θ, que des deux coordonnées x et z.

La première équation (15) (p. 174), réduite à ses deux termes en u et w, revient à prendre

$$(30)\qquad u = -\frac{d\varphi}{dz}, \qquad w = \frac{d\varphi}{dx}.$$

Puisque u est supposé beaucoup plus petit que w, la fonction auxiliaire φ de z et x variera donc, de même que w, u et θ, beaucoup plus lentement avec z qu'avec x. Elle ne sera d'ailleurs déterminée qu'à une constante près ; car ses dérivées seules figureront dans l'expression des inconnues du problème.

Les trois autres équations (15) se réduisant aux deux en u' et w', l'élimination de P ne donne pas d'autre condition d'intégrabilité que celle qui nous a conduit ci-dessus à (29). Ainsi, le système (15) n'astreint les vitesses u, w qu'à vérifier les relations (30) et (29). Or celle-ci revient à poser

$$(31)\qquad \theta = \frac{w'}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}\left(-\frac{d\varphi}{dz}\frac{d}{dx} + \frac{d\varphi}{dx}\frac{d}{dz}\right)\frac{d\varphi}{dx};$$

et, vu, d'une part, que

$$\theta' = u\frac{d\theta}{dx} + w\frac{d\theta}{dz} = -\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\theta}{dx} + \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\theta}{dz},$$

d'autre part, que $\frac{d^2\theta}{dz^2}$ est négligeable, dans (16) (p. 174), à côté de $\frac{d^2\theta}{dx^2}$, l'équation (16) elle-même devient, par l'élimination de θ,

$$(32)\qquad \begin{cases} \left(-\frac{d\varphi}{dz}\frac{d}{dx} + \frac{d\varphi}{dx}\frac{d}{dz}\right)\left(-\frac{d\varphi}{dz}\frac{d}{dx} + \frac{d\varphi}{dx}\frac{d}{dz}\right)\frac{d\varphi}{dx} \\ \quad = \frac{K}{C}\frac{d^2}{dx^2}\left(-\frac{d\varphi}{dz}\frac{d}{dx} + \frac{d\varphi}{dx}\frac{d}{dz}\right)\frac{d\varphi}{dx}. \end{cases}$$

Telle est donc l'équation indéfinie cherchée en φ, du quatrième ordre et non linéaire. On ne voit pas, d'ailleurs, que certains termes y soient petits devant d'autres. Car, à part les deux différentiations successives en x figurant au second membre, les opé-

rations à y effectuer sur la composante principale w ou $\frac{d\varphi}{dx}$ de la vitesse, au nombre de deux dans le premier membre et d'une seule dans le second, sont représentées par le binome symbolique

$$-\frac{d\varphi}{dz}\frac{d}{dx}+\frac{d\varphi}{dx}\frac{d}{dz},$$

dont chaque partie, à raison de son facteur où z figure, rapetisse, comparativement à ce que serait une dérivation en x, la quantité qui s'y trouve soumise.

Le premier membre de (32) est donc, en quelque sorte, du deuxième ordre de petitesse, tandis que le second membre ne serait que du premier, sans la présence du facteur constant $\frac{K}{C}$. Mais il est réduit lui-même au deuxième ordre par la petitesse de ce coefficient, qui a été implicitement admise. En effet, une conductibilité du fluide extrêmement faible est, seule, cause du peu de propagation de l'échauffement dans le sens des x et constitue, par conséquent, la raison d'être de la relation simple (29), sur laquelle reposent les précédents calculs.

L'ordre de l'équation indéfinie en φ étant le *quatrième,* il faudra, comme on sait, pour compléter la détermination du problème, *deux* conditions définies distinctes à chaque surface limite.

Pour le plan $x=0$ du plateau mince considéré, on les forme aisément soit à la surface de celui-ci, soit sur le prolongement de cette surface au-dessous et au-dessus du plateau, prolongement qui est évidemment, comme le plateau même, un plan de symétrie du phénomène, et où s'annulent par suite la composante normale u de la vitesse, ainsi que la dérivée analogue $\frac{d\theta}{dx}$ de la température. On a donc, pour $x=0$, d'une part, $u=0$, d'autre part, $\theta=a\psi(z)$ sur le plateau et $\frac{d\theta}{dx}=0$ hors du plateau. Cela revient à dire que les relations en φ spéciales au plan du plateau seront :

$$(\text{pour } x=0)\quad \frac{d\varphi}{dz}=0 \quad\text{et}\quad \begin{cases} -\dfrac{d\varphi}{dz}\dfrac{d^2\varphi}{dx^2}+\dfrac{d\varphi}{dx}\dfrac{d^2\varphi}{dx\,dz}=\gamma a\psi(z) & (\text{sur le plateau}),\\[2ex] \dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{d\varphi}{dz}\dfrac{d^2\varphi}{dx^2}+\dfrac{d\varphi}{dx}\dfrac{d^2\varphi}{dx\,dz}\right)=0 & (\text{hors du plateau}).\end{cases}$$

Aux autres limites, c'est-à-dire aux distances infinies de l'origine, les vitesses w, u s'annulent; et, en se bornant à la moitié du plan des xz où x est positif, on a

$$\frac{d\varphi}{d(x,z)} = 0 \quad (\text{soit pour } z = \pm\infty, \text{ soit pour } x = \infty).$$

On voit quel système compliqué d'équations en φ, aux dérivées partielles, il faudrait intégrer, pour pouvoir, même dans le cas simple d'un plateau vertical d'une largeur horizontale indéfinie et, à plus forte raison, dans le cas également remarquable d'un solide de révolution effilé à axe vertical, construire en détail les courants de convection et déterminer leur échauffement variable θ (1).

268. **Passage au problème d'un courant fluide indéfini, d'une rapidité donnée, refroidissant un solide qu'il enveloppe de toutes parts.** — Les résultats précédents sont tout ce que l'Analyse a pu nous indiquer, relativement au phénomène de convection calorifique le plus familier aux physiciens, celui où l'on évite toute cause de courants autre que l'excédent même de température, du corps chauffé, sur la masse fluide indéfinie qui l'entoure. Arrivons maintenant au cas, un peu plus simple, où un corps chaud a sa chaleur (que l'on suppose renouvelée sans cesse) emportée d'une manière permanente par un courant fluide, indéfini en tous sens, au sein duquel il est immergé, courant rectiligne et uniforme (d'une vitesse connue v) aux distances du corps assez grandes pour que les perturbations causées par sa présence ne s'y étendent pas.

Supposons alors la vitesse, v, du courant, suffisante, pour annihiler l'effet, sur les mouvements visibles, de la petite modification $\rho\gamma\theta$ du poids spécifique du fluide, due à l'échauffement θ. Nous pourrons faire $\gamma = 0$ dans les équations indéfinies (15) du mouvement (p. 174); mais, par contre, les trois conditions spé-

(1) Les principaux résultats de la présente Leçon exposés ci-dessus ont été résumés, le 10 juin 1901, dans une Note des *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris (t. CXXXII, p. 1382); et ceux qui suivent ont fait de même l'objet d'une autre Note, du 29 juillet 1901 (*Comptes rendus*, t. CXXXIII, p. 257). Le *Journal de Physique théorique et appliquée* a reproduit ces deux Notes dans son numéro de février 1902.

ciales concernant les vitesses u, v, w à l'infini deviendront moins simples et seront, dans (19), celles de la seconde ligne.

Dès lors, les équations tant indéfinies que définies relatives à u, v, w, P se trouveront entièrement *séparées* de celles qui concernent la température θ, ou seront les mêmes que si l'on avait $a = 0$, $\theta = 0$; de sorte que les mouvements visibles du fluide autour du corps chaud se détermineront uniquement par les données relatives au courant général et à la configuration du corps.

D'ailleurs, les vitesses u, v, w seront partout proportionnelles à v, et la pression non hydrostatique, P, proportionnelle à $\rho \mathrm{v}^2$. En effet, si, pour embrasser, de plus, le cas de corps semblables, où i désignera le rapport de similitude, et dont l'équation commune sera

$$(33)\qquad f\left(\frac{x}{i}, \frac{y}{i}, \frac{z}{i}\right) = 0,$$

nous posons, par analogie avec sept des formules (21),

$$(34)\qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{x}{i}, \quad \eta = \dfrac{y}{i}, \quad \zeta = \dfrac{z}{i}, \\ u = \mathrm{v}U, \quad v = \mathrm{v}V, \quad w = \mathrm{v}W, \quad P = \rho \mathrm{v}^2 \Pi, \end{cases}$$

les équations, tant indéfinies que définies (15) à (19) (p. 174 et 175), relatives à u, v, w, P, deviendront :

$$(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{dU}{d\xi} + \dfrac{dV}{d\eta} + \dfrac{dW}{d\zeta} = 0, \\ \dfrac{d\Pi}{d(\xi, \eta, \zeta)} = -U\dfrac{d(U, V, W)}{d\xi} - V\dfrac{d(U, V, W)}{d\eta} - W\dfrac{d(U, V, W)}{d\zeta}; \\ [\text{pour } f(\xi, \eta, \zeta) = 0] \quad \lambda U + \mu V + \nu W = 0, \\ (\text{pour } \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \text{ infini}) \quad (U, V, W) = (l, m, n) \quad \text{et} \quad \Pi = 0. \end{cases}$$

Ainsi, autour de tous les corps semblables, immergés dans des courants de même orientation par rapport à eux et de rapidités diverses v, les vitesses u, v, w seront les produits de v par les mêmes fonctions U, V, W des variables ξ, η, ζ, c'est-à-dire des rapports $\frac{x}{i}, \frac{y}{i}, \frac{z}{i}$, définissant, chez tous, les points homologues; et la pression non hydrostatique P sera également, autour d'eux, le produit de $\rho \mathrm{v}^2$ par une même fonction Π de ces trois rapports.

269. Lois de proportionnalité ou de similitude pour les températures d'un tel courant. — Mais voyons maintenant ce que donneront les équations (16), (17) et (18) en θ, devenues

$$(36)\quad \begin{cases} U\dfrac{d\theta}{d\xi}+V\dfrac{d\theta}{d\eta}+W\dfrac{d\theta}{d\zeta}=\dfrac{K}{Cvi}\left(\dfrac{d^2\theta}{d\xi^2}+\dfrac{d^2\theta}{d\eta^2}+\dfrac{d^2\theta}{d\zeta^2}\right),\\ [\text{pour } f(\xi,\eta,\zeta)=0]\quad \theta=a\psi(\xi,\eta,\zeta),\\ (\text{pour } \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} \text{ infini})\quad \theta=0,\end{cases}$$

et où U, V, W seront trois fonctions, *censées connues* désormais, de ξ, η, ζ.

Ces équations sont *linéaires,* avec trois coefficients U, V, W, dans la première, généralement *variables*. Malgré cette dernière circonstance, elles sont, évidemment, beaucoup plus simples que le système (23) et (25) du cas précédent.

On voit, en les divisant par a, qu'elles contiennent seulement le rapport $\frac{\theta}{a}$; et, d'ailleurs, il n'y figure, pour tous les corps semblables à surface chauffée d'une manière analogue, que le paramètre $\frac{K}{Cvi}$. Ainsi l'on aura, en appelant Θ une certaine fonction de quatre variables, liée à $\psi(\xi,\eta,\zeta)$,

$$(37)\qquad \theta=a\Theta\left(\xi,\eta,\zeta,\frac{K}{Cvi}\right)=a\Theta\left(\frac{x}{i},\frac{y}{i},\frac{z}{i},\frac{K}{Cvi}\right).$$

270. Proportionnalité des flux calorifiques de convection émis par le corps à ses excès de température. — Le flux de chaleur

$$K\left(\lambda\frac{d\theta}{dx}+\mu\frac{d\theta}{dy}+\nu\frac{d\theta}{dz}\right),$$

émis dans le fluide par l'unité d'aire des corps considérés, admettra dès lors, *aux points homologues de tous ces corps,* l'expression

$$(38)\qquad F=\frac{Ka}{i}\left(\lambda\frac{d\Theta}{d\xi}+\mu\frac{d\Theta}{d\eta}+\nu\frac{d\Theta}{d\zeta}\right)=\frac{Ka}{i}\times\text{une fonction de }\frac{K}{Cvi}.$$

Le flux qu'emporte le fluide varie donc d'une manière généralement complexe avec le produit Cv de la capacité calorifique C du courant par sa vitesse v, et avec le quotient $\frac{K}{i}$ de sa conductibilité K par le rapport i de similitude; mais, en revanche, *il est simplement proportionnel à l'excès a de température du corps.*

C'est ce qu'avait sans doute pressenti Newton dans l'énoncé de

sa loi de refroidissement; car il la réduisait expressément au cas des corps exposés à un courant d'air *uniforme* (¹).

(¹) **Expériences de M. Compan, confirmatrices de la théorie; explication plausible des faits découverts par de la Provostaye et Desains.** — Au moment où m'arrive l'épreuve à corriger de cette partie de mes Leçons (15 février 1902), je reçois de M. Compan, Préparateur du Cours de Physique à la Faculté des Sciences de Montpellier, communication d'expériences, encore inédites, qu'il vient de faire sur le pouvoir refroidissant de courants d'air auxquels un ventilateur électrique donnait les trois vitesses $3^m,05$, $4^m,40$ et 6^m par seconde. Ces expériences, relatives aux vitesses de refroidissement d'une boule de cuivre noircie, présentant des excès de température, sur le courant gazeux, qui décroissaient de 300° à zéro, prouvent l'exactitude de la loi de Newton. La partie des vitesses de refroidissement due au contact du fluide, ou qui subsiste après défalcation de la petite vitesse de refroidissement observée dans le vide (pour mêmes températures de la boule et de l'espace froid dont elle occupe le centre), est bien proportionnelle à l'excédent de température de la boule. Elle vérifie d'ailleurs la loi théorique de proportionnalité à $\sqrt{v}$, obtenue ci-après pour un disque tangent au courant, mais dont on peut prevoir (p. 194) l'extension approchée à la plupart des autres cas.

Des expériences antérieures de M. Compan (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CXXXIII, p. 1202; 23 décembre 1901) sur le pouvoir refroidissant de l'air calme ou sans courant général, faites dans un ballon de 16^{cm} de diamètre, contenant la masse d'air employée à refroidir une boule centrale de 2^{cm} de diamètre, avaient confirmé les lois de Dulong et Petit, sauf aux très faibles pressions où, probablement, la conductibilité K du gaz prenait, au lieu de sa valeur normale constante, les valeurs plus petites qui doivent avoir lieu à des degrés de raréfaction suffisants.

Mais, dans d'autres expériences non moins intéressantes du même auteur (relatées au même Article des *Comptes rendus*), le pouvoir refroidissant variait moins vite avec p et a que ne l'indiquent les facteurs $p^{0,46}$, $a^{1,233}$, le ballon, de $8^{cm},3$ seulement de diamètre, offrant sans doute une capacité insuffisante pour qu'on pût, surtout aux faibles pressions, y supposer indéfinie la masse gazeuse et en repos ses couches relativement éloignées de la boule centrale de 2^{cm}, comme l'impliquent à la fois notre théorie et les lois de Dulong et Petit.

Il est naturel, en effet, que, si l'on réduit graduellement la masse d'air confinée dans le ballon, le refroidissement et l'arrêt des courants chauffés par la boule se produisent, faute de matière pour absorber l'énergie calorifique, de plus en plus loin du centre et, finalement, sur le ballon même. Or, le phénomène se transformant alors, ses lois doivent changer. D'ailleurs, dès que le refroidissement a lieu, pour une part notable, assez près du ballon, et non plus exclusivement dans l'air *intérieur,* on conçoit que sa vitesse, conformément aux observations citées, diminue moins vite avec la pression, ou qu'elle puisse gagner, par l'intervention croissante de l'énorme conductibilité relative du ballon, presque autant qu'elle perd à raison du décroissement, supposé se continuer, de la masse totale d'air.

On conçoit même que, à partir d'un moment donné, cette vitesse du refroidissement se maintienne à peu près invariable, jusqu'à une certaine limite inférieure de pression, comme de la Provostaye et Desains l'avaient observé vers 1846 et

271. Intégration de l'équation des températures dans le cas d'un plateau mince. — Les équations (36) en θ étant linéaires, on peut espérer les intégrer, du moins dans quelques cas.

Le plus simple de ceux-ci est celui d'un plateau mince, limité d'un côté par un bord, indéfini suivant les autres sens et parallèle au courant, qui l'atteindra par son bord, et que nous supposerons d'abord le parcourir perpendiculairement à ce bord, rectiligne

---

comme l'a constaté M. Compan, entre les pressions de 50^{mm} et 3^{mm} de mercure, dans son ballon de $8^{cm},3$ de diamètre. Car, dès que le décroissement de θ, le long des normales au corps chaud menées dans le fluide jusqu'au ballon, devient sensible sur *toute* leur longueur, la constance imposée de la chute *a* de température entre leurs deux extrémités, c'est-à-dire entre les deux surfaces *fixes* du corps chaud et du ballon froid, restreint beaucoup l'amplitude des variations possibles de la dérivée ou *pente* de θ dans l'intervalle; ce qui n'y permet, près du corps chaud, au facteur $\lambda \frac{d\theta}{dx} + \mu \frac{d\theta}{dy} + \nu \frac{d\theta}{dz}$ de K dans le flux calorifique F de convection, que des écarts très inférieurs à ce qu'ils étaient jusque-là.

Aussi les physiciens ont-ils accepté l'hypothèse simple que le décroissement de θ, le long des normales communes au corps chaud et au ballon, tend à y devenir *uniforme*, malgré l'inégalité relative, ordinairement considérable, des deux surfaces du corps chaud et du ballon ou de leurs deux rayons respectifs R_0, R_1. Alors le flux F, immédiatement évaluable $\left(\text{exprimé par } K\frac{a}{R_1 - R_0}\right)$, devient lui-même constant, du moins dans la mesure où la conductibilité K du gaz est indépendante de sa densité ρ.

La capacité calorifique C de l'unité de volume étant, par contre, proportionnelle à ρ, le second membre de l'équation (16) des températures (p. 174) doit, en chaque point (x, y, z), être approximativement en raison inverse de ρ; et alors l'expression (20) du premier membre θ′ (p. 175) montre que les vitesses *u*, *v*, *w* du fluide le sont aussi, assez sensiblement. En d'autres termes, *la rapidité des courants de convection compense leur peu de masse.*

Et cet état de choses durerait jusqu'au degré de raréfaction où la conductibilité K décroît notablement.

M. Compan a encore reconnu qu'un plateau mince, suspendu au milieu d'une atmosphère à peu près calme, se refroidit plus vite quand il est vertical que lorsqu'il est horizontal, position où sa surface gêne le mouvement ascendant des filets d'air chaud qui s'y forment.

8 *mars* 1902. — De nouvelles expériences de M. Compan, faites, les unes dans un ballon de $14^{cm},5$ de diamètre et sous des pressions pouvant aller de zéro à 6^{atm}, les autres à l'air d'une grande salle close, non chauffée et à température sensiblement invariable, viennent d'être résumées dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. CXXXIV, p. 522; 3 mars 1902), en même temps que les précédentes (p. 189) sur le refroidissement par un courant. Elles prouvent, d'une part, que les lois de Dulong et Petit s'étendent aux pressions de plusieurs atmosphères et, d'autre part, qu'elles sont bien les lois du pouvoir refroidissant d'une masse gazeuse indéfinie, dépourvue de tout courant général.

pour fixer les idées. En prenant le bord même pour axe des y, un axe des x normal au plateau et l'axe des z suivant le courant, le plateau couvrira, de $z = 0$ à $z = \infty$, le plan $x = 0$; et, le courant n'étant évidemment pas troublé, les composantes u, v, w de sa vitesse seront partout 0, 0, v. On aura donc $U = 0$, $V = 0$, $W = 1$. Si l'on écrit, d'ailleurs, simplement $a\psi(z)$, entre les limites $z = 0$, $z = \infty$, la température donnée θ du plateau, et, de $z = -\infty$ à $z = 0$, la température, sensiblement nulle, du fluide sur le prolongement amont du plan du plateau, les équations (36) seront, en y remettant x, y, z au lieu de ξ, η, ζ,

$$(39)\quad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dz} = \dfrac{K}{C\mathrm{v}}\left(\dfrac{d^2\theta}{dx^2} + \dfrac{d^2\theta}{dz^2}\right), \\ (\text{pour } x = 0)\quad \theta = a\psi(z), \qquad (\text{pour } x = \pm\infty)\quad \theta = 0. \end{cases}$$

Considérons ce système d'équations du côté, par exemple, des x positifs; et supposons, en outre, la vitesse v du courant, suffisante pour limiter l'échauffement (sensible) θ du fluide aux petites distances x du plateau; de sorte que la dérivée seconde de θ en z soit négligeable, dans $\Delta_2\theta$, ou au second membre de la première équation (39), à côté de la dérivée analogue de θ en x. Alors la solution bien connue ([1]), du système (39), est, sous forme d'intégrale définie,

$$(40)\qquad \theta = a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \psi\left(z - \frac{C\mathrm{v}}{K}\,\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\,d\alpha.$$

On en déduit, notamment,

$$(41)\qquad \frac{d\theta}{dx} = -a\frac{C\mathrm{v}}{K}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \psi'\left(z - \frac{C\mathrm{v}}{K}\,\frac{\alpha^2}{2}\right)e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}}\,d\alpha.$$

272. Lois des flux de chaleur émis dans le fluide par le plateau. — Prenons cette dernière formule (41) à la limite $x = 0$, pour

---

([1]) *Voir*, par exemple, le Tome II (*Compléments*, p. 469*) de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*. D'ailleurs, la vérification, par (40), du système (39) débarrassé, comme il est dit, de la dérivée seconde de θ en z, se fait immédiatement, si l'on se souvient de la règle donnée dans le même Volume (p. 179) pour différentier les intégrales de la forme

$$\int_0^\infty \psi\left(\frac{x^2}{2\alpha^2}\right)f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)d\alpha.$$

l'introduire dans l'expression $-K\frac{d\theta}{dx}$ du flux F émis dans le fluide par l'unité d'aire du plateau. Si nous choisissons, au lieu de la variable d'intégration α, la variable

$$\beta = \alpha\sqrt{\frac{Cv}{2K}},$$

et même, enfin, une nouvelle variable Z, définie par la relation $z - \beta^2 = Z$, nous aurons successivement

$$(42) \qquad F = 2a\sqrt{\frac{KCv}{\pi}}\int_0^\infty \psi'(z-\beta^2)\,d\beta = \sqrt{\frac{KCv}{\pi}}\int_{-\infty}^{z} \frac{a\psi'(Z)\,dZ}{\sqrt{z-Z}}.$$

Le flux F *est* donc, toutes choses égales d'ailleurs, *proportionnel à l'excès moyen, a, de température du corps et à la racine carrée du produit de la conductibilité* K *du courant par la capacité calorifique* C *de son unité de volume et par sa vitesse* v.

Considérons la dernière expression (42) de F; et, appelant θ_0 l'excès $a\psi(Z)$ de température du plateau, ou du fluide dans son plan, tout le long de la parallèle d'abscisse Z à son bord, observons que $a\psi'(Z)\,dZ$ est l'accroissement $d\theta_0$ qu'éprouve la température *sur le plan du plateau*, entre cette parallèle, située à la distance $\delta = z - Z$ en amont de la parallèle même, d'abscisse z, sur laquelle on évalue le flux F, et la parallèle suivante, d'abscisse $Z + dZ$. Le flux emporté par le fluide peut donc encore s'écrire

$$(43) \qquad F = \sqrt{\frac{KCv}{\pi}}\sum\frac{d\theta_0}{\sqrt{\delta}};$$

et chaque *saut* $d\theta_0$ que fait la température *sur le plan du plateau, en amont* du point considéré où l'on évalue le flux F, contribue à ce flux, pour une part proportionnelle au saut $d\theta_0$ lui-même et inverse de la racine carrée de la distance δ à laquelle il se produit.

273. **Extension approchée des mêmes lois, au cas de tout corps à courbures modérées.** — Si, l'axe des z étant toujours pris sur le plateau, dans le sens du courant, et l'axe des x suivant la normale, le plateau avait son bord non plus parallèle aux y, mais

découpé d'une manière quelconque, et sa température, θ_0, non plus constante sur toute perpendiculaire au courant, mais variable avec y, ou que, en un mot, la fonction $a\psi(z)$ devînt $a\psi(y,z)$ (en s'annulant toujours pour $z=-\infty$), les formules (40) à (43) resteraient les mêmes, à part la présence du paramètre accessoire y dans la fonction ψ et dans sa dérivée ψ' relative à sa variable principale.

Alors, en effet, au second membre de la première équation (39), la parenthèse $\Delta_2\theta$ s'accroît de la dérivée seconde de θ en y; mais celle-ci n'y est pas moins négligeable que la dérivée analogue de θ en z. Et l'intégration approchée du système (39) continue à se faire, dans chaque plan mené suivant le courant normalement au plateau, sans qu'on ait à savoir ce qui se passe à côté.

Il en est encore de même, évidemment, quand le plateau se courbe en cylindre, sans que ses génératrices parallèles au courant cessent de l'être. L'intégrale (40) et les relations (41) à (43) continuent à s'appliquer, dans chaque plan longitudinal, normal au corps immergé, pourvu que les rayons de la courbure transversale ainsi donnée à celui-ci soient *beaucoup plus grands que l'épaisseur de la couche fluide notablement chauffée.*

Et l'on conçoit enfin qu'une courbure modérée prise par les filets fluides, seulement comparable à de telles courbures transversales, laisse encore subsister, à peu près, les mêmes formules le long de chaque groupe de filets contigu au corps, quand ils seront déviés par une convexité longitudinale du corps comparable aux convexités transversales dont il vient d'être question. Car, d'une part, θ ne varie rapidement, dans le groupe considéré de filets, que suivant la normale au corps, ou *avec la distance x à celui-ci,* et $\Delta_2\theta$ y est, dès lors, réductible à $\frac{d^2\theta}{dx^2}$. D'autre part, les filets s'y trouvant, d'après les vitesses *données* du fluide, dirigés à un aussi haut degré qu'on veut d'approximation suivant une *coupe du corps* prise pour *axe courbe des z,* pourvu que *tout leur groupe en soit assez voisin,* la dérivée θ' s'y réduira au terme correspondant $w\frac{d\theta}{dz}$. Donc l'équation indéfinie en θ, $C\theta' = K\Delta_2\theta$, y prend bien, comme autour d'un disque tangent au courant, la forme

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{K}{Cw}\frac{d^2\theta}{dx^2}, \tag{44}$$

avec w (au lieu de v) presque pareil pour tout le groupe de filets et pouvant même être peu dépendant de leur parcours, z, *effectué depuis l'endroit où aura commencé leur échauffement*, ou, du moins, pouvant souvent, avec quelque approximation, être remplacé par une *valeur moyenne*. Or cela suffira pour que les formules (40) à (43) soient applicables, sauf la substitution de w à v. D'où il suit, en particulier, vu la proportionnalité au moins approchée de la vitesse des filets fluides en chaque endroit, appelée ici w, à la vitesse générale v, que le pouvoir refroidissant du courant ne doit guère s'éloigner d'être en raison directe du facteur $\sqrt{\mathrm{KCv}}$, pour un corps de forme quelconque, mais de dimensions notables ou de courbures modérées [1].

274. Influence des sauts de température se produisant sur le parcours des filets fluides qui sillonnent le solide. — Alors la formule du flux F, qui ne diffère guère de (43) que par la substitution, à la vitesse générale v, d'une vitesse locale proportionnelle ou d'une certaine moyenne de pareilles vitesses locales, contient encore, d'une part, les accroissements successifs, $d\theta_0$, de la température du corps, sur le trajet du filet fluide aboutissant au

---

[1] Quand la vitesse w du groupe considéré de filets fluides varie trop avec z, à partir de l'endroit où leur échauffement commence, pour qu'on puisse lui substituer une valeur moyenne, son expression a néanmoins la forme $\mathrm{v}f(z)$, ou mieux $\frac{\mathrm{v}}{t'}$, avec t' fonction de z connue et mesurant le temps *relatif* employé par le fluide à parcourir l'unité de longueur de l'abscisse courbe z, *comparativement au temps employé de même là où* $w=\mathrm{v}$: cette fonction égale, par suite, la dérivée en z d'une autre, t, également connue, valeur de l'abscisse z censée mesurée pareillement *en temps relatif de parcours*. Or, alors, l'équation indéfinie (44), si l'on y pose $x\sqrt{\frac{\mathrm{Cv}}{\mathrm{K}}}=\xi$, devient $\frac{d\theta}{dt}=\frac{d^2\theta}{d\xi^2}$. Complétée par la condition $\theta=0$ (pour ξ infini ou x sensible) et par la relation spéciale à $\xi=0$, qu'on peut écrire, en modifiant un peu le sens de ψ, $\theta=a\psi(t)$, elle a pour intégrale, pareillement à (40), $\theta=a\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\psi\left(t-\frac{\xi^2}{2\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha$; et il en résulte pour le flux F de convection, au lieu de (42), la formule

$$\mathrm{F}=2a\sqrt{\frac{\mathrm{KCv}}{\pi}}\int_0^\infty\psi'(t-\beta^2)d\beta=\sqrt{\frac{\mathrm{KCv}}{\pi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{a\psi'(\mathrm{T})d\mathrm{T}}{\sqrt{t-\mathrm{T}}}=\sqrt{\frac{\mathrm{KCv}}{\pi}}\sum\frac{d\theta_0}{\sqrt{t-\mathrm{T}}}.$$

On voit que cette formule implique bien la proportionnalité de F à $\sqrt{\mathrm{KCv}}$, quoique, ici, chaque abscisse courbe z soit remplacée par le temps *relatif* t employé à la décrire.

point pour lequel on évalue le flux, et, d'autre part, les parcours respectifs, δ, du même filet, depuis les endroits où se produisent, en amont de ce point, les accroissements dont il s'agit, jusqu'à son arrivée à celui-ci (¹).

On s'explique facilement que chaque saut, $d\theta_0$, de la température du corps, le long du chemin suivi par le fluide qui y coule, entre en part dans les flux de chaleur enlevés au corps, en aval, par ce fluide; car le saut $d\theta_0$ accroît l'excédent de la température du solide, à l'aval, sur la masse fluide générale. Et l'on comprend tout aussi aisément que l'influence de ce saut $d\theta_0$ s'atténue à mesure qu'on s'éloigne, vers l'aval, du point où il a lieu; car le fluide, après s'être chauffé sur un parcours δ de plus en plus grand, est de moins en moins propre à refroidir le corps. Si donc il ne survient pas, sur le trajet de ce fluide, de nouveaux accroissements $d\theta_0$, les flux F deviendront de plus en plus faibles, pour disparaître sensiblement aux distances où la couche fluide voisine du corps aura, pour ainsi dire, acquis dans toute son épaisseur la température même de celui-ci.

On voit qu'il n'y aura de flux notables qu'à la partie avant ou *proue* d'un corps allongé, maintenu à une température uniforme a.

On voit aussi que le coefficient de a dans le second membre de la formule (42) est fonction du mode ψ de répartition des températures sur le corps; en sorte qu'il n'admet pas une valeur fixe, déterminable à l'avance, en chaque point de la surface. Ainsi, même quand un courant constant assure, à la surface libre d'un corps, la sortie de flux de convection proportionnels à l'excédent moyen de température, a, de ce corps sur la masse fluide ambiante, le coefficient de cette proportionnalité, ou *conductibilité extérieure k afférente à la convection,* ne peut recevoir que des valeurs moyennes plus ou moins empiriques.

275. Pouvoir refroidissant du courant; réflexions générales. — En somme, toutefois, la formule (42) montre que le *pouvoir refroidissant du courant fluide est en raison directe :* 1° *de l'excédent moyen a de température du corps;* 2° *de la racine*

(¹) Quand on emploie les formules plus approchées de la note précédente, les parcours δ se trouvent remplacés par leurs *durées relatives* t — T.

carrée de la vitesse v *du courant; enfin,* 3° *de celle du produit de sa conductibilité intérieure* K *par la capacité calorifique* C *de son unité de volume.*

On remarquera que, d'après la formule (28) (p. 181), le pouvoir refroidissant d'un fluide en repos est proportionnel à une puissance de K et à une puissance de C dont les exposants, à peu de chose près, égalent aussi $\frac{1}{2}$. D'où l'on inférera que, dans le cas intermédiaire, bien plus complexe, d'un courant faible ou largement modifié autour du corps par l'échauffement, le pouvoir refroidissant sera encore proportionnel à la racine carrée du produit KC. Il devra, d'ailleurs, sensiblement varier, avec les excès a de température, comme $a^{1,1}$, qui tient à peu près le milieu entre les facteurs $a^{1,233}$, a^{1}, relatifs aux deux cas extrêmes.

Alors le flux calorifique de convection est presque proportionnel aux excès de température, comme le suppose Fourier; et si l'on observe que, dans les cas de l'armille, d'une barre, de petits corps massifs, etc., ces excès sont à peu près *uniformes* dans chaque volume pour lequel se pose l'équation différentielle du problème, savoir, dans un tronçon d'armille ou de barre et dans le corps massif entier, on concevra que l'expression, à introduire dans l'équation, de la chaleur emportée par le fluide soit, très sensiblement, le produit de ces excès uniformes par la surface libre totale du volume en question et par une *moyenne* des valeurs qu'y prend le coefficient k, la même pour tous les tronçons ou volumes analogues, *autour desquels circulent à peu près pareillement les courants de convection.*

Donc, quoique loin d'être exacte, l'hypothèse d'un coefficient k constant pour toute la surface réussira. Mais sa valeur moyenne effective, déduite des expériences, se trouvera dépendre de circonstances difficiles à déterminer, notamment de légers et accidentels courants d'air. Il faut, sans doute, attribuer en grande partie à de telles circonstances, plutôt qu'à des variations du degré de poli ou à des oxydations de la surface, la grande variabilité de ce coefficient constatée par Fourier dans ses expériences sur l'armille (¹).

(¹) *Voir* plus haut le Tome I, page 263.

NOTE I.

SUR LA RÉSISTANCE OPPOSÉE AUX PETITS MOUVEMENTS D'UN FLUIDE INDÉFINI PAR UN SOLIDE IMMERGÉ DANS CE FLUIDE.

NOTE I[1].

SUR LA RÉSISTANCE OPPOSÉE AUX PETITS MOUVEMENTS D'UN FLUIDE INDÉFINI PAR UN SOLIDE IMMERGÉ DANS CE FLUIDE [2].

PREMIÈRE PARTIE.

LOIS GÉNÉRALES DE LA RÉSISTANCE, DANS L'HYPOTHÈSE D'UNE FLUIDITÉ PARFAITE.

1. Exposé du problème dans le cas d'un fluide sans frottements. — Une masse fluide indéfinie, sans pesanteur, et d'une densité ρ constante, entourant un solide fixe ou mobile, d'orientation invariable, qu'elle baigne de toutes parts, est supposée animée, sauf près du solide, d'un mouvement commun et assez lent, sous l'action d'une petite force extérieure, la même sur l'unité de masse de toutes les particules fluides, mais variable arbitrairement d'un instant à l'autre [3]. Proposons-nous, X, Y, Z étant les composantes de cette force et u', v', w' les accélérations prises par le fluide, égales par hypothèse à X, Y, Z dans les régions éloignées du solide, de trouver les trois composantes R_x, R_y, R_z de la *poussée* ou impulsion totale exercée à l'époque t sur ce solide par le fluide ambiant, ou, ce qui revient au même, les trois composantes $-R_x$, $-R_y$, $-R_z$ de la résistance que celui-ci éprouve de la part du solide immergé.

---

(1) Se rapportant à la quatrième Leçon (t. I, p. 55).

(2) Cette Note a pris beaucoup plus d'extension que je ne pensais : le lecteur me pardonnera de m'y être laissé entraîner par l'intérêt du sujet, la simplicité des méthodes, et j'oserai ajouter la beauté des résultats, dus en grande partie à du Buat, Poisson, Green et G. Stokes.

(3) Dans l'application que nous devons faire, par analogie, de cette théorie aux ondes lumineuses, où le fluide devient l'éther et où le solide est une molécule quelconque du corps transparent étudié, les molécules n'éprouvent presque aucun déplacement soit d'ensemble, soit de rotation. Voilà pourquoi nous pouvons, à très peu près, supposer invariable l'orientation de notre solide.

Faisons d'abord abstraction des frottements intérieurs du fluide. Si p désigne l'excédent de la pression en un point quelconque (x, y, z) sur sa valeur, évidemment constante, aux grandes distances du solide immergé, là où $u' = X$, $v' = Y$, $w' = Z$, on aura comme équations indéfinies du problème, d'une part, celles d'Euler, bien connues,

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X - u', \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y - v', \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z - w',$$

d'autre part, la formule, exprimant la conservation des volumes fluides,

$$(2) \qquad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Il faudra y joindre, comme relations spéciales, en premier lieu, aux grandes distances $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ de l'origine, l'annulation asymptotique de p, et, en second lieu, à la surface du corps immergé, cette condition, que le fluide y glisse sur le solide ou, du moins, sur une mince couche fluide adhérente au solide. Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de gravité du solide, coordonnées ou constantes ou un peu variables, mais, alors, fonctions données du temps t. L'équation de la surface sera, pour tous les corps immergés d'une même forme quelconque et d'orientation invariable,

$$(3) \qquad f\left(\frac{x-x_0}{k}, \frac{y-y_0}{k}, \frac{z-z_0}{k}\right) = 0,$$

où f désigne une fonction donnée et k une ligne quelconque de la figure, ligne que nous choisirons (pour simplifier plus loin une formule) égale au quotient du volume du corps par sa surface σ. Alors, si l'on fait croître, dans (3), t de dt, c'est-à-dire x_0, y_0, z_0 de leurs différentielles effectives $\frac{d(x_0, y_0, z_0)}{dt}dt$, et aussi x, y, z de $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$, de manière à suivre une molécule superficielle dans son mouvement, l'équation ne cessera pas d'être satisfaite. Autrement dit, aux points où x, y, z vérifient l'équation (3), il existe entre u, v et w la relation

$$(4) \qquad \frac{df}{dx}\left(u - \frac{dx_0}{dt}\right) + \frac{df}{dy}\left(v - \frac{dy_0}{dt}\right) + \frac{df}{dz}\left(w - \frac{dz_0}{dt}\right) = 0.$$

2. Formation, pour ce cas, d'équations d'où les vitesses u, v, w soient éliminées. — Les vitesses u, v, w d'une molécule quelconque contiguë au corps satisfaisant continûment à cette relation (4), on peut,

sans qu'elle cesse d'être vérifiée, y faire croître, d'une part, t de dt, ou $x_0, y_0, z_0, \frac{d(x_0, y_0, z_0)}{dt}$ de $\frac{d(x_0, y_0, z_0)}{dt} dt, \frac{d^2(x_0, y_0, z_0)}{dt^2} dt$, et x, y, z de $u\,dt$, $v\,dt$, $w\,dt$, d'autre part, u, v, w, de $u'dt$, $v'dt$, $w'dt$. Mais les petites variations qu'éprouveront ainsi par unité de temps les premiers facteurs $\frac{df}{d(x, y, z)}$ se trouveront multipliées par les seconds facteurs, très petits aussi, $u - \frac{dx_0}{dt}, \cdots$; ce qui les rendra négligeables du second ordre de petitesse, en sorte qu'il viendra simplement

$$(5) \qquad \frac{df}{dx}\left(u' - \frac{d^2 x_0}{dt^2}\right) + \frac{df}{dy}\left(v' - \frac{d^2 y_0}{dt^2}\right) + \frac{df}{dz}\left(w' - \frac{d^2 z_0}{dt^2}\right) = 0.$$

On rend cette relation, de même que (4), indépendante des dimensions absolues de la surface $f = 0$, en y remplaçant les trois dérivées partielles de f en x, y, z par les cosinus proportionnels (*cosinus directeurs*) des angles α, β, γ que fait avec les axes une normale dn à la surface, normale tirée, par exemple, en partant du point (x, y, z), dans le fluide même, ou hors du corps. La relation (5) s'écrit alors [1]

$$(6) \qquad \left(u' - \frac{d^2 x_0}{dt^2}\right)\cos\alpha + \left(v' - \frac{d^2 y_0}{dt^2}\right)\cos\beta + \left(w' - \frac{d^2 z_0}{dt^2}\right)\cos\gamma = 0.$$

---

[1] On l'aurait déduite un peu plus simplement de l'équation (4) en observant durant un instant dt les vitesses u, v, w du fluide sur un même point

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

de la surface du solide, où $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$ sont invariables. Le chemin décrit par ce point dans l'espace étant, suivant les trois axes, $\frac{d(x_0, y_0, z_0)}{dt} dt$, le changement élémentaire de u qui s'y produit a pour expression

$$\left(\frac{du}{dt} + \frac{du}{dx}\frac{dx_0}{dt} + \frac{du}{dy}\frac{dy_0}{dt} + \frac{du}{dz}\frac{dz_0}{dt}\right) dt:$$

et l'on voit que, rapporté à l'unité du temps dt, il se réduit, par la suppression des trois termes non linéaires, à la dérivée *sur place* $\frac{du}{dt}$, dérivée équivalente de même à u', au degré d'approximation poursuivi. Quant à $\frac{dx_0}{dt}$, son changement élémentaire, divisé par dt, est $\frac{d^2 x_0}{dt^2}$. Des remarques analogues ayant lieu pour v, w et pour $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$, l'équation (4), savoir

$$\left(u - \frac{dx_0}{dt}\right)\cos\alpha + \left(v - \frac{dy_0}{dt}\right)\cos\beta + \left(w - \frac{dz_0}{dt}\right)\cos\gamma = 0,$$

donne donc bien (6), toujours au degré d'approximation adopté.

L'équation linéaire indéfinie (2) peut être, de son côté, différentiée en t, sans faire varier x, y, z, c'est-à-dire en considérant les vitesses u, v, w, qui se succèdent en un même point de l'espace; et l'on sait que les dérivées partielles de u, v, w en t, qui s'introduisent alors, ne diffèrent des accélérations u', v', w' que par des termes non linéaires et dès lors négligeables, produits de u, v, w par les dérivées respectives en x, y, z de u, ou v, ou w. Ainsi, de même que la condition spéciale (4), en u, v, w, a fourni la relation (6) en u', v', w', de même aussi l'équation (2), en u, v, w, donnera l'équation indéfinie en u', v', w', toute pareille,

$$(7) \qquad \frac{du'}{dx} + \frac{dv'}{dy} + \frac{dw'}{dz} = 0.$$

3. Limites imposées à leur emploi. — Les relations simples (6) et (7) supposent, comme on voit, les vitesses assez petites pour que les carrés et produits de u, v, w, $-\frac{d(x_0, y_0, z_0)}{dt}$, ou de leurs dérivées, puissent être négligés à côté des premières puissances de ces diverses quantités.

Il importe de remarquer que des mouvements relatifs du fluide par rapport au solide, trop rapides pour permettre cette réduction, provoqueraient, tout au moins à l'aval du solide, là où se dilateraient, en se rejoignant, les filets fluides qui l'auraient contourné, des tourbillonnements et autres mouvements compliqués, qui entraînent, comme on sait, une exagération du frottement intérieur presque toujours suffisante pour mettre en défaut, même pratiquement, les équations (1) d'Euler. Et il peut s'y produire en outre des discontinuités, ou ruptures de fluide, incompatibles avec (1), (2) et (4), à moins toutefois qu'il s'agît seulement de variations rapides de u, v, w en x, y, z, et qu'il fût possible d'introduire dans nos formules, non les vitesses vraies du fluide en x, y, z, mais leurs valeurs *moyennes locales*, beaucoup plus graduellement variables. A cette réserve près, les formules (1) à (4) cessent donc de subsister, à la poupe ou à l'aval du corps, à peu près en même temps, ce semble, que la différentiation en t de (4) et (2) cesse d'entraîner les équations (6) et (7); de sorte qu'il ne serait sans doute pas très utile, au point de vue des faits, de compliquer celles-ci, (6) et (7), par l'adjonction de termes non linéaires, tout en continuant à admettre la fluidité parfaite et la graduelle variation des vitesses, c'est-à-dire les relations (1) à (4).

4. Équations régissant et déterminant la pression du fluide. — Cela posé, il suffit de tirer u', v', w' des équations (1), où X, Y, Z ont

leurs dérivées en x, y, z nulles, et d'en substituer les valeurs dans (7) et (6), en observant d'ailleurs que p s'annule asymptotiquement à l'infini, pour avoir, en p, le système complet d'équations :

$$(8)\qquad \frac{d^2p}{dx^2}+\frac{d^2p}{dy^2}+\frac{d^2p}{dz^2}=0, \quad \text{ou} \quad \Delta_2 p=0;$$

(à la surface $f=0$)

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dx}\cos\alpha+\frac{dp}{dy}\cos\beta+\frac{dp}{dz}\cos\gamma\right) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dn} \\ &= \left(X-\frac{d^2x_0}{dt^2}\right)\cos\alpha+\left(Y-\frac{d^2y_0}{dt^2}\right)\cos\beta+\left(Z-\frac{d^2z_0}{dt^2}\right)\cos\gamma, \end{aligned} \right.$$

$$(10)\qquad \text{(aux distances } \sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ infinies)} \quad p=0.$$

Toutefois, dans le cas particulier d'un cylindre de longueur indéfinie, que nous examinerons à part, la relation (10), spéciale aux distances infinies, devra s'entendre des distances à l'axe du cylindre et non des distances à l'origine. Il n'y figurera pas, sous le radical, la coordonnée x, ou y, ou z, dont le sens aura été choisi suivant l'axe du cylindre.

Ces équations (8), (9), (10), considérées à l'époque actuelle t, n'admettent qu'une solution, pour chaque système donné de valeurs des trois constantes $X-\frac{d^2x_0}{dt^2}$, $Y-\frac{d^2y_0}{dt^2}$, $Z-\frac{d^2z_0}{dt^2}$.

Car, si, p désignant une solution, il en existait une seconde $p+p'$, leur différence p' donnerait évidemment, d'après (8), (9), (10), et en laissant provisoirement de côté le cas du cylindre de longueur indéfinie :

$$(11)\qquad \Delta_2 p'=0,$$

$$(12)\qquad \text{(à la surface } f=0\text{)} \quad \frac{dp'}{dn}=0,$$

$$(13)\qquad \text{(aux distances } \sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ infinies)} \quad p'=0.$$

Or, multiplions (11) par p' et par l'élément $d\varpi=dx\,dy\,dz$ du volume fluide ϖ compris entre le solide et une sphère quelconque l'entourant, dont r désignera le rayon ; puis intégrons les résultats dans tout cet espace ϖ, après avoir dédoublé les trois produits $p'\frac{d^2p'}{(dx^2,dy^2,dz^2)}$ en

$$\frac{d}{d(x,y,z)}\left[p'\frac{dp'}{d(x,y,z)}\right]-\left[\frac{dp'}{d(x,y,z)}\right]^2.$$

Si l'on désigne par σ' l'aire sphérique enveloppante $4\pi r^2$, par $d\sigma'$

l'un quelconque de ses éléments, et par dr une normale élémentaire qu'on y mène vers le dehors de ϖ, prolongement du rayon r aboutissant à $d\sigma'$, si, d'autre part, on appelle σ l'aire de la surface limite intérieure $f=0$, et $d\sigma$ un de ses éléments, dont la normale dirigée vers le dehors du fluide sera $-dn$, enfin que l'on écrive, avec Lamé, $\Delta_1 p'$ le paramètre différentiel du premier ordre

$$\sqrt{\left(\frac{dp'}{dx}\right)^2+\left(\frac{dp'}{dy}\right)^2+\left(\frac{dp'}{dz}\right)^2}$$

de la fonction p', une méthode qui nous est familière, consistant à convertir en intégrales de surface les intégrales de volume où une intégration sur trois s'effectue immédiatement, donnera

$$\int_{\sigma'} p'\frac{dp'}{dr}d\sigma' - \int_{\sigma} p'\frac{dp'}{dn}d\sigma - \int_{\varpi}(\Delta_1 p')^2 d\varpi = 0,$$

ou simplement, vu (12), et en divisant d'ailleurs par σ',

$$(14)\qquad \frac{1}{2}\int_{\sigma'}\frac{d.p'^2}{dr}\frac{d\sigma'}{\sigma'} = \frac{1}{\sigma'}\int_{\varpi}(\Delta_1 p')^2 d\varpi.$$

Or le rapport $\frac{d\sigma'}{\sigma'}$ est indépendant de r, quand on prend les éléments $d\sigma'$ semblables, ou se correspondant le long des mêmes rayons, pour des sphères concentriques σ' de plus en plus grandes. Et il est clair qu'alors $\int_{\sigma'}\frac{d.p'^2}{dr}\frac{d\sigma'}{\sigma'}$ revient à $\frac{d}{dr}\int_{\sigma'}p'^2\frac{d\sigma'}{\sigma'}$, ou à la dérivée en r de la valeur moyenne de p'^2 sur toute l'étendue $\sigma'=4\pi r^2$ de la sphère. Donc l'équation (14), multipliée par 2, peut encore s'écrire

$$(15)\qquad \frac{d}{dr}\int_{\sigma'}p'^2\frac{d\sigma'}{\sigma'} = \frac{2}{\sigma'}\int_{\varpi}(\Delta_1 p')^2 d\varpi.$$

Celle-ci, à second membre essentiellement positif, montre que la valeur moyenne du carré positif p'^2 sur l'aire σ' a sa dérivée en r plus grande que zéro, à moins que p' ne soit constant dans tout l'espace ϖ (ce qui donne $\Delta_1 p'=0$). Or cette valeur moyenne, nulle pour r infini en vertu de (13), et incapable d'être jamais inférieure à zéro, ne peut pas croître avec r ou avoir sa dérivée en r positive. Ainsi, l'équation (15) a pour premier membre zéro; et elle astreint le paramètre différentiel $\Delta_1 p'$ à s'annuler lui-même identiquement dans l'espace ϖ. Donc p' est constant partout, c'est-à-dire nul partout comme à l'infini; et les équations (8), (9), (10) déterminent complètement la pression p.

Après quoi, la fonction p étant fixée, les équations (1) font connaître les accélérations u', v', w'. Puis une intégration $\int(u',v',w')dt$, effectuée sans avoir besoin de faire varier x, y, z, en tire très sensiblement les changements éprouvés par les petites vitesses u, v, w du fluide en chaque endroit (x, y, z), à partir d'un état initial où elles étaient supposées connues et où elles vérifiaient déjà les relations (2) et (4).

5. Comment varie cette pression avec les dimensions absolues du corps et avec le mouvement relatif du fluide. — L'équation (9) étant la seule du système linéaire (8), (9), (10) qui ait un second membre, il est clair que la pression p et, par suite, les composantes R_x, R_y, R_z de l'impulsion cherchée égaleront les sommes respectives des valeurs qu'elles prendraient, si ce second membre se réduisait successivement à chacun de ses trois termes. Il suffit, par conséquent, d'évaluer p dans la supposition où l'on aurait

$$Y - \frac{d^2 y_0}{dt^2} = 0, \qquad Z - \frac{d^2 z_0}{dt^2} = 0,$$

et dans deux autres analogues.

De plus, afin d'introduire au lieu de x, y, z, dans (8), (9) et (10), des variables ξ, η, ζ indépendantes des dimensions absolues du corps, posons

$$(16) \qquad \xi = \frac{x - x_0}{k}, \qquad \eta = \frac{y - y_0}{k}, \qquad \zeta = \frac{z - z_0}{k};$$

ce qui donnera, pour transformer les dérivées en x, y, z des fonctions, les formules symboliques

$$(17) \qquad \frac{d}{dx} = \frac{1}{k}\frac{d}{d\xi}, \qquad \frac{d}{dy} = \frac{1}{k}\frac{d}{d\eta}, \qquad \frac{d}{dz} = \frac{1}{k}\frac{d}{d\zeta}.$$

Alors, en supposant, par exemple, le dernier membre de (9) réduit au premier de ses trois termes, divisons (8), (9), (10) par la valeur donnée de $X - \frac{d^2 x_0}{dt^2}$ et, en outre, (8) par $\frac{\rho}{k}$, (10) par ρk. Enfin, appelons, pour abréger, p le quotient de p par $\rho k\left(X - \frac{d^2 x_0}{dt^2}\right)$, seule fonction inconnue figurant alors dans le système. Il viendra :

$$(18) \qquad \frac{d^2 \mathrm{p}}{d\xi^2} + \frac{d^2 \mathrm{p}}{d\eta^2} + \frac{d^2 \mathrm{p}}{d\zeta^2} = 0,$$

$$(19) \qquad [\text{à la surface } f(\xi, \eta, \zeta) = 0] \quad \frac{d\mathrm{p}}{d\xi}\cos\alpha + \frac{d\mathrm{p}}{d\eta}\cos\beta + \frac{d\mathrm{p}}{d\zeta}\cos\gamma = \cos\alpha,$$

$$(20) \qquad (\text{aux distances } \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} \text{ infinies}) \quad \mathrm{p} = 0.$$

p est ainsi la fonction de ξ, η, ζ, complètement déterminée, à laquelle se réduit la pression p quand $Y - \frac{d^2 y_0}{dt^2}$, $Z - \frac{d^2 z_0}{dt^2}$ s'annulent et que les trois paramètres k, ρ, $X - \frac{d^2 x_0}{dt^2}$ ont pour valeurs l'unité.

Soit $\mathrm{p}(\xi, \eta, \zeta)$ cette fonction de ξ, η, ζ, que fera connaître l'intégration du système (18), (19), (20). Il est clair que nous aurons, quels que soient k, ρ et $X - \frac{d^2 x_0}{dt^2}$,

$$(21) \qquad p = \rho k \left(X - \frac{d^2 x_0}{dt^2}\right) \mathrm{p}\left(\frac{x - x_0}{k}, \frac{y - y_0}{k}, \frac{z - z_0}{k}\right).$$

6. Formules générales de la résistance, quand il n'y a pas de frottements. — Considérons un élément quelconque $d\sigma$ de la surface $f = 0$. Les trois composantes de la pression que le fluide y subit sont $p\,d\sigma\cos\alpha$, $p\,d\sigma\cos\beta$, $p\,d\sigma\cos\gamma$. Donc les trois composantes contraires de la pression que le fluide y exerce sur le corps s'écriront, en les exprimant à la fois par une formule triple,

$$(22) \qquad -\rho\sigma k \left(X - \frac{d^2 x_0}{dt^2}\right) \mathrm{p}(\xi, \eta, \zeta) \cos(\alpha, \beta, \gamma) \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Il suffira d'intégrer ces trois expressions sur toute la surface σ, pour avoir les composantes R_x, R_y, R_z de l'impulsion totale exercée sur le corps par le fluide en mouvement. Appelons, pour abréger, a, f', e les trois intégrales, étendues à toute la surface du corps, et évidemment indépendantes de ses dimensions absolues,

$$(23) \qquad \begin{cases} \mathrm{a} = -\displaystyle\int_\sigma \mathrm{p}(\xi, \eta, \zeta) \cos\alpha \frac{d\sigma}{\sigma}, \\ \mathrm{f'} = -\displaystyle\int_\sigma \mathrm{p}(\xi, \eta, \zeta) \cos\beta \frac{d\sigma}{\sigma}, \\ \mathrm{e} = -\displaystyle\int_\sigma \mathrm{p}(\xi, \eta, \zeta) \cos\gamma \frac{d\sigma}{\sigma}. \end{cases}$$

De plus, observons que le produit σk est le volume du solide, d'après la définition même de k, et que $\rho\sigma k$ exprime, par suite, la masse m du fluide déplacé statiquement par le corps. Nous aurons :

$$(24) \qquad \begin{cases} R_x = \mathrm{a}\, m \left(X - \dfrac{d^2 x_0}{dt^2}\right), \\ R_y = \mathrm{f'}\, m \left(X - \dfrac{d^2 x_0}{dt^2}\right), \\ R_z = \mathrm{e}\, m \left(X - \dfrac{d^2 x_0}{dt^2}\right). \end{cases}$$

On aurait certains coefficients f, b et d', e', d et c, analogues à a, f', e, ou définis par des formules comme (23), si le second membre de (19) était soit $\cos\beta$, soit $\cos\gamma$, au lieu de $\cos\alpha$, c'est-à-dire si le dernier membre de (9) (p. 203) se réduisait ou à son second, ou à son troisième terme, et non au premier. Par suite, l'expression générale cherchée de l'impulsion (R_x, R_y, R_z), exercée sur le solide immergé par le fluide ambiant, sera

$$(25)\quad \begin{cases} R_x = m\left[a\left(X - \dfrac{d^2x_0}{dt^2}\right) + f\left(Y - \dfrac{d^2y_0}{dt^2}\right) + e'\left(Z - \dfrac{d^2z_0}{dt^2}\right)\right], \\ R_y = m\left[f'\left(X - \dfrac{d^2x_0}{dt^2}\right) + b\left(Y - \dfrac{d^2y_0}{dt^2}\right) + d\left(Z - \dfrac{d^2z_0}{dt^2}\right)\right], \\ R_z = m\left[e\left(X - \dfrac{d^2x_0}{dt^2}\right) + d'\left(Y - \dfrac{d^2y_0}{dt^2}\right) + c\left(Z - \dfrac{d^2z_0}{dt^2}\right)\right]. \end{cases}$$

Comme X, Y, Z égalent, à chaque instant, les trois accélérations effectivement éprouvées par le fluide, suivant les trois axes, aux grandes distances du corps, les différences $X - \dfrac{d^2x_0}{dt^2}$, $Y - \dfrac{d^2y_0}{dt^2}$, $Z - \dfrac{d^2z_0}{dt^2}$ expriment les trois composantes de l'accélération relative du fluide, considéré dans son mouvement général, par rapport au corps; et *la résistance du solide, ou l'impulsion qu'il éprouve sont,* par suite, *proportionnelles au produit de cette accélération relative par la masse fluide m que déplace le corps, c'est-à-dire proportionnelles à la force motrice qui imprimerait à une pareille masse m un mouvement absolu identique au mouvement relatif des deux espèces de matière,* les coefficients de cette proportionnalité dépendant d'ailleurs uniquement de la forme du solide.

7. Égalité, deux à deux, de six coefficients de résistance; valeur positive des trois autres. — Les six coefficients d et d', e et e', f et f' sont égaux deux à deux. Car, si l'on appelle, par exemple, ρ' la fonction de ξ, η, ζ qui satisfait aux équations (18) et (20), comme ρ, mais qui, au lieu de (19), vérifie, à la surface σ du corps, la condition

$$(26)\qquad \frac{d\rho'}{d\xi}\cos\alpha + \frac{d\rho'}{d\eta}\cos\beta + \frac{d\rho'}{d\zeta}\cos\gamma = \cos\beta,$$

l'expression du coefficient de résistance f sera

$$(27)\qquad f = -\int_\sigma \rho'(\xi, \eta, \zeta)\cos\alpha\,\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Or imaginons, pour fixer les idées, qu'on effectue les intégrations

dans l'hypothèse d'un corps où l'on aurait $k=1$ et où, par suite, ξ, η, ζ seraient des coordonnées rectangulaires. Alors l'équation (18) donnerait

$$(28) \qquad \Delta_2 \mathrm{p} = 0, \qquad \Delta_2 \mathrm{p}' = 0;$$

et les relations (19), (26) reviendraient à poser, sur toute l'étendue de σ,

$$(29) \qquad \cos\alpha = \frac{d\mathrm{p}}{dn}, \qquad \cos\beta = \frac{d\mathrm{p}'}{dn}.$$

L'égalité de f et de f' sera donc exprimée par la formule

$$(30) \qquad \int_\sigma \left(\mathrm{p}'\frac{d\mathrm{p}}{dn} - \mathrm{p}\frac{d\mathrm{p}'}{dn}\right) d\sigma = 0,$$

qu'il reste à démontrer.

A cet effet, multiplions respectivement les deux équations (28) par $\mathrm{p}'\,d\varpi$, $-\mathrm{p}\,d\varpi$ et ajoutons-les; puis, après avoir remplacé les différences $\mathrm{p}'\frac{d^2\mathrm{p}}{d\xi^2} - \mathrm{p}\frac{d^2\mathrm{p}'}{d\xi^2}$, $\cdots$ par $\frac{d}{d\xi}\left(\mathrm{p}'\frac{d\mathrm{p}}{d\xi} - \mathrm{p}\frac{d\mathrm{p}'}{d\xi}\right)$, $\ldots$, intégrons les résultats, par la méthode ordinaire, dans toute l'étendue ϖ comprise entre la surface σ et une sphère $\sigma' = 4\pi r^2$, d'un rayon très grand r, décrite autour de l'origine. Il viendra, vu la réduction connue, en intégrales de surface, des intégrales de volume où une intégration s'effectue immédiatement,

$$(31) \qquad \int_{\sigma'} \left(\mathrm{p}'\frac{d\mathrm{p}}{dr} - \mathrm{p}\frac{d\mathrm{p}'}{dr}\right) d\sigma' - \int_\sigma \left(\mathrm{p}'\frac{d\mathrm{p}}{dn} - \mathrm{p}\frac{d\mathrm{p}'}{dn}\right) d\sigma = 0.$$

Or la première intégrale, prise sur l'aire infinie σ', est infiniment petite. En effet, les fonctions p, p' y seront au moins, comme on verra par les exemples des corps sphériques et cylindriques circulaires, de l'ordre de petitesse de $\frac{1}{r}$; et, par suite, leurs dérivées en r seront au moins de l'ordre de petitesse de $\frac{1}{r^2}$. Donc la fonction sous le signe $\int$ y atteint pour le moins une petitesse comparable à celle de $\frac{1}{r^3}$; et, comme σ' est (au plus) de l'ordre de grandeur de r^2, l'intégrale devient bien nulle à la limite. Il ne reste donc alors, dans (31), que le terme en $\int_\sigma$: ce qui établit la relation (30).

On aura par conséquent, ici, la triple égalité

(32) $$d' = d, \qquad e' = e, \qquad f' = f.$$

Toutefois, comme nous transporterons, par simple analogie, les formules (25) dans la théorie de la lumière, en changeant leurs coefficients, et que cette analogie ne sera pas assez étroite pour garantir absolument (en dehors de certains cas de symétrie) la persistance de la triple égalité (32), il semble préférable de laisser subsister les accents, dans trois des six coefficients en question, afin de pouvoir, au besoin, les distinguer des trois autres.

Du reste, ils seront nuls quand le corps offrira trois plans rectangulaires de symétrie, parallèlement auxquels auront été choisis les plans coordonnés. Car, dans le cas, par exemple, des formules (24), où le mouvement relatif se fait suivant les x et sera symétrique de part et d'autre des deux plans diamétraux parallèles aux xy et aux xz, ces plans ne pourront manquer de contenir la pression; ce qui exigera que l'on ait $e = 0$, $f' = 0$.

Occupons-nous maintenant des trois principaux coefficients de résistance, a, b, c.

Si l'on multiplie l'équation $\Delta_2 p = 0$ par $p\, d\varpi$, et qu'après avoir remplacé $p\frac{d^2p}{d\xi^2}$, $\cdots$ par $\frac{d}{d\xi}\left(p\frac{dp}{d\xi}\right) - \frac{dp^2}{d\xi^2}$, $\cdots$, on applique la méthode ci-dessus d'intégration, dans tout l'espace ϖ qu'occupe le fluide, il vient, *à la limite*, c'est-à-dire par l'agrandissement indéfini de la sphère σ',

(33) $$-\int_\sigma p\frac{dp}{dn}d\sigma = \int_\varpi (\Delta_1 p)^2 d\varpi, \quad \text{ou} \quad -\int_\sigma p\cos\alpha\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\int_\varpi (\Delta_1 p)^2 d\varpi.$$

Donc la première formule (23) devient

(34) $$a = \frac{1}{\sigma}\int_\varpi (\Delta_1 p)^2 d\varpi;$$

ce qui démontre que le coefficient, a, et, de même, les coefficients b, c, sont essentiellement positifs.

7 *bis*. **Existence d'un potentiel de la résistance et d'un système d'axes principaux, pour tout solide immergé.** — La réduction des neuf coefficients de résistance aux six distincts a, b, c, d, e, f revient évidemment à dire que les trois composantes R_x, R_y, R_z de la résistance totale sont les dérivées, par rapport aux trois accélérations relatives

analogues $X - \frac{d^2 x_0}{dt^2}$, $Y - \frac{d^2 y_0}{dt^2}$, $Z - \frac{d^2 z_0}{dt^2}$, d'un polynome homogène du second degré Φ dépendant de ces accélérations. Désignons, pour abréger, celles-ci par $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$. Nous aurons

$$(\alpha) \qquad \Phi = \frac{m}{2}(a\mathfrak{X}^2 + b\mathfrak{Y}^2 + c\mathfrak{Z}^2 + 2d\mathfrak{Y}\mathfrak{Z} + 2e\mathfrak{Z}\mathfrak{X} + 2f\mathfrak{X}\mathfrak{Y})$$

et

$$(\alpha') \qquad R_x = \frac{d\Phi}{d\mathfrak{X}}, \qquad R_y = \frac{d\Phi}{d\mathfrak{Y}}, \qquad R_z = \frac{d\Phi}{d\mathfrak{Z}}.$$

Maintenant changeons à volonté la direction des axes coordonnés des x, y, z en adoptant, à leur place, de nouveaux axes rectangulaires des x_1, y_1, z_1. Les composantes d'accélération $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ se transformeront exactement comme le feront les coordonnées analogues x, y, z; et il en sera de même des composantes R_x, R_y, R_z de la résistance. Si donc, par exemple, $\cos(\lambda, \mu, \nu)$ sont les trois cosinus directeurs du nouvel axe des x_1, par rapport aux anciens des x, y, z, il viendra, en particulier,

$$R_{x_1} = R_x \cos\lambda + R_y \cos\mu + R_z \cos\nu.$$

Or on sait aussi que la dérivée de toute fonction de point suivant un élément rectiligne dx_1, parallèle à l'axe des x_1, sera exprimée par la formule symbolique

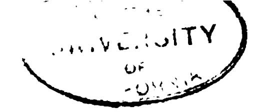
$$\frac{d}{dx_1} = \cos\lambda \frac{d}{dx} + \cos\mu \frac{d}{dy} + \cos\nu \frac{d}{dz};$$

et, d'ailleurs, les accélérations vérifiant les mêmes formules de transformation que les coordonnées, cette formule symbolique donnera la dérivée de Φ par rapport à $\mathfrak{X}_1$, en fonction de ses dérivées relatives à $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, qui égalent R_x, R_y, R_z. On aura ainsi

$$(\alpha'') \qquad \frac{d\Phi}{d\mathfrak{X}_1} = R_x \cos\lambda + R_y \cos\mu + R_z \cos\nu = R_{x_1}.$$

C'est dire que le potentiel Φ ci-dessus, si on l'exprime au moyen des nouvelles composantes d'accélération relative $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1$, aura, pour ses dérivées en $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1$, les nouvelles composantes R_{x_1}, R_{y_1}, R_{z_1} de la résistance, ou que sa propriété concernant les composantes tant des accélérations que de la résistance subsiste dans tous les systèmes d'axes coordonnés rectangulaires.

Cela étant démontré, et les variables $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ étant assimilées à des



coordonnées, imaginons que l'on choisisse comme nouveaux axes les axes mêmes de la surface du second degré à centre dont l'équation serait $\Phi =$ constante. L'expression (α) de Φ, débarrassée des trois rectangles de ses variables, prendra la forme trinome

$$(\beta) \qquad \Phi = \frac{m}{2}(a_1 \mathfrak{X}_1^2 + b_1 \mathfrak{Y}_1^2 + c_1 \mathfrak{Z}_1^2);$$

et l'on aura

$$(\beta') \qquad R_{x_1} = \frac{d\Phi}{d\mathfrak{X}_1} = m a_1 \mathfrak{X}_1, \qquad R_{y_1} = m b_1 \mathfrak{Y}_1, \qquad R_{z_1} = m c_1 \mathfrak{Z}_1.$$

Il existe donc, *quelle que soit la forme du solide immergé, trois axes rectangulaires principaux, par rapport auxquels les composantes de la résistance totale sont respectivement proportionnelles aux trois composantes analogues de l'accélération du fluide relativement au solide.*

Les coefficients correspondants a_1, b_1, c_1 sont ce qu'on peut appeler les *trois coefficients principaux de résistance* du corps.

DEUXIÈME PARTIE.

SUITE : CALCUL DES COEFFICIENTS DE RÉSISTANCE POUR LES FORMES LES PLUS SIMPLES DU CORPS SOLIDE.

---

8. **Résistance d'une sphère.** — Évaluons d'abord les coefficients de résistance dans les deux cas les plus simples, qui sont ceux : 1° d'un corps sphérique, 2° d'un cylindre circulaire, de longueur indéfinie, mû perpendiculairement à son axe.

Dans le premier cas, si R désigne le rayon de la sphère, le quotient k du volume par la surface sera $\frac{1}{3}$R. On aura donc $R = 3k$. Et l'équation (3) de la surface (p. 200) donnera

$$(35) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 9.$$

Les variables ξ, η, ζ y seront évidemment les coordonnées courantes d'une sphère, décrite de l'origine comme centre, avec un rayon égal à 3, c'est-à-dire tel que la valeur de k s'y réduise à l'unité. Il suffira donc d'évaluer la fonction ρ et les intégrales (23) dans l'hypothèse de cette sphère, pour que ξ, η, ζ remplacent parfaitement $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$. Les cosinus directeurs $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$ y seront, par suite,

$$\frac{1}{3}(\xi, \eta, \zeta);$$

ce qui donnera, en particulier, à la relation spéciale (19) (p. 205), la forme

$$(36) \qquad (\text{pour } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 9) \quad \frac{d\rho}{d\xi}\xi + \frac{d\rho}{d\eta}\eta + \frac{d\rho}{d\zeta}\zeta = \xi.$$

Appelons $\mathfrak{r}$ la distance $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, au centre de cette sphère, du point quelconque (ξ, η, ζ). Le produit $\frac{c}{\mathfrak{r}}$ de son inverse par une constante arbitraire vérifie, on le sait, l'équation indéfinie (18), devenue $\Delta_2 \rho = 0$. Mais comme, à raison de sa symétrie en ξ, η, ζ, ce produit ne pourra pas donner au second membre de (36) la valeur voulue ξ, de préférence aux valeurs analogues η, ζ, il y aura lieu d'es-

sayer pour $\mathfrak{p}$, au lieu de cette fonction $\frac{c}{\iota}$ de ξ, η, ζ, l'une de ses dérivées premières, qui vérifient, comme elle, l'équation $\Delta_2 \mathfrak{p} = 0$. Or ces dérivées d'une fonction homogène du degré -1 en ξ, η, ζ sont, on le sait aussi, des fonctions homogènes du degré -2; et, si l'on choisit la dérivée en ξ, le premier membre de (36) aura, d'après le théorème classique d'Euler sur ces sortes de fonctions, la valeur $(-2)\mathfrak{p}$, c'est-à-dire

$$-2c\frac{d\frac{1}{\iota}}{d\xi} = \frac{2c\xi}{\iota^3} = \frac{2c\xi}{27}.$$

La condition (36), relative à la surface du corps, sera donc satisfaite, pourvu qu'on prenne $c = \frac{27}{2}$; et comme, d'ailleurs, l'inverse de ι et toutes ses dérivées partielles s'annulent pour ι infini, la condition (20) (p. 205) sera vérifiée également.

La formule de $\mathfrak{p}$ est donc

$$(37) \qquad \mathfrak{p} = \frac{27}{2}\frac{d\frac{1}{\iota}}{d\xi} = -\frac{27}{2}\frac{\xi}{\iota^3}.$$

A la surface de la sphère, où $\iota = 3$, elle se réduit à

$$\mathfrak{p} = -\frac{\xi}{2} = -\frac{3}{2}\cos\alpha;$$

et les formules (23) (p. 206) deviennent

$$(38) \quad \mathrm{a} = \frac{3}{2}\int_\sigma \cos^2\alpha\,\frac{d\sigma}{\sigma}, \quad \mathrm{f}' = \frac{3}{2}\int_\sigma \cos\alpha\cos\beta\,\frac{d\sigma}{\sigma}, \quad \mathrm{e} = \frac{3}{2}\int_\sigma \cos\alpha\cos\gamma\,\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Il est évident que, dans les expressions de f' et e, les éléments $d\sigma$, distribués tout autour de l'axe des ξ, pour lesquels la valeur de $\cos\alpha$ est la même, se trouvent, deux à deux, correspondre à des valeurs ou de $\cos\beta$, ou de $\cos\gamma$, égales et de signes contraires; en sorte que ces expressions sont identiquement nulles : ce qu'on savait d'ailleurs par le numéro 7 (p. 209).

Quant à la valeur de a, elle est, en raison de la parité de forme de la sphère autour des trois axes des ξ, η, ζ, la même que celles de b ou de c; et elle égale, par suite, le tiers de la somme

$$(39) \quad \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c} = \frac{3}{2}\int_\sigma (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{3}{2}\int_\sigma \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{3}{2}.$$

On a donc, dans le cas d'un corps sphérique,

$$(40) \qquad a = b = c = \frac{1}{2}, \qquad (d, e, f, d', e', f') = 0.$$

La résistance opposée au fluide par la sphère solide ou, ce qui revient au même, l'impulsion exercée sur celle-ci par le fluide, valent ainsi, à chaque instant, la *moitié* de la force qui imprimerait à la masse fluide, m, déplacée statiquement par le solide, une accélération absolue égale à l'accélération relative qu'offre au même moment l'ensemble du fluide par rapport au solide.

C'est précisément ce que du Buat avait reconnu, il y a environ cent vingt ans, en faisant osciller dans l'eau un pendule *sphérique;* car il avait interprété les résultats de ses observations en disant que le pendule, vu son poids apparent dans l'eau (force *motrice*, par sa composante tangentielle), a sa masse fictivement accrue de la moitié environ de celle du fluide qu'il déplace, ou, encore, qu'il traîne à son arrière ou pousse à son avant une *poupe* et une *proue fluides dont le volume total est à peu près la moitié du sien* (1); et Poisson a, le premier, démontré théoriquement ce résultat, pour un pendule sphérique oscillant au sein d'un fluide en repos (2).

9. Cas d'un cylindre de longueur indéfinie; détermination du problème. — Passons maintenant au cas analogue, mais à deux coordonnées seulement x et y, ou ξ et η, d'un cylindre circulaire de longueur indéfinie et de rayon R, animé de translations données $\frac{d(x_0, y_0)}{dt}$ dans les sens des x et des y normaux à son axe, et plongé dans un fluide auquel des forces accélératrices également données X et Y impriment suivant les mêmes sens des mouvements communs, observables effectivement dans les régions assez éloignées du cylindre. Tout est alors pareil dans les divers plans normaux à l'axe; de sorte que les vitesses du fluide se réduisent à leurs deux composantes u, v et que les composantes de la résistance, réduites de même à R_x et R_y, peuvent être rapportées à l'unité de longueur du cylindre.

La démonstration de l'unité de solution du problème (p. 203) s'applique au cas présent, sans même qu'on ait besoin de supposer circulaire le cylindre. Il suffit de remplacer, dans cette démonstration, le

(1) Tout en l'excédant cependant dans une petite proportion variable, pour une raison qu'on verra plus loin (n° 20).

(2) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. XI, 1832, p. 570.

volume ϖ, compris entre le solide et une sphère enveloppante d'un rayon croissant r, par une aire σ contenue, dans le plan des xy, entre le cylindre donné et un cercle l'entourant, dont on fait croître ensuite indéfiniment le rayon r. Les intégrales qui étaient prises dans toute l'étendue ϖ se trouvent ainsi remplacées par d'autres s'étendant à l'aire σ, et celles qui étaient relatives aux deux limites du volume ϖ, par d'autres exactement de même forme, mais prises le long des deux contours tant extérieur, s', qu'intérieur, s, de l'aire σ, et que la condition (12) (p. 203) réduit finalement à leurs éléments concernant la circonférence extérieure $s' = 2\pi r$ de cette aire. La formule (15) se trouve ainsi remplacée par celle-ci :

$$(41) \qquad \frac{d}{dr}\int_{s'} p'^2 \frac{ds'}{s'} = \frac{2}{s'}\int_{\sigma}(\Delta_1 p')^2\, d\sigma,$$

exactement pareille et qui, vu la condition $p' = 0$ (pour r infini), entraîne l'annulation de p' dans toute l'aire σ.

Il est clair que les démonstrations données au n° 7 (p. 207) s'étendraient de même au cas actuel et y prouveraient que, sur les quatre coefficients de résistance, a, b, f, f′, actuellement subsistants, les deux derniers, f, f′, sont égaux et les deux premiers, a, b, essentiellement positifs.

10. Résistance du cylindre circulaire indéfini. — Mais passons au calcul de la fonction p et des coefficients de résistance pour le cylindre circulaire. La ligne k, quotient du volume de celui-ci par son aire, est alors la moitié du rayon R, et, R étant ainsi $2k$, l'équation (3) de la surface se réduit évidemment à $\xi^2 + \eta^2 = 4$. Les trois cosinus directeurs $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$ sont $\frac{1}{2}(\xi, \eta, 0)$; et la relation (19) spéciale à la surface devient

$$(42) \qquad (\text{pour } \xi^2 + \eta^2 = 4) \quad \frac{d\mathrm{p}}{d\xi}\xi + \frac{d\mathrm{p}}{d\eta}\eta = \xi.$$

Ici, pour que les variables ξ, η expriment les coordonnées $x - x_0$, $y - y_0$ du contour d'une section rapportée à son centre, il faudra que le rayon de cette section égale 2. Nous admettrons donc, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'un cylindre où $R = 2$.

Si $\iota = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ désigne alors la distance d'un point quelconque du fluide à l'axe du cylindre, la fonction de ι, analogue au potentiel $\frac{c}{\iota}$ du cas de trois coordonnées, qui vérifiera l'équation (18) ou qui annulera $\Delta_2\mathrm{p}$ (réduit à ses deux termes en ξ et η), sera, comme on sait, le

potentiel cylindrique $c \log \mathfrak{r}$, dont les deux dérivées premières en ξ et η vérifient, par suite, elles aussi, l'équation $\Delta_2 \mathfrak{p} = 0$ et sont d'ailleurs fonctions homogènes du degré -1.

Essayons donc de prendre la première, $\frac{c\xi}{\mathfrak{r}^2}$, pour $\mathfrak{p}$, dans le cas de la condition spéciale (42). Le premier membre de celle-ci deviendra simplement, d'après le théorème d'Euler, $-\mathfrak{p}$, ou $-\frac{c\xi}{\mathfrak{r}^2} = -\frac{c\xi}{4}$; et elle se réduira au second membre, ξ, pourvu qu'on fasse $c = -4$. Comme, d'ailleurs, la même dérivée en ξ de $c \log \mathfrak{r}$, de l'ordre de $\frac{1}{\mathfrak{r}}$ aux grandes distances $\mathfrak{r}$ de l'axe, s'y évanouit asymptotiquement, la condition (20) (p. 205), actuellement devenue

$$(43) \qquad \mathfrak{p} = 0 \quad \left(\text{pour } \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \text{ infini}\right),$$

se trouvera également satisfaite. On aura donc

$$(44) \qquad \mathfrak{p} = -4 \frac{d \log \mathfrak{r}}{d\xi} = -\frac{4\xi}{\mathfrak{r}^2}.$$

Cette expression devient $-\xi$ ou $-2\cos\alpha$ à la surface du cylindre; et les formules (23) de a, f', e, où il est évident que $\cos\beta$ égale $\sin\alpha$ et que $\frac{d\sigma}{\sigma}$ vaut $\frac{d\alpha}{2\pi}$, reviennent à

$$(45) \quad \mathrm{a} = 2\int_0^{2\pi} \cos^2\alpha \frac{d\alpha}{2\pi} = 1, \qquad \mathrm{f}' = 2\int_0^{2\pi} \cos\alpha \sin\alpha \frac{d\alpha}{2\pi} = 0, \qquad \mathrm{e} = 0.$$

En résumé, les deux coefficients de résistance a, b se réduiront à l'unité, les autres seront nuls, et l'on aura

$$(46) \qquad \mathrm{R}_x = m\left(\mathrm{X} - \frac{d^2 x_0}{dt^2}\right), \qquad \mathrm{R}_y = m\left(\mathrm{Y} - \frac{d^2 y_0}{dt^2}\right), \qquad \mathrm{R}_z = 0.$$

Le volume total de la poupe et de la proue fluides considérées par du Buat, ou fictivement retenues par le cylindre circulaire, égale donc *le volume même de ce cylindre.*

11. Extension des résultats précédents au cas de l'ellipsoïde. — Les formules de la résistance d'une sphère et d'un cylindre circulaire indéfinis sont comprises comme cas particuliers dans d'autres, encore

assez simples, concernant l'ellipsoïde à trois axes inégaux [1]. Nous pouvons supposer celui-ci remplacé par un ellipsoïde semblable, de dimensions telles que k y égale 1, ou dont la surface équivaille au volume. Si a, b, c y désignent les demi-axes, et ξ, η, ζ des coordonnées comptées suivant leurs sens respectifs, son équation sera

(47) $$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1;$$

et l'on aura, pour celle des ellipsoïdes homofocaux et extérieurs, ou décrits dans l'espace occupé par le fluide,

(48) $$\frac{\xi^2}{a^2+\lambda}+\frac{\eta^2}{b^2+\lambda}+\frac{\zeta^2}{c^2+\lambda}=1,$$

leur paramètre caractéristique λ croissant de zéro à l'infini dans les couches fluides enveloppantes de plus en plus éloignées.

On sait que ce paramètre remplace, comme variable, la distance r au centre, quand, dans l'étude de divers phénomènes, on passe du cas de la sphère au cas de l'ellipsoïde. Ici où la fonction p se trouve être, dans le problème de la résistance d'une sphère, le produit de $-\xi$ par une fonction de r, il y aura donc lieu de chercher à résoudre le problème analogue de la résistance de l'ellipsoïde, en prenant pour p un produit de la forme

(49) $$p=-\xi\varphi,$$

où φ désignera une fonction de λ à déterminer par les équations (18), (19), (20) (p. 205). Celles-ci seront :

(50) $$\Delta_2(\xi\varphi)=0,$$

(51) $$(\text{pour } \lambda=0)\quad \frac{\xi}{a^2+\lambda}\frac{d(\xi\varphi)}{d\xi}+\frac{\eta}{b^2+\lambda}\frac{d(\xi\varphi)}{d\eta}+\frac{\zeta}{c^2+\lambda}\frac{d(\xi\varphi)}{d\zeta}=-\frac{\xi}{a^2+\lambda},$$

(52) $$(\text{pour } \lambda \text{ infini})\quad \xi\varphi=0.$$

Nous aurons à différentier deux fois en ξ, η, ζ le produit $\xi\varphi$ et, par suite, la fonction φ de λ. Il faudra donc former, par une différentiation de (48) en ξ, η, ζ, les dérivées premières de la fonction implicite λ.

---

[1] Obtenues par Green en décembre 1833 (*Transactions* d'Edimbourg, t. XIII), d'après une citation qu'en fait G.-G. Stokes dans l'introduction du Mémoire cité plus loin (n° 20).

Pour abréger, posons

$$(53)\quad \begin{cases} H = \dfrac{\xi^2}{(a^2+\lambda)^2} + \dfrac{\eta^2}{(b^2+\lambda)^2} + \dfrac{\zeta^2}{(c^2+\lambda)^2}, \\ K = \dfrac{\xi^2}{(a^2+\lambda)^3} + \dfrac{\eta^2}{(b^2+\lambda)^3} + \dfrac{\zeta^2}{(c^2+\lambda)^3}; \end{cases}$$

et il viendra évidemment, d'abord, pour la dérivée première de λ en ξ, puis, pour celle de H, qui nous sera bientôt nécessaire :

$$(54)\quad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{d\xi} = \dfrac{2}{H}\dfrac{\xi}{a^2+\lambda}, \\ \dfrac{dH}{d\xi} = \dfrac{2\xi}{(a^2+\lambda)^2} - 2K\dfrac{d\lambda}{d\xi} = 2\dfrac{\xi}{(a^2+\lambda)^2} - \dfrac{4K}{H}\dfrac{\xi}{a^2+\lambda}. \end{cases}$$

Les dérivées de λ et H en η, ζ s'en déduiraient par les changements de ξ en η ou ζ et de a en b ou c.

Cela posé, le calcul de $\Delta_2(\xi\varphi)$ nous donnera successivement :

$$\frac{d.\xi\varphi}{d\xi} = \xi\varphi'\frac{d\lambda}{d\xi} + \varphi = \frac{2\varphi'}{H}\frac{\xi^2}{a^2+\lambda} + \varphi;$$

$$\frac{d^2.\xi\varphi}{d\xi^2} = \frac{4\varphi''}{H^2}\frac{\xi^3}{(a^2+\lambda)^2} - \frac{4\varphi'\xi}{H^2}\left[\frac{\xi^2}{(a^2+\lambda)^3} - \frac{2K}{H}\frac{\xi^2}{(a^2+\lambda)^2}\right] - \frac{4\varphi'\xi}{H^2}\frac{\xi^2}{(a^2+\lambda)^3} + \frac{6\varphi'}{H}\frac{\xi}{a^2+\lambda};$$

$$\frac{d.\xi\varphi}{d\eta} = \xi\varphi'\frac{2}{H}\frac{\eta}{b^2+\lambda};$$

$$\frac{d^2.\xi\varphi}{d\eta^2} = \frac{4\varphi''\xi}{H^2}\frac{\eta^2}{(b^2+\lambda)^2} - \frac{4\varphi'\xi}{H^2}\left[\frac{\eta^2}{(b^2+\lambda)^3} - \frac{2K}{H}\frac{\eta^2}{(b^2+\lambda)^2}\right] - \frac{4\varphi'\xi}{H^2}\frac{\eta^2}{(b^2+\lambda)^3} + \frac{2\varphi'}{H}\frac{\xi}{b^2+\lambda}; \quad \ldots;$$

et, enfin, par une addition (terme à terme) des trois dérivées secondes directes de $\xi\varphi$, où s'entre-détruisent les termes en K,

$$\Delta_2(\xi\varphi) = \frac{4\xi}{H}\left[\varphi'' + \frac{\varphi'}{2}\left(\frac{3}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right)\right].$$

L'équation (50) reviendra donc à poser

$$(55)\quad \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} + \frac{1}{a^2+\lambda}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right) = 0,$$

ou bien, en multipliant par $d\lambda$ et appelant $-\log(-A)$ la constante arbitraire introduite au second membre par une première intégration

en λ,

(56) $$A(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\,\varphi' = -1.$$

Tirons de là $\varphi' d\lambda$; et une nouvelle intégration en λ, effectuée, vu (52), de manière que φ et même $\varphi\sqrt{a^2+\lambda}$ ou $\xi\varphi$ s'annulent pour λ infini, donnera la fonction inconnue φ :

(57) $$\varphi = \frac{1}{A}\int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Il reste à voir si une détermination convenable de A permettra de vérifier la condition à la surface, c'est-à-dire (51), dont le premier membre est devenu, avec les expressions ci-dessus des dérivées premières de $\xi\varphi$, et vu (53),

(58) $$[2(a^2+\lambda)\varphi' + \varphi]\frac{\xi}{a^2+\lambda}.$$

Ce premier membre de (51) se réduira au second, à la limite $\lambda = 0$, si l'on a, en désignant par φ_0, φ'_0 les valeurs de φ et φ' à cette limite,

$$2a^2\varphi'_0 + \varphi_0 = -1,$$

c'est-à-dire, d'après (56) et (57), qui donnent φ'_0 et φ_0 en fonction de A,

(59) $$A = \frac{2}{abc} - \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

La fonction p, ainsi proportionnelle à l'abscisse ξ sur toute l'étendue de chacun des ellipsoïdes homofocaux (48), devient simplement $-\varphi_0\xi$ à la surface $\lambda = 0$. Et l'on a dès lors, pour l'expression (23) (p. 206) du coefficient a de résistance,

(60) $$a = \frac{\varphi_0}{\sigma}\int_\sigma \xi\cos\alpha\, d\sigma.$$

Or le produit de l'abscisse, ξ, de chaque élément $d\sigma$, par la projection $d\sigma\cos\alpha$ de cet élément sur le plan des $\eta\zeta$, est le volume de la portion du corps comprise justement entre $d\sigma$ et sa projection; de sorte que l'intégrale $\int_\sigma \xi\cos\alpha\, d\sigma$ représente le volume total du corps, produit de σ par la ligne k, prise ici égale à 1. On a ainsi

(61) $$a = \varphi_0 = \frac{1}{A}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Substituons la valeur (59) de A; et posons $\lambda = a^2\mu$, afin d'introduire une variable μ d'intégration propre à éliminer a, b, c de l'expression de a, pour y laisser subsister uniquement leurs rapports mutuels, qui sont ceux des axes de l'ellipsoïde proposé. Il viendra finalement

$$(62) \qquad \mathrm{a} = \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\mu}{(1+\mu)\sqrt{(1+\mu)\left(\frac{b^2}{a^2}+\mu\right)\left(\frac{c^2}{a^2}+\mu\right)}}}{\displaystyle 2\frac{a}{b}\frac{a}{c} - \int_0^\infty \frac{d\mu}{(1+\mu)\sqrt{(1+\mu)\left(\frac{b^2}{a^2}+\mu\right)\left(\frac{c^2}{a^2}+\mu\right)}}}.$$

Le dénominateur de cette expression est positif; car son premier terme est une limite supérieure de l'intégrale figurant au second terme, savoir, la limite qu'on obtient en y supprimant μ de chacun des deux facteurs $\frac{b^2}{a^2}+\mu$, $\frac{c^2}{a^2}+\mu$.

On aurait des expressions analogues pour b et c. Quant aux autres coefficients de résistance d, e, f, d′, e′, f′, ils sont évidemment nuls, par raison de symétrie.

12. Résistance d'une aiguille; résistance d'un disque plat. — Pour retrouver les deux valeurs respectives $\frac{1}{2}$ et 1 des cas de la sphère et du cylindre indéfini, il suffit de faire, dans (62), soit $a=b=c=\mathrm{R}$, soit seulement $a=b=\mathrm{R}$, mais, alors, $c=\infty$, après avoir multiplié par $\frac{c}{a}$ la fraction $\frac{2a^2}{bc}$ et tous les éléments des intégrales, où le dernier facteur, $\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2\mu}}$, sera finalement 1 dans les éléments influents.

Dans le second cas, où le coefficient de résistance vaut 1, l'ellipsoïde devient, à proprement parler, une *aiguille* effilée aux deux bouts et mue perpendiculairement à sa longueur. Elle serait mue, au contraire, suivant le sens de la longueur (pris pour celui des ξ), si l'on posait, dans (62). $b=c=\mathrm{R}$, et qu'on fît tendre R vers zéro. Alors, en multipliant par $\frac{b}{a}\frac{c}{a}$, c'est-à-dire par $\frac{\mathrm{R}^2}{a^2}$, la fraction $\frac{2a^2}{bc}$ et tous les éléments des intégrales, on ferait évanouir ces éléments, sauf les premiers, insignifiants, voisins de la limite $\mu=0$.

Ainsi, le coefficient a de résistance de l'aiguille est infiniment petit. Même multiplié par le grand rapport $\frac{a}{\mathrm{R}}$ de la demi-longueur a de l'ai-

guille à son rayon maximum de révolution R, il reste encore évanouissant. Car son expression, dont le dénominateur est devenu 2, donnera

$$\mathrm{a}\frac{a}{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{d\mu}{(1+\mu)\sqrt{1+\mu}}\,\frac{\mathrm{R}a}{\mathrm{R}^2+a^2\mu} = \frac{1}{2}\int_{\mu=0}^{\mu=\infty}(1+\mu)^{-\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{R}}{a}\,d\log\left(1+\frac{a^2\mu}{\mathrm{R}^2}\right).$$

Cette formule montre, par son second membre, où l'on supprimerait au dénominateur la partie constante 1 ou R^2 de chaque facteur, que l'élément de l'intégrale n'atteint pas la valeur $\frac{\mathrm{R}}{a}\mu^{-\frac{5}{2}}d\mu$, ou $d\left(-\frac{2}{3}\frac{\mathrm{R}}{a}\mu^{-\frac{3}{2}}\right)$, et, par son troisième membre, où l'on supprimerait μ du dénominateur $(1+\mu)^{\frac{3}{2}}$, que le même élément est inférieur aussi à $\frac{\mathrm{R}}{a}d\log\left(1+\frac{a^2\mu}{\mathrm{R}^2}\right)$. Si l'on emploie cette seconde limite supérieure des éléments depuis $\mu=0$ jusqu'à une valeur de μ choisie à volonté, ce qui donnera la somme $\frac{\mathrm{R}}{a}\log\left(1+\frac{a^2\mu}{\mathrm{R}^2}\right)$, et la limite supérieure précédente depuis cette valeur de μ jusqu'à $\mu=\infty$, ce qui donnera la somme $\frac{\mathrm{R}}{a}\,\frac{2}{3\mu\sqrt{\mu}}$, on aura donc, en tout,

$$\mathrm{a}\frac{a}{\mathrm{R}} < \frac{1}{2}\frac{\mathrm{R}}{a}\left[\log\left(1+\frac{a^2\mu}{\mathrm{R}^2}\right)+\frac{2}{3\mu\sqrt{\mu}}\right].$$

Or, μ restant fixe, faisons tendre $\frac{\mathrm{R}}{a}$ vers zéro. Le facteur entre crochets finira par se réduire, sauf erreur relative négligeable, à son terme grandissant $\log\left(1+\frac{a^2\mu}{\mathrm{R}^2}\right)$, ou même à

$$\log\frac{a^2\mu}{\mathrm{R}^2} = 2\log\frac{a}{\mathrm{R}} + \log\mu,$$

ou, enfin, à $2\log\frac{a}{\mathrm{R}}$; et il viendra

$$\mathrm{a}\frac{a}{\mathrm{R}} < \frac{\mathrm{R}}{a}\log\frac{a}{\mathrm{R}} = \frac{\log\frac{a}{\mathrm{R}}}{\frac{a}{\mathrm{R}}}.$$

Mais on sait que le rapport du logarithme d'un nombre à ce nombre tend vers zéro, quand le nombre croît sans limite; et, par suite, le produit $\mathrm{a}\frac{a}{\mathrm{R}}$ sera bien finalement nul.

C'est dire qu'une aiguille, effilée aux deux bouts et mue suivant sa longueur, a sa résistance insensible non seulement par unité de son volume $\frac{4}{3}\pi R^2 a$, mais encore comparativement à la résistance, exprimée proportionnellement par $\frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi R^3)$, de la sphère maximum $\frac{4}{3}\pi R^3$ *inscriptible dans cette aiguille;* car le rapport de sa résistance totale à celle de la sphère serait le quotient de $\mathrm{a}(\frac{4}{3}\pi R^2 a)$ par $\frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi R^3)$, ou le double du produit, $\mathrm{a}\frac{a}{R}$, dont on vient de voir que la valeur limite est nulle.

Il aurait suffi évidemment, pour obtenir $\mathrm{a}=0$ dans la formule (62), de faire évanouir c en laissant b quelconque : ce qui aurait changé l'ellipsoïde en un *disque* infiniment mince, mû dans son plan. Le coefficient de résistance d'un tel disque est donc nul aussi.

Si ce disque est de révolution, ou que $a=b$, on reconnaît facilement que sa résistance sera la fraction $\frac{\pi}{4}=0{,}7854$ de celle d'une aiguille ayant même méridien que lui, mais b pour demi-axe et c pour rayon maximum, déplacée normalement à son axe.

Enfin, considérons un disque pareil, mais mû perpendiculairement à son plan et, par exemple, encore circulaire. Posons, à cet effet,

$$b=c=R=a\sqrt{1+m^2},$$

pour faire grandir finalement, dans (62), m jusqu'à l'infini. Après avoir remplacé $2\frac{a}{b}\frac{a}{c}$, ou $\frac{2}{1+m^2}$, par $\int_0^\infty \frac{d\mu}{(1+\mu)\sqrt{1+\mu(1+m^2)}}$, et avoir réduit alors cette intégrale avec la suivante dans le dénominateur, posons $\mu=m^2\nu^2-1$, pour introduire la nouvelle variable positive d'intégration ν. Il viendra successivement

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{a} &= \frac{(m^2+1)\displaystyle\int_{\frac{1}{m}}^\infty \frac{d\nu}{\nu^2(1+\nu^2)}}{\displaystyle\int_{\frac{1}{m}}^\infty \frac{(m^2\nu^2-1)\,d\nu}{\nu^2(1+\nu^2)}} = \frac{(m^2+1)\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu}\right)_{\frac{1}{m}}^\infty}{\left(\frac{1}{\nu}-(m^2+1)\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\nu}\right)_{\frac{1}{m}}^\infty} \\ &= \frac{m}{\operatorname{arc\,tang} m}\,\frac{1-\dfrac{\operatorname{arc\,tang} m}{m}}{1-\dfrac{m}{(m^2+1)\operatorname{arc\,tang} m}}. \end{aligned}\right.$$

Évaluons la résistance du disque, non par unité de son volume $\frac{4}{3}\pi a R^2$ (ce qui la rendrait infinie), mais par comparaison avec la

résistance (ayant le coefficient $a = \frac{1}{2}$) d'une sphère $\frac{4}{3}\pi R^3$ de même rayon que le disque. Le rapport, que j'appellerai a', de ces deux résistances, sera le quotient de a par $\frac{1}{2}$, multiplié par le rapport très petit $\frac{a}{R} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$ des deux volumes. Nous aurons donc, à la limite $m = \infty$,

$$(64) \qquad a = \infty, \qquad a' = \frac{2}{\text{arc tang}\,\infty} = \frac{4}{\pi}.$$

La résistance d'un disque circulaire plat, mû perpendiculairement à son plan, est donc *le nombre de fois* $\frac{4}{\pi} = 1{,}2732\ldots$ *celle d'une sphère de même rayon.*

TROISIÈME PARTIE.

MISE EN COMPTE DES FROTTEMENTS INTÉRIEURS ; RÉSISTANCE DE LA SPHÈRE.

---

13. Mise en compte des frottements intérieurs du fluide : équations du problème. — Reprenons maintenant la même question des petits mouvements relatifs, bien continus, d'un fluide indéfini, sollicité dans toute sa masse par une force donnée (X, Y, Z) variable d'un instant à l'autre (quoique indépendante des coordonnées), et d'un solide immergé, qu'animent des translations imprimant à tous ses points les vitesses également données $\frac{d(x_0, y_0, z_0)}{dt}$ de son centre (x_0, y_0, z_0). Mais tenons compte actuellement des frottements intérieurs, qui empêchent la rupture entre la mince gaine fluide adhérente au corps et le fluide environnant. Ils astreignent donc les vitesses u, v, w de celui-ci à prendre les valeurs $\frac{d(x_0, y_0, z_0)}{dt}$ sur toute la surface $f = 0$ du corps.

Nous écrirons ici $f(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$, et non plus (3) (p. 200), l'équation de cette surface.

De plus, les frottements intérieurs activant la propagation au loin de la perturbation que la présence du solide introduit, il est des cas (comme celui d'un cylindre *indéfini*) où cette propagation influe d'une manière sensible jusqu'à toute distance du centre, pourvu qu'on lui laisse le temps de s'y accuser. De là des difficultés spéciales : nous les éviterons en supposant, du moins généralement, que *le phénomène ait eu un début*, ou que, pour $t = -\infty$, X, Y, Z, $\frac{dx_0}{dt}, \frac{dy_0}{dt}, \frac{dz_0}{dt}$ aient été nuls, ainsi que les vitesses u, v, w en tous les points du fluide. A une époque t quelconque, nous aurons donc

$$(65) \qquad \frac{d(x_0, y_0, z_0)}{dt} = \int_{-\infty}^{t} \frac{d^2(x_0, y_0, z_0)}{dt^2} dt,$$

et aussi, sans avoir besoin de faire varier x, y, z (vu la petitesse supposée des mouvements),

$$(66) \qquad (u, v, w) = \int_{-\infty}^{t} (u', v', w') \, dt.$$

Autrement dit, les vitesses réalisées en un point quelconque résulteront entièrement des accélérations antérieures qu'on y aura observées.

Enfin, aux distances infinies de l'origine, là où ne se sera pas propagée, du moins encore, la perturbation (purement dynamique) due à la présence du corps, les accélérations successives u', v', w' seront celles que produit la force extérieure donnée (X, Y, Z) par unité de masse; d'où

$$(67)\qquad \left(\text{pour } \sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ infini}\right)\quad p = 0 \quad \text{et} \quad (u, v, w) = \int_{-\infty}^{t} (X, Y, Z)\,dt,$$

p désignant ici l'excédent de la *pression moyenne* actuelle en chaque point sur la pression constante qui régnait partout avant le mouvement.

Cela posé, si ε désigne le coefficient constant des frottements intérieurs applicable à tous les mouvements bien continus, nous aurons, pour remplacer les formules (1) et adjoindre à la condition (2) de conservation des volumes fluides (p. 200), les trois équations indéfinies connues, données par Navier,

$$(68)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} &= X - u' + \frac{\varepsilon}{\rho}\Delta_2 u,\\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} &= Y - v' + \frac{\varepsilon}{\rho}\Delta_2 v,\\ \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} &= Z - w' + \frac{\varepsilon}{\rho}\Delta_2 w. \end{aligned}\right.$$

Les conditions spéciales à la surface du corps seront, comme il a été indiqué ci-dessus,

$$(69)\qquad (u, v, w) = \frac{d(x_0, y_0, z_0)}{dt} \quad (\text{pour } f = 0).$$

Nous aurons avantage à simplifier celles-ci, en introduisant dans toutes les équations du problème, comme fonctions à déterminer, au lieu des vitesses absolues u, v, w du fluide, ses vitesses par rapport au corps $u - \frac{dx_0}{dt}$, $v - \frac{dy_0}{dt}$, $w - \frac{dz_0}{dt}$, que nous appellerons ξ, η, ζ [1].

Ainsi, nous poserons

$$(70)\qquad u = \frac{dx_0}{dt} + \xi, \qquad v = \frac{dy_0}{dt} + \eta, \qquad w = \frac{dz_0}{dt} + \zeta.$$

[1] Les quantités désignées ici par ξ, η, ζ n'auront donc rien de commun avec celles de même nom dans les deux parties précédentes de notre Étude.

Et il viendra : 1° d'une part, comme équations indéfinies,

$$(71) \qquad \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0,$$

$$(72) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d(x,y,z)} &= \left(X - \frac{d^2 x_0}{dt^2},\ Y - \frac{d^2 y_0}{dt^2},\ Z - \frac{d^2 z_0}{dt^2}\right) \\ &\quad - \frac{d(\xi,\eta,\zeta)}{dt} + \frac{\varepsilon}{\rho}\Delta_2(\xi,\eta,\zeta); \end{aligned} \right.$$

2° d'autre part, comme relations spéciales, d'après (69), (67) et (65),

$$(73) \qquad (\text{à la surface } f = 0 \text{ du corps}) \quad (\xi,\eta,\zeta) = 0,$$

$$(74) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(\text{aux distances } \sqrt{x^2+y^2+z^2} \text{ infinies}) \\ &(\xi,\eta,\zeta) = \int_{-\infty}^{t}\left(X - \frac{d^2 x_0}{dt^2},\ Y - \frac{d^2 y_0}{dt^2},\ Z - \frac{d^2 z_0}{dt^2}\right)dt, \qquad p = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(75) \qquad (\text{pour } t = -\infty) \quad (\xi,\eta,\zeta) = 0.$$

14. Sa détermination. — Pour reconnaître que ce système d'équations n'admet pas deux solutions différentes, nous appellerons ξ, η, ζ, p, et $\xi+\xi'$, $\eta+\eta'$, $\zeta+\zeta'$, $p+p'$, deux systèmes de fonctions qui le vérifieraient ; et nous prouverons que leurs différences respectives ξ', η', ζ', p' sont identiquement nulles. A raison toutefois des complications introduites par les frottements, et qui rendent moins aisée la vue du phénomène, nous devrons admettre une hypothèse de plus que dans la première partie de ce Travail.

La plus simple consistera à supposer négligeable, après un temps fini quelconque à partir du début des mouvements, l'influence totale, sur la perturbation étudiée, des parties du fluide existant en dehors d'une sphère $\sigma' = 4\pi r^2$, décrite, d'un rayon r suffisamment grand, autour d'un centre fixe, plus ou moins voisin de celui (x_0, y_0, z_0) du corps. Cette hypothèse se justifie par le même principe de bon sens qui nous a fait supposer nulle à l'infini, c'est-à-dire, tout au moins, asymptotiquement évanouissante aux grandes distances, la perturbation dont il s'agit, provoquée au sein du fluide par la présence du solide.

Mais nous pourrons aussi l'éviter en admettant, à la place, que la partie variable p de la pression moyenne est positive, sur la surface σ' et au moment où le mouvement relatif y commence, là où le fluide qui s'y trouve, et qui ne se meut qu'imperceptiblement, est refoulé contre le fluide extérieur qui se meut encore moins, mais négative, au contraire, quand il s'éloigne de celui-ci et se détend vers l'intérieur de la sphère. De la sorte, le commencement d'agitation

éprouvé par le fluide extérieur provoque, dans la pression moyenne, un changement qui fait réagir ce fluide contre sa mise en mouvement.

Pour régir les différences ξ'; η', ζ', p' entre les deux solutions supposées, nous aurons les équations, déduites de (72), (71), (73), (74) et (75) :

$$(76)\quad \begin{cases} \rho \dfrac{d(\xi',\eta',\zeta')}{dt} - \varepsilon\Delta_2(\xi',\eta',\zeta') + \dfrac{dp'}{d(x,y,z)} = 0, \\ \dfrac{d\xi'}{dx} + \dfrac{d\eta'}{dy} + \dfrac{d\zeta'}{dz} = 0; \end{cases}$$

$$(77)\quad (\xi',\eta',\zeta') = 0 \quad (\text{soit pour } f = 0, \text{ soit pour } r = \infty, \text{ soit pour } t = -\infty),$$

$$(78)\quad p' = 0 \quad (\text{pour } r = \infty).$$

Considérant encore, comme au n° 4 (p. 203), l'espace ϖ compris entre la surface σ du corps proposé et la sphère enveloppante σ' de rayon r, multiplions les quatre équations (76), respectivement, par $\xi' d\varpi$, $\eta' d\varpi$, $\zeta' d\varpi$, $p' d\varpi$: puis ajoutons terme à terme, et intégrons dans toute l'étendue ϖ, après avoir remplacé

$$\xi' \frac{d^2\xi'}{dx^2}, \quad \dots, \quad \eta' \frac{d^2\eta'}{dx^2}, \quad \dots, \quad \zeta' \frac{d^2\zeta'}{dx^2}, \quad \dots, \quad p' \frac{d\xi'}{dx}, \quad \dots,$$

par

$$-\frac{d\xi'^2}{dx^2} + \frac{d}{dx}\left(\xi' \frac{d\xi'}{dx}\right), \quad \dots, \quad -\xi' \frac{dp'}{dx} + \frac{d.p'\xi'}{dx}, \quad \dots.$$

En transformant, comme à l'ordinaire et comme au n° 4 (p. 204), en intégrales de surface les intégrales de volume où une intégration s'effectue de suite, et appelant d'ailleurs, pour abréger, δ, sur chaque élément $d\sigma'$ de la sphère $4\pi r^2$, la composante $\xi' \cos\alpha + \eta' \cos\beta + \zeta' \cos\gamma$ de la *vitesse* (ξ', η', ζ'), suivant la normale dr menée vers le dehors, il vient aisément, vu (77),

$$(79)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\varpi \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}{2}\right) d\varpi + \varepsilon \int_\varpi [(\Delta_1 \xi')^2 + (\Delta_1 \eta')^2 + (\Delta_1 \zeta')^2]\, d\varpi \\ \displaystyle\quad - \varepsilon \int_{\sigma'} \frac{d}{dr}\left(\frac{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}{2}\right) d\sigma' + \int_{\sigma'} (p'\delta)\, d\sigma' = 0 \ (^1). \end{cases}$$

---

(1) Il n'est pas difficile de reconnaître, dans cette formule, l'équation des forces vives, appliquée à la masse occupant à l'époque t l'espace ϖ, et au mouvement dont les vitesses seraient ξ', η', ζ'. Le premier terme y exprime la dérivée en t de la demi-force vive de cette masse; l'ensemble des deux suivants évalue le travail qu'absorbent par unité de temps ses frottements intérieurs et les frottements de la couche fluide, de rayon r, qui l'entoure; enfin le quatrième terme représente, au signe près, le travail de la pression moyenne normale p' exercée par la même couche extérieure.

Admettons d'abord, conformément à la première hypothèse faite ci-dessus, que les intégrales $\int_{\sigma'}$, par lesquelles s'exprime l'influence du fluide environnant la sphère σ', deviennent négligeables quand le rayon r croît sans limite. Alors il ne restera dans le premier membre, en supposant r ou ϖ infinis, que les deux termes en $\int_{\varpi}$. Or le second, où figurent sous le signe $\int$ les neuf carrés des dérivées premières de ξ', η', ζ' en x, y, z, serait évidemment positif, si les fonctions ξ', η', ζ' cessaient d'avoir, quelque part, la valeur zéro qu'elles ont à la surface du corps. Et le premier deviendrait positif aussi, à l'instant où, ξ', η', ζ' s'écartant de leurs valeurs primitives nulles, le trinome $\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2$ grandirait. Donc l'annulation constante de la somme de ces deux termes, exigée par (79) dans l'hypothèse choisie, implique le maintien indéfini des valeurs $\xi'=0$, $\eta'=0$, $\zeta'=0$.

On arrive à la même conclusion, et d'une manière analogue à celle qui a été employée au n° 4 pour p' (p. 204), en admettant la seconde hypothèse ci-dessus, qui consiste à supposer essentiellement positif, dans le quatrième terme de (79) et à l'instant où les vitesses ξ', η', ζ' s'écarteraient de zéro, le produit de la pression p' par la vitesse δ suivant le sens normal à $d\sigma'$. Alors, en effet, au moment où ξ', η', ζ' cesseraient de s'annuler, ce terme $\int_{\sigma'}(p'\delta)\,d\sigma'$ serait positif comme les deux termes en $\int_{\varpi}$; et la formule (79) donnerait, en divisant par $\frac{1}{2}\varepsilon\sigma'$,

$$(80)\qquad \int_{\sigma'}\frac{d.\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}{dr}\,\frac{d\sigma'}{\sigma'}>0,\qquad\text{ou}\qquad \frac{d}{dr}\int_{\sigma'}(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)\frac{d\sigma'}{\sigma'}>0.$$

Donc la valeur moyenne du trinome, jamais négatif, $\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2$, sur la surface σ' de sphères concentriques d'un rayon r variable, croîtrait avec ce rayon, si elle pouvait cesser d'être nulle : or elle ne peut pas croître, puisqu'elle est tenue de se réduire à zéro pour r infini. Elle s'annule donc identiquement, et, avec elle, ξ', η', ζ', δ, sur toute l'étendue $\int_{\sigma'}$. Alors les termes subsistants, au premier membre de (79), ont même signe; ce qui les oblige à s'annuler séparément. Et l'on a partout $\xi'=0$, $\eta'=0$, $\zeta'=0$.

15. Sa décomposition en trois problèmes plus simples, où le mouvement relatif du fluide éloigné et du solide a lieu suivant un axe coordonné. — Il suffit donc d'obtenir par une voie quelconque la solution unique du système (71), (72), (73), (74), (75). Et, d'abord, ce système, linéaire tant par rapport à ξ, η, ζ, p que par rapport aux trois données $X - \frac{d^2 x_0}{dt^2}$, $Y - \frac{d^2 y_0}{dt^2}$, $Z - \frac{d^2 z_0}{dt^2}$, est sans termes autres que ceux où figurent soit celles-ci, soit ξ, η, ζ, p. En outre, les mouvements du corps sont assez restreints pour que, à toutes les époques, les fonctions ξ, η, ζ, p existent, très sensiblement, aux mêmes points (x, y, z) de l'espace. Dès lors, il est clair que les expressions effectives de ξ, η, ζ, p se formeront par simple superposition de celles qu'on aurait, dans les trois hypothèses où chacune des données recevrait, seule, la suite de ses valeurs, les deux autres données étant nulles. Comme, d'ailleurs, les formules des pressions élémentaires exercées par le fluide se composeront de termes proportionnels à p ou aux dérivées premières en x, y, z de ξ, η, ζ, on voit que l'impulsion totale du fluide sur le corps, ou la résistance, égale et contraire, opposée par celui-ci au mouvement du fluide, se formeront aussi par simple composition des trois impulsions ou résistances partielles obtenues dans ces trois hypothèses.

Ainsi, nous aurons à chercher seulement les solutions particulières dont il s'agit, et à supposer, par exemple, $Y - \frac{d^2 y_0}{dt^2} = 0$, $Z - \frac{d^2 z_0}{dt^2} = 0$, tandis que $X - \frac{d^2 x_0}{dt^2}$ recevra la suite effective de ses valeurs données.

Malgré cette simplification, l'intégration des équations (71) à (75) reste difficile; et nous nous bornerons, du moins en fait de solides limités dans tous les sens, comme le supposent implicitement plusieurs des formules ci-dessus, au cas d'un corps sphérique, d'un rayon donné R.

16. Intégration des équations pour un corps sphérique. — Nous nous donnerons donc, en fonction du temps t, l'accélération relative $X - \frac{d^2 x_0}{dt^2}$, qui sera dirigée suivant les x, de l'ensemble du fluide par rapport à la sphère solide; ou, ce qui revient au même, nous supposerons connue à toute époque la vitesse relative, que j'appellerai V,

(81) $$V = \int_{-\infty}^{t} \left(X - \frac{d^2 x_0}{dt^2} \right) dt,$$

engendrée par cette suite d'accélérations. De plus, nous exprimerons ξ, η, ζ au moyen d'une fonction auxiliaire unique φ de t, x, y, z, par les formules [1]

$$(82) \qquad \xi = \Delta_2\varphi - \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \qquad \eta = -\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}, \qquad \zeta = -\frac{d^2\varphi}{dx\,dz},$$

qui rendent identiques la relation (71) et donnent aux trois équations (72), vu la valeur $\frac{dV}{dt}$ de $X - \frac{d^2x_0}{dt^2}$, les formes respectives

$$(83) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[\frac{p}{\rho} - \frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{\varepsilon}{\rho}\Delta_2\varphi\right)\right] = \frac{dV}{dt} - \Delta_2\left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{\varepsilon}{\rho}\Delta_2\varphi\right), \\ &\frac{d}{d(y,z)}\left[\frac{p}{\rho} - \frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{\varepsilon}{\rho}\Delta_2\varphi\right)\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Essayons de les résoudre de la manière la plus simple, en supposant l'inconnue auxiliaire φ uniquement fonction du temps t et de la distance

$$(84) \qquad \imath = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

au centre (x_0, y_0, z_0), légèrement mobile, de la sphère; ou, en d'autres termes, voyons si φ pourrait ne dépendre de x, y, z que par l'intermédiaire de la variable $\imath$. Alors les deux dernières équations (83) montreront que la quantité entre crochets ne varie, dans la première (83), ni avec y, ni avec z; et, par suite, le second membre de celle-ci ne dépendra pas de $\imath$, qui varie avec y ou z. Donc, ce second membre sera uniquement fonction de t; et, en appelant $\frac{3}{2}F''(t)$ l'excédent de $\frac{dV}{dt}$ sur cette fonction, il viendra

$$(85) \qquad \Delta_2\left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{\varepsilon}{\rho}\Delta_2\varphi\right) = \frac{3}{2}F''(t).$$

Or, quand une fonction, φ par exemple, ne dépend de x, y, z que par la distance $\imath$ à un même point (x_0, y_0, z_0), on sait que son paramètre Δ_2 a l'expression $\frac{1}{\imath}\frac{d^2.\imath\varphi}{d\imath^2}$. Donc, en appliquant à chaque paramètre Δ_2 ce mode de calcul, l'équation (85), multipliée par $\imath$,

---

[1] On peut voir, au n° 438* de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, *Compléments*, p. 372*), comment l'équation (71), jointe à la considération de la symétrie, en y et z, η et ζ, des équations suivantes (72) à (75), conduit à introduire cette fonction auxiliaire φ.

deviendra

$$(85\,bis)\qquad \frac{d^2}{d\iota^2}\left(\frac{d.\iota\varphi}{dt} - \frac{\varepsilon}{\rho}\frac{d^2.\iota\varphi}{d\iota^2}\right) = \frac{3}{2}F''(t)\iota.$$

Multiplions celle-ci deux fois successivement par $d\iota$ et intégrons chaque fois par rapport à l'espace, en appelant $-\psi'(t)$, $\psi_1(t)$ les arbitraires introduites, indépendantes de ι. Il vient

$$(86)\qquad \frac{d.\iota\varphi}{dt} - \frac{\varepsilon}{\rho}\frac{d^2.\iota\varphi}{d\iota^2} = F''(t)\frac{\iota^3}{4} - \psi'(t)\iota + \psi_1(t).$$

Pour fixer les idées, nous supposerons la fonction auxiliaire φ nulle à la paroi $\iota = R$. Cela reviendra à lui ajouter implicitement une fonction convenablement choisie du temps t, circonstance qui ne change rien aux dérivées de φ en x, y, z, seules employées dans les expressions (82) des inconnues ξ, η, ζ du problème. D'ailleurs, avec φ fonction de ι et t, ces expressions (82) sont maintenant

$$(87)\qquad \begin{cases} \xi = \left(\dfrac{d^2\varphi}{d\iota^2} + \dfrac{1}{\iota}\dfrac{d\varphi}{d\iota}\right) - \dfrac{(x-x_0)^2}{\iota^2}\left(\dfrac{d^2\varphi}{d\iota^2} - \dfrac{1}{\iota}\dfrac{d\varphi}{d\iota}\right), \\ (\eta, \zeta) = -\dfrac{(x-x_0)(y-y_0, z-z_0)}{\iota^2}\left(\dfrac{d^2\varphi}{d\iota^2} - \dfrac{1}{\iota}\dfrac{d\varphi}{d\iota}\right); \end{cases}$$

en sorte que les conditions (73) spéciales à la surface $\iota = R$ reviennent à y annuler la double expression $\dfrac{d^2\varphi}{d\iota^2} \pm \dfrac{1}{\iota}\dfrac{d\varphi}{d\iota}$, c'est-à-dire les deux premières dérivées de φ en ι. Donc, les conditions relatives à la surface du corps seront simplement

$$(88)\qquad (\text{pour } \iota = R)\quad \varphi = 0,\qquad \frac{d\varphi}{d\iota} = 0,\qquad \frac{d^2\varphi}{d\iota^2} = 0.$$

Le premier membre de (86) s'y annule dès lors, tandis que le second membre y devient $F''(t)\dfrac{R^3}{4} - \psi'(t)R + \psi_1(t)$. Donc la fonction $\psi_1(t)$ a la valeur $-F''(t)\dfrac{R^3}{4} + R\psi'(t)$; et la formule (86) peut s'écrire

$$(89)\qquad \frac{d.\iota\varphi}{dt} - \frac{\varepsilon}{\rho}\frac{d^2.\iota\varphi}{d\iota^2} = -\psi'(t)(\iota - R) + F''(t)\frac{\iota^3 - R^3}{4},$$

ou encore

$$(90)\qquad \left(\frac{d}{dt} - \frac{\varepsilon}{\rho}\frac{d^2}{d\iota^2}\right)\left[\iota\varphi + \psi(t)(\iota - R) - F'(t)\frac{\iota^3 - R^3}{4} - \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\rho}F(t)\iota\right] = 0,$$

comme on le reconnaît en développant la dérivée en t et la dérivée seconde en ι de l'expression entre crochets.

Cette expression entre crochets vérifie donc l'équation classique, $\frac{du}{dt} - a^2 \frac{d^2 u}{d\iota^2} = 0$, des températures variables u, le long d'une barre à abscisse positive ι, où l'on aurait $a = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}$ et qui s'étendrait jusqu'à l'infini, à partir d'une abscisse donnée $\iota = R$ pour laquelle la valeur de cette température serait évidemment, vu la première condition (88), $-\frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\rho} RF(t)$. Or on connaît l'expression que reçoit dès lors, depuis $\iota = R$ jusqu'à $\iota = \infty$, une telle température, du moins quand elle s'est annulée partout pour $t = -\infty$ et qu'elle doit s'annuler sans cesse pour ι infini : c'est l'intégrale définie

$$-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\varepsilon}{\rho} R \int_0^\infty F\left[t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{(\iota - R)^2}{2\alpha^2}\right] e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha \text{ (1)}.$$

Il y aura donc lieu de prendre pour φ les valeurs données par l'équation

$$(91) \quad \left\{ \begin{aligned} &\iota\varphi + \psi(t)(\iota - R) - F'(t)\frac{\iota^3 - R^3}{4} - \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\rho}F(t)\iota \\ &\quad = -\frac{3}{\sqrt{2\pi}}\frac{\varepsilon}{\rho} R \int_0^\infty F\left[t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{(\iota - R)^2}{2\alpha^2}\right] e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha, \end{aligned} \right.$$

pourvu qu'on puisse y déterminer les deux fonctions arbitraires ψ, F du temps t, de manière à vérifier les conditions aux limites concernant ξ, η, ζ, savoir, les relations (73), devenues la deuxième et la troisième (88), les trois premières (74), et les relations (75).

Celles-ci, (75), seront satisfaites, si les deux fonctions $F(t)$, $\psi(t)$ tendent vers zéro quand t décroît vers $-\infty$; car alors l'équation (91) tendra vers $\iota\varphi = 0$. Quant aux trois premières (74), elles sont relatives aux très grandes valeurs de ι. Or alors la fonction sous le signe $\int$, au second membre de (91), devient négligeable; et la formule (91) y donne, à très peu près,

$$(92) \quad \text{(aux grandes distances)} \quad \varphi = -\psi(t) + \frac{F'(t)}{4}\iota^2 + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\rho}F(t).$$

(1) *Voir*, par exemple, mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, t. II, Compléments, p. 469*.

En remplaçant ι^2 par $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2$, on voit que les valeurs (82) de ξ, η, ζ y sont $\xi = F'(t)$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$; et les trois relations considérées (74) se trouveront satisfaites, à la condition nécessaire et suffisante de poser, vu (81),

$$(93) \qquad F'(t) = V, \qquad F(t) = \int_{-\infty}^{t} V\,dt.$$

Ainsi, les trois premières relations définies (74) déterminent *la fonction arbitraire* $F(t)$, qui *représente l'espace total parcouru depuis l'origine du mouvement par l'ensemble du fluide, en vertu de ses vitesses relatives données* V, et qui, par conséquent, s'annule bien pour $t = -\infty$.

Occupons-nous maintenant des deuxième et troisième conditions (88), qui, vu la première (88), reviennent évidemment à écrire

$$(94) \qquad (\text{pour } \iota = R) \quad \frac{d.\iota\varphi}{d\iota} = 0, \quad \frac{1}{\iota}\frac{d^2.\iota\varphi}{d\iota^2} \text{ ou } \Delta_2\varphi = 0.$$

La seconde de celles-ci a déjà été vérifiée, quand, d'une part, en posant (91), on a satisfait à la première relation (88) et que, d'autre part, après avoir établi l'équation (86), on a choisi $\psi_1(t)$ de manière à annuler $\Delta_2\varphi$ pour $\iota = R$.

Il reste donc justement la première condition (94) pour déterminer la fonction arbitraire $\psi(t)$. Et nous avons ainsi à différentier en ι l'expression de $\iota\varphi$, qui est, d'après (91),

$$(95) \qquad \left\{ \begin{aligned} \iota\varphi = &-\psi(t)(\iota - R) + F'(t)\frac{\iota^3 - R^3}{4} + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\rho}F(t)\iota \\ &- \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\frac{\varepsilon}{\rho}R\int_0^{\infty} F\left[t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{(\iota - R)^2}{2\alpha^2}\right] e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\,d\alpha. \end{aligned} \right.$$

Dans le résultat obtenu, adoptons comme variable d'intégration, au lieu de α, sous le signe $\int$ du dernier terme, et avant d'avoir fait tendre ι vers R, la quantité

$$(96) \qquad \beta = \frac{\iota - R}{\alpha}\sqrt{\frac{\rho}{2\varepsilon}}; \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\iota - R}{\alpha^2}\sqrt{\frac{\rho}{2\varepsilon}}\,d\alpha = -d\beta.$$

La première relation (94) nous donnera finalement

$$(97) \qquad \psi(t) = \frac{3}{4}R^2F'(t) + \frac{3}{2}\frac{\varepsilon}{\rho}F(t) + \frac{3}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}R\int_0^{\infty} F'(t - \beta^2)\,d\beta.$$

Cette valeur de $\psi(t)$ s'annule bien, comme $F(t)$, pour $t = -\infty$.

Ainsi, nos deux fonctions arbitraires $F(t)$, $\psi(t)$ sont déterminées; et toutes les conditions voulues se trouvent satisfaites par l'expression (95) de $\iota\varphi$.

Il reste à évaluer la pression moyenne p, au moyen de la quatrième condition (74) et surtout des équations (83), dont la première est devenue, vu (85) et (93),

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{p}{\rho}-\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dt}-\frac{\varepsilon}{\rho}\Delta_2\varphi\right)\right]=-\frac{1}{2}F''(t).$$

On peut remplacer, dans ces équations (83), la différence

$$\frac{d\varphi}{dt}-\frac{\varepsilon}{\rho}\Delta_2\varphi,\quad \text{ou}\quad \frac{1}{\iota}\left(\frac{d.\iota\varphi}{dt}-\frac{\varepsilon}{\rho}\frac{d^2.\iota\varphi}{d\iota^2}\right),$$

par sa valeur tirée de (89), et qui est

$$-\psi'(t)+\left[\psi'(t)-\frac{R^2F''(t)}{4}\right]\frac{R}{\iota}+\frac{F''(t)}{4}\iota^2.$$

Alors ces équations (83), multipliées par $\rho\,dx$, $\rho\,dy$, $\rho\,dz$, puis ajoutées et intégrées sans oublier la quatrième condition (74), donnent

$$(98)\qquad p=\rho R\left[\psi'(t)-\frac{R^2F''(t)}{4}\right]\frac{d\frac{1}{\iota}}{dx}\quad [1].$$

---

[1] Cette valeur de la pression moyenne p est, du moins aux grandes distances ι, en relation très simple avec la composante de la vitesse suivant le rayon ι, composante qui, si l'on appelle, comme ci-après, α, β, γ les trois angles de ce rayon avec les axes, a l'expression $\xi\cos\alpha+\eta\cos\beta+\zeta\cos\gamma$, c'est-à-dire

$$(\Delta_2\varphi)\cos\alpha-\left(\cos\alpha\frac{d}{dx}+\cos\beta\frac{d}{dy}+\cos\gamma\frac{d}{dz}\right)\frac{d\varphi}{dx},$$

ou

$$(\Delta_2\varphi)\cos\alpha-\frac{d}{d\iota}\frac{d\varphi}{dx},$$

ou encore

$$(\Delta_2\varphi)\cos\alpha-\frac{d}{d\iota}\left(\frac{d\varphi}{d\iota}\cos\alpha\right)=\left(\Delta_2\varphi-\frac{d^2\varphi}{d\iota^2}\right)\cos\alpha=\frac{2}{\iota}\frac{d\varphi}{d\iota}\cos\alpha=\frac{2}{\iota}\frac{d\varphi}{dx}.$$

Retranchons-en la composante analogue $V\cos\alpha$, ou $V\frac{d\iota}{dx}=\frac{2}{\iota}\frac{d}{dx}\left[F'(t)\frac{\iota^2}{4}\right]$, de la vitesse $V=F'(t)$ du fluide situé à l'infini, afin de considérer non un mouvement absolu, mais le mouvement relatif correspondant à la *perturbation* que la présence de la sphère solide entraîne dans la couche fluide de rayon ι; et nous aurons, pour la composante *radiale* de vitesse appelée δ au n° 14 (p. 227), en éliminant finalement φ par (95) sans écrire les termes de φ que ferait disparaître

Il n'y aura donc plus, pour obtenir les expressions définitives de φ et p, ou de $\iota\varphi$ et p, qu'à porter respectivement, dans (95) et (98), la valeur (97) de $\psi(t)$ et celle qui s'en déduit pour $\psi'(t)$.

17. **Résistance de la sphère.** — Évaluons maintenant l'impulsion totale exercée par le fluide sur la sphère solide. Nous considérerons d'abord celle que subit toute sphère décrite autour du centre (x_0, y_0, z_0) du corps, avec un rayon ι plus grand que R. Par raison de symétrie, elle passe par ce centre et a la direction de l'axe des x, dans le sens duquel se fait le mouvement relatif. Il suffit donc d'évaluer sa composante suivant les x positifs et, pour cela, de former la composante analogue de l'action exercée sur tout élément $d\sigma'$ de la surface $\sigma' = 4\pi\iota^2$ de la sphère. Appelons $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$ les trois cosinus directeurs $\frac{(x - x_0, y - y_0, z - z_0)}{\iota}$ de la normale $d\iota$ à l'élément $d\sigma'$; et des formules trouvées en premier lieu par Navier donneront, pour cette composante, suivant les x, de la pression sur $d\sigma'$, mais rapportée à l'unité d'aire,

$$(99) \qquad \left(-p + 2\varepsilon\frac{du}{dx}\right)\cos\alpha + \varepsilon\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\cos\beta + \varepsilon\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)\cos\gamma.$$

---

la différentiation en x,

$$\delta = \frac{2}{\iota}\frac{d}{dx}\left[\varphi - \frac{\iota^2}{4}F'(t)\right]$$
$$= \frac{2}{\iota}\frac{d}{dx}\left\{\left[\psi(t) - \frac{R^2}{4}F'(t)\right]\frac{R}{\iota} - \frac{3}{\sqrt{2\pi}}\frac{\varepsilon}{\rho}\frac{R}{\iota}\int_0^\infty F\left[t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{(\iota - R)^2}{2\alpha^2}\right]e^{-\frac{\alpha^2}{2}}d\alpha\right\}.$$

Or, aux grandes distances ι, l'intégrale définie figurant au dernier membre s'évanouit, et son produit par $\frac{R}{\iota}$ disparaît à côté du terme double précédent en $\frac{R}{\iota}$. En le supprimant et différentiant par rapport à t l'expression restante de δ, il vient alors, vu (98), la relation asymptotique cherchée entre p et δ:

$$(98\ bis) \qquad (\text{aux grandes distances } \iota)\ \frac{d\delta}{dt} = \frac{2}{\iota}\frac{p}{\rho}, \qquad \text{ou} \qquad p = \frac{\rho\iota}{2}\frac{d\delta}{dt}.$$

Par suite, le produit $p\delta$ admet, sur les sphères σ' de grand rayon ι considérées au n° 14 (p. 227), l'expression approchée

$$p\delta = \frac{\rho\iota}{4}\frac{d.\delta^2}{dt}.$$

Il s'y trouve bien, comme nous l'avons admis dans ce numéro, essentiellement positif au moment où, δ s'écartant de zéro, le carré δ^2 grandit.

Substituons-y les valeurs (70) de u, v, w (p. 225), puis les expressions (82), (98) de ξ, η, ζ, p; et observons encore que, les dérivées de ι en x, y, z étant $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$, on a, par exemple,

$$\frac{d\frac{1}{\iota}}{dx} = -\frac{\cos\alpha}{\iota^2}, \qquad \frac{d\Delta_2\varphi}{dx} = \frac{d\Delta_2\varphi}{d\iota}\cos\alpha,$$

$$\frac{d\Delta_2\varphi}{dx}\cos\alpha + \frac{d\Delta_2\varphi}{dy}\cos\beta + \frac{d\Delta_2\varphi}{dz}\cos\gamma = \frac{d\Delta_2\varphi}{d\iota}.$$

Il viendra, pour cette même composante (99) par unité d'aire,

$$(100)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho R\left[\psi'(t) - \frac{R^2F''(t)}{4}\right]\frac{\cos^2\alpha}{\iota^2} + \varepsilon\frac{d\Delta_2\varphi}{d\iota}(1+\cos^2\alpha) \\ &\qquad - 2\varepsilon\left(\cos\alpha\frac{d}{dx} + \cos\beta\frac{d}{dy} + \cos\gamma\frac{d}{dz}\right)\frac{d^2\varphi}{dx^2}.\end{aligned}\right.$$

Or $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$, ou $\frac{d^2\varphi}{d\iota^2}\frac{(x-x_0)^2}{\iota^2} + \frac{d\varphi}{d\iota}\left[\frac{1}{\iota} - \frac{(x-x_0)^2}{\iota^3}\right]$, est, identiquement, $\left(\frac{d^2\varphi}{d\iota^2} - \frac{1}{\iota}\frac{d\varphi}{d\iota}\right)\cos^2\alpha + \frac{1}{\iota}\frac{d\varphi}{d\iota}$, ou encore

$$(\Delta_2\varphi)\cos^2\alpha + \frac{1}{\iota}\frac{d\varphi}{d\iota}(1 - 3\cos^2\alpha);$$

et, d'autre part, l'expression symbolique $\cos\alpha\frac{d}{dx} + \cos\beta\frac{d}{dy} + \cos\gamma\frac{d}{dz}$ exprime une différentiation qu'on effectue le long de l'élément $d\iota$ du rayon ι prolongé, c'est-à-dire une différentiation, dans l'espace, obtenue en faisant varier ι seulement et non $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$. Cette différentiation appliquée à $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ donnera donc

$$\frac{d\Delta_2\varphi}{d\iota}\cos^2\alpha + \frac{d}{d\iota}\left(\frac{1}{\iota}\frac{d\varphi}{d\iota}\right)(1 - 3\cos^2\alpha).$$

Remplaçons encore $\varepsilon\frac{d\Delta_2\varphi}{d\iota}$ par sa valeur que fournit la différentiation en ι de l'équation (89) divisée préalablement par ι $\left(\text{où } \frac{1}{\iota}\frac{d^2.\iota\varphi}{d\iota^2}\right.$ ne sera autre chose que $\left.\Delta_2\varphi\right)$, valeur qui est

$$\rho R\left(\psi'(t) - \frac{R^2F''(t)}{4}\right)\frac{1}{\iota^2} - \frac{\rho F''(t)}{2}\iota + \rho\frac{d^2\varphi}{d\iota\, dt};$$

et la composante (100), suivant les x, de la pression exercée sur

l'unité de $d\sigma'$, deviendra enfin

$$(101)\quad \left\{ \begin{array}{l} \rho R \left(\psi'(t) - \dfrac{R^2 F''(t)}{4} \right) \dfrac{1}{\iota^2} - \dfrac{\rho F''(t)}{2} \iota \sin^2\alpha \\ \quad + \rho \dfrac{d^2\varphi}{d\iota\, dt} \sin^2\alpha - 2\varepsilon \dfrac{d}{d\iota} \left(\dfrac{1}{\iota} \dfrac{d\varphi}{d\iota} \right) (1 - 3\cos^2\alpha). \end{array} \right.$$

Sa valeur moyenne sur toute l'étendue $4\pi\iota^2$ de la surface σ' s'obtiendra en y remplaçant, d'une part, $\cos^2\alpha$ par sa valeur moyenne, égale à celles de $\cos^2\beta$ ou de $\cos^2\gamma$ et, par suite, au tiers de la somme 1 de ces trois carrés, d'autre part, $\sin^2\alpha$ par sa valeur moyenne, complémentaire de celle de $\cos^2\alpha$, ou égale à $\frac{2}{3}$. Donc l'impulsion totale subie par la sphère de rayon ι, de la part du fluide environnant, sera, en multipliant finalement par $4\pi\iota^2$,

$$(102)\qquad 4\pi\rho R \left[\psi'(t) - \frac{R^2 F''(t)}{4} - \frac{R^2 F''(t)}{3} \frac{\iota^3}{R^3} + \frac{2\iota^2}{3R} \frac{d^2\varphi}{d\iota\, dt} \right].$$

A la limite $\iota = R$, où la sphère devient la surface même σ du solide, la dérivée $\dfrac{d\varphi}{d\iota}$ s'annule *à toute époque,* en vertu de la seconde condition (88); ce qui fait disparaître le dernier terme dans la parenthèse de (102). Et l'impulsion totale R_x du fluide sur le corps se trouve exprimée simplement par la formule

$$(103)\qquad R_x = 4\pi\rho R [\psi'(t) - \tfrac{7}{12} R^2 F''(t)].$$

Remplaçons-y la dérivée $\psi'(t)$ par sa valeur tirée de (97). De plus, isolant les termes, rappelons que m représente la masse fluide $\frac{4}{3}\pi\rho R^3$ déplacée par le corps et que $F'(t)$, $F''(t)$ désignent la vitesse et l'accélération actuelles relatives V, $\dfrac{dV}{dt}$ de l'ensemble du fluide par rapport au solide. Il viendra

$$(104)\qquad R_x = \frac{m}{2} \frac{dV}{dt} + 6\pi\varepsilon RV + 12\sqrt{\pi\rho\varepsilon}\, R^2 \int_0^\infty F''(t - \beta^2)\, d\beta.$$

Nous reconnaissons, dans le premier terme du second membre, la formule simple, trouvée plus haut (p. 214), de la résistance opposée par la sphère à un fluide sans frottements, où $\varepsilon = 0$. Les deux derniers termes expriment donc ce que les frottements ajoutent à cette résistance, et nous devons nous y arrêter un instant.

18. Influence que les frottements y font prendre à la vitesse actuelle et aux accélérations antérieures. — Appelons, pour plus de

précision, V_x, et non V, la vitesse relative du fluide par rapport au corps, vitesse supposée ici dirigée suivant les x et qui, dans le cas général de mouvements relatifs de sens quelconques, exprimerait la composante, suivant les x, du mouvement relatif total, la seule qui influe, comme on voit, sur la composante de même sens, R_x, de l'impulsion totale exercée sur la sphère. Et quand cette vitesse V_x devra être considérée, dans une même expression, non seulement pour sa valeur au moment actuel, mais pour ses valeurs successives, ou comme fonction donnée de t, écrivons-la, même, $V_x(t)$, afin d'y distinguer l'époque à laquelle on la prend.

Alors nous pourrons, dans le dernier terme de (104), où $F''(t-\beta^2)$ deviendra $V'_x(t-\beta^2)$, adopter comme variable d'intégration la différence $t-\beta^2$, en posant $\tau = t-\beta^2$ et désignant ainsi par τ toute époque antérieure à l'époque actuelle. Il en résultera

$$\beta = \sqrt{t-\tau}, \qquad d\beta = -\frac{d\tau}{2\sqrt{t-\tau}};$$

et la formule (104), à laquelle seraient toutes pareilles, en V_y et V_z, les expressions des autres composantes R_y et R_z dans le cas de petits mouvements relatifs quelconques, deviendra

$$(105) \qquad R_x = \frac{m}{2}\frac{dV_x}{dt} + 6\pi\varepsilon R V_x + 6\sqrt{\pi\rho\varepsilon}\,R^2\int_{-\infty}^{t}\frac{V'_x(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\ (^1).$$

Les frottements intérieurs, dont la présence est manifestée, dans cette formule, par leur coefficient ε, ont donc pour effet d'introduire dans l'impulsion ou la résistance R_x, en premier lieu, un terme en V_x, produit de 3ε par le contour $2\pi R$ de la section maxima de la sphère et par cette vitesse actuelle V_x; en deuxième lieu, un terme proportionnel à R^2 ou à la section maxima et *où entrent linéairement tous les accroissements antérieurs* $V'_x(\tau)\,d\tau$ *qu'a éprouvés la vitesse depuis le repos primitif, mais avec des coefficients d'importance inverses de la racine carrée de leur éloignement* $t-\tau$ *à l'époque actuelle,* les plus anciens n'ayant ainsi qu'une influence indéfiniment atténuée. La résistance actuelle du solide garde donc, comme l'état actuel du fluide ambiant, quelque trace de toute la suite des mouvements relatifs antérieurement réalisés.

---

(1) J'ai donné cette formule, le 6 avril 1885, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. C, p. 935).

19. Cas d'un mouvement uniforme de l'ensemble du fluide par rapport à la sphère. — Le cas le plus simple est celui où le mouvement relatif est devenu *depuis longtemps* uniforme. Alors $V'_x(\tau)$ s'annule dans le dernier terme, sauf pour les valeurs très grandes de $t-\tau$; et si, par exemple, la vitesse V_x n'a mis à se produire qu'une durée assez courte par rapport à l'intervalle $t-\tau$ écoulé depuis, la formule (105) devient évidemment

$$(106)\quad R_x = 6\pi\varepsilon R V_x + 6\sqrt{\pi\rho\varepsilon}\,R^2 \frac{\int V'_x(\tau)\,d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = 6\pi\varepsilon R V_x + 6\sqrt{\pi\rho\varepsilon}\,R^2 \frac{V_x}{\sqrt{t-\tau}}.$$

La résistance s'approche donc, quoique assez lentement, de la valeur constante $6\pi\varepsilon RV_x$; ce qui prouve qu'un *régime permanent* du fluide tend à s'établir autour du corps. Et, en effet, ce régime permanent est possible. Car, si l'on suppose V_x ou V, $F'(t)$, φ *indépendants de t*, de manière que l'équation (85 *bis*) se réduise à $\frac{d^4 . \iota\varphi}{d\iota^4}=0$, l'expression de φ est (à part une constante insignifiante) de la forme $A\iota + B\iota^2 + \frac{C}{\iota}$, que les deux dernières conditions (88), puis la nécessité, où sont les expressions (87) de ξ, η, ζ, de se réduire à V, 0, 0 pour ι infini, changent en celle-ci,

$$(107)\quad \varphi = \frac{V}{4}\left(\iota^2 - 3R\iota - \frac{R^3}{\iota}\right).$$

Après quoi, $\Delta_2\varphi$ étant alors $\frac{3}{2}V\left(1-\frac{R}{\iota}\right)$, les équations (83) et la quatrième condition (74) donnent

$$(108)\quad p = \frac{3}{2}\varepsilon V R \frac{d\frac{1}{\iota}}{dx} = -\frac{3}{2}\varepsilon V R \frac{\cos\alpha}{\iota^2}.$$

Toutes les équations (71) et suivantes, du problème, sont donc satisfaites, sauf les dernières, (75), qui ne conviennent évidemment pas à un état permanent.

On voit que ce régime est très simple, la partie transcendante de la solution générale s'y évanouissant.

Il est d'ailleurs unique, c'est-à-dire que nul autre système de valeurs de ξ, η, ζ, p indépendantes du temps t ne vérifie les équations (71) à (74), avec les données actuelles. On le reconnaît en procédant comme au n° 14 (p. 226). L'équation (79) manque, il est vrai, de son premier

terme; mais l'annulation du terme suivant suffit pour démontrer la constance de ξ', η', ζ' dans tout le fluide et, par suite, leur égalité à zéro partout comme à l'infini.

20. Cas d'un mouvement périodique. — Après l'hypothèse $V_x =$ constante, la moins compliquée est celle d'un mouvement *pendulaire* où l'on aurait

$$V_x = \cos kt, \tag{109}$$

en appelant $\frac{\pi}{k}$ la demi-période, adoptant une origine des temps convenable et les maxima de V_x comme unité de vitesse.

Pour fixer les idées, supposons que l'expression de V_x, après avoir été, par exemple, nulle, soit devenue, depuis assez longtemps, (109). Alors, dans le dernier terme de (105) ou, plus simplement, de (104), les seuls éléments influents seront ceux que fournit cette dernière expression (109), donnant $V'_x(t-\beta^2) = -k\sin(kt - k\beta^2)$; et l'intégrale y devient très sensiblement

$$-k\sin kt.\int_0^\infty \cos(k\beta^2).d\beta + k\cos kt.\int_0^\infty \sin(k\beta^2).d\beta.$$

On reconnaît ici les deux intégrales définies, bien classiques, de la diffraction, dont la valeur est $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2k}}$.

Le dernier terme de (104) sera donc

$$3\pi R^2\sqrt{2\rho\varepsilon k}(-\sin kt + \cos kt) \quad \text{ou} \quad 3\pi R^2\sqrt{2\rho\varepsilon k}\left(\frac{1}{k}\frac{dV_x}{dt} + V_x\right). \tag{110}$$

Il se réduit, comme on pouvait le prévoir (t. I, p. 56), avec les deux termes précédents, auxquels il ajoute des parties fonctions de la période d'oscillation. Et la formule (105) de la résistance opposée par la sphère solide au mouvement pendulaire relatif du fluide devient, vu que $m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$,

$$R_x = \frac{m}{2}\left(1 + \frac{9}{2R}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\rho k}}\right)\frac{dV_x}{dt} + 6\pi\varepsilon R\left(1 + R\sqrt{\frac{\rho k}{2\varepsilon}}\right)V_x \text{ (1)}. \tag{111}$$

---

(1) Cette formule remarquable est due à G.-G. Stokes, qui l'a obtenue en se donnant *a priori* la forme pendulaire pour les petites vitesses tant du fluide que de la sphère. *Voir* la page 25, formule 51, de son Mémoire relatif à l'*Effet du frottement intérieur des fluides sur le mouvement des pendules*, dans les *Transactions de Cambridge* (t. IX, Part. II; 1851), ou la page 313 du Tome V (*Mé-*

La partie de la résistance qui est en raison directe de l'accélération relative se trouve ainsi accrue, par les frottements, dans une proportion en rapport constant avec la racine carrée de la période, ou inverse de $\sqrt{k}$; et la partie qui est en raison directe de la vitesse relative V_x, partie due tout entière aux frottements, comprend, elle aussi, un terme dépendant de la racine carrée de la période, mais qui lui est, au contraire, réciproquement proportionnel.

On remarquera que le coefficient de du Buat, exprimant la fraction du volume de la sphère, qui représente le volume total de la poupe et de la proue fluides fictivement retenues par elle, n'est plus $\frac{1}{2}$, mais $\frac{1}{2}\left(1+\frac{9}{2R}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\rho k}}\right)$; et qu'il est ainsi accru dans une proportion plus grande pour les petites sphères que pour les grosses, plus grande aussi pour une longue période d'oscillation que pour une courte. Toutes ces circonstances avaient été constatées par du Buat (*voir* son *Traité d'Hydraulique*, t. II, p. 226).

Il suffit de faire tendre k vers zéro, ou de supposer infinie la période (ce qui donne $V_x = 1$), pour retrouver l'hypothèse précédente d'un mouvement uniforme. Alors la première expression (110) du dernier terme de R_x s'annule; et la formule (105) de R_x se trouve bien réduite au terme $6\pi\varepsilon RV_x$.

En passant, par induction, du cas de la sphère à celui d'un solide immergé de forme quelconque, on peut conclure de ce qui précède que, dans les mouvements relatifs devenus périodiques et où, par

---

moires sur le Pendule, traduits par M. Wolf, seconde Partie) des *Mémoires publiés par la Société française de Physique.*

Stokes n'a pas manqué d'étudier (à la Section IV de son Mémoire) le régime permanent qui se produit autour de la sphère quand la vitesse V_x devient constante. De ce que la résistance, alors réduite à $6\pi\varepsilon RV_x$, est simplement proportionnelle au rayon, non à la surface du solide, il conclut avec raison qu'elle explique par le frottement intérieur la suspension de poussières même très lourdes dans l'eau et des imperceptibles globules aqueux des nuages dans l'air. Car cette résistance décroît, quand la sphère se rapetisse beaucoup, dans un rapport incomparablement moindre que ne fait la résistance ordinaire, proportionnelle à la surface, d'un solide dans un fluide, celle qui se produit à vitesses V assez grandes pour donner naissance, sur la *proue,* à une impulsion (ou pression *vive*) sensible quoique en raison directe du carré V^2, et, sur la *poupe,* à une diminution de pression causée par les tourbillonnements, à peu près proportionnelle aussi à V^2.

Notre théorie actuelle, où les mouvements sont supposés assez lents pour réduire les équations à la forme linéaire, n'a pas à s'occuper de ces résistances comparables au carré de la vitesse, les seules dont on parle généralement.



suite, l'état du fluide s'est réglé non *par voie de permanence,* mais *par voie de périodicité*, les frottements accroissent la partie de la résistance proportionnelle à l'accélération relative, dans un rapport peu sensible pour les gros corps ou pour les courtes périodes d'oscillation, mais susceptible de devenir énorme pour les corps très ténus ou pour les oscillations de grande durée. Et ils introduisent, en outre, comme dans le mouvement relatif uniforme, une partie proportionnelle à la vitesse et qui l'est aussi, sensiblement, au contour de la section maxima du corps (normale au mouvement), du moins quand ce contour est assez petit, sans que la période d'oscillation soit, en même temps, trop brève.

Nous avons supposé pendulaire le mouvement relatif donné de l'ensemble du fluide par rapport au solide. Si ce mouvement, tout en restant périodique, était plus compliqué, on sait qu'il se décomposerait, par la série de Fourier, en mouvements pendulaires ayant pour périodes les divers sous-multiples de la période générale. Or la forme linéaire des équations du problème montre, d'une part, que l'agitation relative du fluide, au voisinage du solide, résulterait alors de la superposition des oscillations pendulaires causées séparément, tout autour du corps, par chacun de ces mouvements plus simples, d'autre part, que l'impulsion totale exercée sur le solide, ou la résistance de celui-ci au mouvement du fluide, serait aussi la résultante des impulsions dues aux divers systèmes d'oscillations. Le problème se ramènerait donc au cas de mouvements pendulaires.

QUATRIÈME PARTIE.

SUITE : RÉSISTANCE DU CYLINDRE CIRCULAIRE.

---

21. Essai d'intégration des équations pour le cylindre circulaire. — Voyons encore s'il est possible d'appliquer au cylindre circulaire indéfini, poussé, par un fluide ambiant, normalement à son axe (pris pour celui des z), la méthode qui vient de réussir si bien et même si simplement pour la sphère ([1]).

Et, d'abord, le système à intégrer sera toujours celui des équations (71) à (75) (p. 226), mais où z, z_0, Z, ζ n'auront plus à figurer; de sorte que, notamment, ce seront les distances $\sqrt{x^2+y^2}$ à l'axe des z, ou, mieux, les distances $\iota = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ à l'axe (x_0, y_0) du cylindre, qui deviendront infinies aux points où les trois fonctions inconnues ξ, η, p se réduiront respectivement à $\int_{-\infty}^{t}\left(X-\frac{d^2x_0}{dt^2},\ Y-\frac{d^2y_0}{dt^2}\right)dt$ et zéro.

Considérant ces fonctions, par exemple, dans le plan des xy, entre la section donnée du cylindre et un cercle d'un rayon très grand r décrit autour de l'origine, on démontrera sans difficulté, tant dans le cas général que dans celui d'un régime permanent (p. 239), la détermination complète du problème, par la méthode suivie au n° **14** (p. 228), mais avec substitution d'intégrales de surface aux intégrales de volume, c'est-à-dire avec des modifications comme celles qui, dans le n° **9** (p. 215), avaient permis d'étendre au cas du plan la démonstration donnée pour l'espace au n° **4**. Ces démonstrations sont d'ailleurs subordonnées à l'hypothèse que le problème soit possible ou comporte *une* solution. Or, ce n'est pas *a priori* certain *dans le cas de permanence,* même en admettant le principe *physique* de l'établissement d'un régime permanent, dans *tout* système *effectif* de corps soumis à des actions indépendantes du temps; car le cylindre *indéfini* constitue

---

([1]) J'ai résumé l'étude suivante sur la résistance du cylindre circulaire dans une Note du 13 avril 1885, insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. C, p. 974.

une création de l'esprit, acceptable dans la question présente, pour remplacer un cylindre réel très long, aux points (x, y, z) du fluide *beaucoup plus distants des bases que de l'axe,* mais non à ceux dont les distances aux bases et à l'axe sont comparables.

Supposant ensuite $Y - \frac{d^2 y_0}{dt^2} = 0$, on posera les équations (81) à (85), mais en supprimant partout les termes en z et, par conséquent, les équations relatives à z ou à ζ. Seulement, $\Delta_2 \varphi$, par exemple, aura ici l'expression $\frac{1}{\iota} \frac{d}{d\iota}\left(\iota \frac{d\varphi}{d\iota}\right)$, et non plus l'expression simple $\frac{1}{\iota} \frac{d^2 . \iota\varphi}{d\iota^2}$; en sorte que, si l'on appelle maintenant $2F''(t)$ l'excédent de $\frac{dV}{dt}$ sur le second membre de la première (83), on aura, au lieu de (85 *bis*),

$$(112) \qquad \frac{d}{d\iota}\left[\iota \frac{d}{d\iota}\left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{\varepsilon}{\rho\iota} \frac{d.\iota \frac{d\varphi}{d\iota}}{d\iota}\right)\right] = 2F''(t)\iota.$$

Effectuons une première intégration en ι, puis, $-\psi'(t)$ désignant encore l'arbitraire introduite, multiplions par $\frac{d\iota}{\iota}$ et intégrons une seconde fois. Il vient, en appelant encore $\psi_1(t)$ la nouvelle arbitraire,

$$(113) \qquad \frac{d\varphi}{dt} - \frac{\varepsilon}{\rho\iota} \frac{d}{d\iota}\left(\iota \frac{d\varphi}{d\iota}\right) = F''(t)\frac{\iota^2}{2} - \psi'(t) \log \iota + \psi_1(t).$$

On obtient ensuite pour ξ, η deux formules analogues à (87) et qui donnent encore (88) comme conditions spéciales à la surface du corps, si l'on convient toujours d'y prendre $\varphi = 0$. Alors le premier membre de (113) s'annule pour $\iota = R$; de sorte que $\psi_1(t)$ a ici la valeur $\psi'(t) \log R - F''(t)\frac{R^2}{2}$. Et il vient, au lieu de (89),

$$(114) \qquad \frac{d\varphi}{dt} - \frac{\varepsilon}{\rho\iota} \frac{d}{d\iota}\left(\iota \frac{d\varphi}{d\iota}\right) = -\psi'(t) \log \frac{\iota}{R} + F''(t)\frac{\iota^2 - R^2}{2},$$

ou, au lieu de (90), vu que $\Delta_2 \log \iota = 0$ et $\Delta_2(\iota^2) = 4$,

$$(115) \qquad \left(\frac{d}{dt} - \frac{\varepsilon}{\rho\iota} \frac{d}{d\iota} . \iota \frac{d}{d\iota}\right)\left[\varphi + \psi(t) \log \frac{\iota}{R} - F'(t)\frac{\iota^2 - R^2}{2} - 2\frac{\varepsilon}{\rho} F(t)\right] = 0.$$

La quantité entre crochets, qui se réduit à $-2\frac{\varepsilon}{\rho}F(t)$ pour $\iota = R$,

vérifie encore l'équation des températures dans un corps athermane et isotrope, savoir, $\frac{du}{dt} - a^2\Delta_2 u = 0$ $\left(\text{avec } a^2 = \frac{\varepsilon}{\rho}\right)$. Mais ce corps n'est plus une barre : c'est une plaque à faces imperméables, où la température u dépendrait du temps t et de la distance r à un point central, sa matière s'étendant d'ailleurs jusqu'à l'infini en dehors du cercle $\text{r} = \text{R}$. Quand l'inconnue u doit s'annuler à l'infini, l'intégrale de cette équation peut être mise sous la forme

$$-2\frac{\varepsilon}{\rho}\int_0^\infty \chi\left(t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\text{r}^2}{2\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha},$$

où χ désigne une fonction arbitraire s'annulant asymptotiquement pour les valeurs infinies négatives de sa variable [1]. Mais ici, où r entre explicitement dans l'expression $\frac{1}{\text{r}}\frac{d}{d\text{r}}\left(\text{r}\frac{du}{d\text{r}}\right)$ de $\Delta_2 u$, on ne peut plus remplacer, sous le signe $\int$, r par $\text{r} - \text{R}$; d'où il suit que l'intégrale ne comporte pas, pour $\text{r} = \text{R}$, une expression simple proportionnelle à $\chi(t)$. Du reste, on ne peut pas davantage y faire $\text{r} = 0$; car alors les très petites valeurs de α rendent infini le facteur de $-2\frac{\varepsilon}{\rho}\chi(t)$, savoir, $\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha}$. C'est le produit de la dérivée en r de l'intégrale par r qui y prend une forme simple, savoir, $2\frac{\varepsilon}{\rho}\chi(t)$.

Quoi qu'il en soit, nous vérifierons l'équation (115) en posant, pour remplacer *le mieux possible* (91),

$$(116)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi + \psi(t)\log\frac{\text{r}}{\text{R}} - \text{F}'(t)\frac{\text{r}^2 - \text{R}^2}{2} - 2\frac{\varepsilon}{\rho}\text{F}(t) \\ &\qquad = -2\frac{\varepsilon}{\rho}\int_0^\infty \chi\left(t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\text{r}^2}{2\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha}. \end{aligned}\right.$$

La fonction arbitraire χ doit, comme on a vu, être choisie telle que, pour $\text{r} = \text{R}$, φ s'annule, ou que le premier membre se réduise à son dernier terme. Cette fonction χ se déterminera donc par la relation,

---

[1] *Voir*, par exemple, mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, t. II, *Compléments*, p. 473*, seconde formule (70), où il faut poser $\beta = 2\log\frac{\text{r}}{\alpha}$, $d\beta = -2\frac{d\alpha}{\alpha}$, et remplacer t par $\frac{\varepsilon}{\rho}t$, puis $\text{F}\left(\frac{\varepsilon}{\rho}t - \frac{\text{r}^2}{2\alpha^2}\right)$ par $\chi\left(t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\text{r}^2}{2\alpha^2}\right)$.

malheureusement très implicite,

$$(117)\qquad \int_0^\infty \chi\left(t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{R^2}{2\alpha^2}\right) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \frac{d\alpha}{\alpha} = F(t).$$

On voit que, si $\chi(-\infty)$ est de l'ordre de petitesse d'une puissance, à exposant négatif quelconque, de sa variable (prise en valeur absolue), $F(t)$ sera finie et s'annulera aussi pour $t = -\infty$.

D'ailleurs, le second membre de (116) tend alors vers zéro quand $\imath$ grandit indéfiniment; de sorte que l'expression de φ donnée par (116) pour les points très éloignés est, dans sa partie variable avec $\imath$, $-\psi(t)\log\imath + F'(t)\frac{\imath^2}{2}$. Le premier terme ayant ses dérivées en x et y évanouissantes, et $\imath^2$ étant $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$, les formules (82) de ξ et de η seront simplement, aux grandes distances $\imath$, $\xi = F'(t)$, $\eta = 0$. Donc les relations (74) (p. 226) se trouveront satisfaites, à la condition de poser, vu (81) (p. 229), $F'(t) = V$. Ainsi, *la fonction arbitraire* $F(t)$ se détermine toujours par les équations (93) (p. 233) : elle *représente encore l'espace total parcouru*, *depuis l'origine du mouvement*, *par l'ensemble du fluide*, *relativement au cylindre;* et elle s'annule bien à la limite $t = -\infty$.

Il reste, pour déterminer $\psi(t)$, les deux dernières conditions (88), ou plutôt la première d'entre elles seulement, vu que, en éliminant $\psi_1(t)$, nous avons déjà vérifié une combinaison des deux, savoir $\Delta_2\varphi = 0$ (pour $\imath = R$), d'après l'équation (114), dont le premier terme est annulé continûment avec φ, à la limite $\imath = R$, par l'ensemble des relations (116) et (117). Il faut donc différentier en $\imath$ les deux membres de (116) et exprimer, dans le résultat, que $\frac{d\varphi}{d\imath} = 0$ pour $\imath = R$. La dérivée du second membre de (116) est successivement, en intégrant finalement par parties et observant que les termes aux limites sont nuls,

$$\left\{\begin{aligned} &-2\frac{\varepsilon}{\rho}\int_0^\infty \chi'\left(t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\imath^2}{2\alpha^2}\right)\left(-\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\imath\, d\alpha}{\alpha^3}\right) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \\ &= 2\frac{\varepsilon}{\rho\imath}\int_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\chi\left(t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\imath^2}{2\alpha^2}\right) \\ &= 2\frac{\varepsilon}{\rho\imath}\int_0^\infty \chi\left(t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\imath^2}{2\alpha^2}\right) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \alpha\, d\alpha. \end{aligned}\right.$$

Il vient ainsi, pour $\psi(t)$, la valeur

$$(118)\qquad \psi(t) = R^2 F'(t) + 2\frac{\varepsilon}{\rho}\int_0^\infty \chi\left(t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{R^2}{2\alpha^2}\right) e^{-\frac{\alpha^2}{2}} \alpha\, d\alpha;$$

et l'on remarquera que cette valeur s'annule bien, comme $\chi(-\infty)$ et $F(-\infty)$, à la limite $t = -\infty$.

Enfin l'expression de p, nulle pour ι infini, sera, vu les équations (83), (93), (112) (p. 230, 233, 244) et le second membre de (114), valeur de $\frac{d\varphi}{dt} - \frac{\varepsilon}{\rho}\Delta_2\varphi$,

$$(119) \qquad p = -\rho \frac{\psi'(t)}{\iota} \frac{d\iota}{dx} \quad (^1).$$

Cette expression est seulement de l'ordre de petitesse de $\frac{1}{\iota}$ aux grandes distances ι : elle y décroît moins vite, sans comparaison, que l'expression (98) relative au cas de la sphère (p. 234); d'où l'on peut conclure que la perturbation causée par le cylindre indéfini se propage, à égalité des rayons R, beaucoup plus loin que la perturbation due à la sphère.

22. Résistance du cylindre, sous une forme implicite. — Évaluons maintenant l'impulsion sur le corps, et d'abord celle qu'éprouve suivant les x, par unité d'aire, un élément de la surface de rayon ι conaxique au cylindre. La formule (99) (p. 235) s'y appliquera, sauf à y poser $\cos\beta = \sin\alpha$, $\cos\gamma = 0$; et elle deviendra, au lieu de (100),

---

(1) En procédant comme à la note du n° 116 (p. 234), on trouve ici pour la *vitesse radiale* δ, ou $(\xi - V)\cos\alpha + \eta\sin\alpha$, dans le mouvement relatif de la couche fluide cylindrique de rayon ι par rapport au fluide situé à l'infini, la suite d'expressions

$$\begin{aligned}\delta = \left(\Delta_2\varphi - \frac{d^2\varphi}{d\iota^2} - V\right)\cos\alpha &= \left[\frac{1}{\iota}\frac{d\varphi}{d\iota} - F'(t)\right]\frac{d\iota}{dx} \\ &= \frac{1}{\iota}\frac{d}{dx}\left[\varphi - \frac{\iota^2}{2}F'(t)\right] \\ &= \frac{1}{\iota}\frac{d}{dx}\left[-\psi(t)\log\frac{\iota}{R}\right. \\ &\qquad \left. - 2\frac{\varepsilon}{\rho}\int_0^\infty \chi\left(t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\iota^2}{2\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha}\right].\end{aligned}$$

Aux distances de l'axe, ι, très grandes, le dernier terme entre crochets s'évanouit. Il vient donc, en différentiant par rapport au temps et tenant compte de (119),

$$(119\ bis) \qquad (\text{pour } \iota \text{ très grand}) \quad \frac{d\delta}{dt} = \frac{p}{\rho\iota}, \qquad \text{ou} \qquad p = \rho\iota\frac{d\delta}{dt}.$$

Le produit $p\delta$, essentiellement positif, aux grandes distances ι, quand le mouvement commence à s'y produire, est donc ici

$$p\delta = \frac{\rho\iota}{2}\frac{d.\delta^2}{dt}.$$

vu l'expression actuelle (119) de p, vu aussi que $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ est actuellement $(\Delta_2\varphi)\cos^2\alpha + \frac{1}{\iota}\frac{d\varphi}{d\iota}(1 - 2\cos^2\alpha)$,

$$(120)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho\psi'(t)\frac{\cos^2\alpha}{\iota} + \varepsilon\frac{d\Delta_2\varphi}{d\iota}(1+\cos^2\alpha) - 2\varepsilon\frac{d}{d\iota}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right) \\ &\quad = \rho\psi'(t)\frac{\cos^2\alpha}{\iota} + \varepsilon\frac{d\Delta_2\varphi}{d\iota}\sin^2\alpha - 2\varepsilon\frac{d}{d\iota}\left(\frac{1}{\iota}\frac{d\varphi}{d\iota}\right)(1-2\cos^2\alpha).\end{aligned}\right.$$

Or l'équation (114) différentiée en ι, et dont le second terme est $-\frac{\varepsilon}{\rho}\Delta_2\varphi$, donne une valeur de $\varepsilon\frac{d\Delta_2\varphi}{d\iota}$ qui transforme cette expression (120) en celle-ci :

$$(121)\quad \frac{\rho\psi'(t)}{\iota} - \rho F''(t)\iota\sin^2\alpha + \rho\frac{d^2\varphi}{d\iota\, dt}\sin^2\alpha - 2\varepsilon\frac{d}{d\iota}\left(\frac{1}{\iota}\frac{d\varphi}{d\iota}\right)(1 - 2\cos^2\alpha).$$

Sa valeur moyenne, sur l'aire $2\pi\iota$ de la surface cylindrique (considérée entre deux sections normales distantes de 1), s'obtient en y remplaçant $\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha$ par leurs valeurs moyennes, évidemment égales entre elles et à la moitié, $\frac{1}{2}$, de la somme constante $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha$. Elle est donc

$$(122)\quad \frac{\rho\psi'(t)}{\iota} - \frac{\rho F''(t)\iota}{2} + \frac{\rho}{2}\frac{d^2\varphi}{d\iota\, dt}.$$

A la surface $\iota = R$ du cylindre donné, le dernier terme s'annule, à raison de la deuxième condition (88) (p. 231); et, si l'on multiplie la somme des deux autres termes par l'aire correspondante $2\pi R$, il vient, pour la résistance R_x de l'unité de longueur du cylindre,

$$(123)\quad R_x = \pi\rho[2\psi'(t) - R^2 F''(t)].$$

Remplaçons enfin $\psi'(t)$ par sa valeur tirée de (118); et, vu d'ailleurs la première formule (93) (p. 233), nous aurons, en appelant encore m la masse, $\pi R^2\rho$, du fluide déplacé par le cylindre,

$$(124)\quad R_x = m\frac{dV}{dt} + 4\pi\varepsilon\int_0^\infty \chi'\left(t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{R^2}{2\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\alpha\, d\alpha.$$

Le premier terme du second membre exprimerait à lui seul, comme nous savons, la résistance R_x, dans l'hypothèse $\varepsilon = 0$. C'est donc le dernier terme qui représente le surcroît de résistance dû aux frottements. Mais, pour l'obtenir, il reste à y remplacer χ' par sa valeur, que définit implicitement, en fonction des vitesses relatives anté-

rieures données V, l'équation (117) différentiée en t, savoir,

$$(125) \qquad \int_0^\infty \chi'\left(t-\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{R^2}{2\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha}=V.$$

Considérons le rapport des deux intégrales définies qui figurent dans (124) et (125). Si nous y remplaçons, sous les signes $\int$, α par une autre variable d'intégration α', égale à $\frac{\varepsilon}{2\rho}\frac{\alpha^2}{R^2}$, ce rapport, dont le dénominateur est la vitesse donnée V, devient $\frac{2\rho R^2\gamma}{\varepsilon}$, où γ désigne l'expression

$$(126) \qquad \gamma=\frac{\int_0^\infty \chi'\left(t-\frac{1}{4\alpha'}\right)e^{-\frac{\rho R^2}{\varepsilon}\alpha'}d\alpha'}{\int_0^\infty \chi'\left(t-\frac{1}{4\alpha'}\right)e^{-\frac{\rho R^2}{\varepsilon}\alpha'}\frac{d\alpha'}{\alpha'}};$$

et la formule (124) prend la forme

$$(127) \qquad R_x=m\left(\frac{dV}{dt}+8\gamma V\right).$$

Mais il reste à y déterminer γ.

Contentons-nous de reconnaître ici que cette inconnue auxiliaire γ tend vers zéro avec ε. En effet, quand ε se rapetisse, les deux intégrales définies figurant dans (126) ont leurs éléments correspondants réduits, à cause de l'exponentielle qui leur est commune, dans un même rapport. Mais ce rapport s'élève de plus en plus avec α', au point que, abstraction faite du facteur χ', les éléments dont le champ est compris entre une valeur quelconque de α' et la limite supérieure, seraient évidemment, tous ensemble, la fraction $e^{-\frac{\rho R^2\alpha'}{\varepsilon}}$, évanouissante avec ε, de l'intégrale entière, dans le numérateur, et une fraction encore moindre dans le dénominateur, à cause du facteur décroissant $\frac{1}{\alpha'}$. Donc, étant donnée toute forme finie de la fonction χ', qui ne soit pas identiquement nulle pour les fortes valeurs négatives de sa variable, chacune des deux intégrales finit par se réduire à ses éléments les plus voisins de la limite inférieure, si ε devient assez petit. Or, en comparant ces éléments chacun à chacun dans le numérateur et dans le dénominateur, on voit que leur rapport α' est évanouissant. Ainsi, quand ε s'annule, γ tend bien vers zéro, et l'expression (127) de R_x se réduit à son premier terme.

23. Tentative pour la rendre explicite, du moins dans certains cas. — Pour tâcher de tirer quelque parti des formules précédentes, posons

$$(128)\qquad \iota\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}} = e^{\mu}, \qquad \text{ou} \qquad \mu = \log\left(\iota\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}\right),$$

μ étant ainsi une variable auxiliaire, qui croît de $-\infty$ à ∞, quand ι grandit de zéro à l'infini, ou quand ε décroît de l'infini à zéro. Les dérivations en ι des fonctions de μ se feront par la formule symbolique

$$(129)\qquad \frac{d}{d\iota} = \frac{d\mu}{d\iota}\frac{d}{d\mu} = \frac{1}{\iota}\frac{d}{d\mu} = \sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}\,e^{-\mu}\frac{d}{d\mu}.$$

Désignons d'ailleurs par Φ l'intégrale définie

$$(130)\qquad \Phi = \int_0^\infty \chi'\left(t - \frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\iota^2}{2\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha} = \int_0^\infty \chi'\left(t - \frac{e^{2\mu}}{2\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha}:$$

Φ sera ainsi une fonction de t et de μ, satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles transformée de celle que vérifie en ι et t cette intégrale définie, et qui est $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\varepsilon}{\rho\iota}\frac{d}{d\iota}\left(\iota\frac{d\Phi}{d\iota}\right)$. Or, vu d'abord la valeur $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}e^{\mu}$ de ι et, ensuite, la règle de différentiation (129), cette équation devient

$$(131)\qquad \frac{d\Phi}{dt} = e^{-2\mu}\frac{d^2\Phi}{d\mu^2}.$$

Il faut y joindre les trois relations spéciales

$$(132)\qquad \begin{cases} \left[\text{pour } \mu = \log\left(R\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}\right)\right] & \Phi = V, \\ (\text{pour } \mu = \infty) & \Phi = 0, \\ (\text{pour } t = -\infty) & \Phi = 0, \end{cases}$$

dont la première n'est autre que (125), tandis que les deux autres ont été justement admises quand on a posé $\chi(-\infty) = 0$.

L'ensemble des relations (131) et (132) détermine complètement Φ entre les limites $\mu = \mu_0 = \log\left(R\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}\right)$ et $\mu = \infty$. On le démontre en reconnaissant d'abord que la différence de deux solutions, s'il en existait plus d'une, vérifierait les mêmes équations (131) et (132), mais prises avec $V = 0$; puis, si Φ désigne cette différence, en intégrant, depuis μ_0 jusqu'à une valeur μ très grande, le produit de (131)

par $e^{2\mu}\Phi\,d\mu$. Il vient immédiatement, grâce, dans le second membre, à une intégration par parties, où les termes intégrés disparaissent à raison des deux premières conditions (132),

$$\frac{d}{dt}\int_{\mu_0}^{\mu} e^{2\mu}\frac{\Phi^2}{2}\,d\mu + \int_{\mu_0}^{\mu}\left(\frac{d\Phi}{d\mu}\right)^2 d\mu = 0.$$

Au moment où, t grandissant, Φ s'écarterait de sa valeur primitive zéro, les deux termes du premier membre seraient évidemment positifs, et leur somme ne pourrait se réduire à la valeur zéro du second membre. Donc le problème est bien déterminé; et, pour chaque expression donnée de V, il n'y a qu'une intégrale Φ possible.

Si l'on parvient à la trouver, la formule (124) de la résistance deviendra

$$(133)\qquad R_x = m\frac{dV}{dt} - 4\pi\varepsilon\frac{d\Phi}{d\mu},\qquad \text{pour } \mu = \mu_0 = \log\left(R\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}\right).$$

Cela résulte de la manière même dont a été obtenue l'intégrale définie figurant dans (124). Mais, on le voit aussi directement, en différentiant sous le signe $\int$, par rapport à μ, le troisième membre de (130), et en observant que cette intégrale donne identiquement, comme dérivée en μ,

$$-\int_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\,d\chi'\left(t-\frac{e^{2\mu}}{2\alpha^2}\right),$$

résultat qu'une intégration par parties transforme en ceci,

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=\infty}\chi'\left(t-\frac{e^{2\mu}}{2\alpha^2}\right)de^{-\frac{\alpha^2}{2}},$$

intégrale évidemment identique (sauf le signe), pour

$$\mu = \log\left(R\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}\right),$$

à celle qui figure dans le dernier terme de (124).

24. Impossibilité, à vitesse devenue constante, d'un régime permanent où la perturbation s'éteigne aux distances beaucoup moindres que la longueur du cylindre. — Si, à partir d'un certain moment, la vitesse V devient constante, il est inévitable qu'un état relatif permanent du fluide, par rapport au cylindre, s'établisse peu à peu.

Alors, ξ, η étant indépendants de t, les deux dérivées première et seconde de Φ en ι ou en μ, au moyen desquelles s'expriment ξ et η, le deviennent également; et, comme $\Phi = V$ à la limite inférieure $\mu = \mu_0$, il s'ensuit que Φ devient, partout, indépendant de t ([1]). L'équation (131) donne dès lors

$$\frac{d^2\Phi}{d\mu^2} = 0, \qquad \frac{d\Phi}{d\mu} = \text{une constante } (-C), \qquad \text{et} \qquad \Phi = V - C(\mu - \mu_0).$$

Or notre analyse, où le cylindre est *supposé* de longueur *indéfinie*, revient, *dans la pratique*, à admettre que la perturbation causée par la présence du cylindre reste sensiblement limitée à des distances petites comparativement à la longueur effective de celui-ci. Tant que cette hypothèse de *limitation* reste assez bien vérifiée, les formules ci-dessus sont donc applicables, et la seconde condition (132)

([1]) Toutefois, comme la relation entre φ et Φ contient aussi, explicitement, non seulement ι ou μ, mais encore, d'une certaine manière, le temps t, il est bon d'examiner ce point de plus près.

Éliminons, par l'équation (118), $\psi(t)$ de l'expression de φ que donne (116); puis remplaçons l'intégrale définie figurant au second membre de (116) par $\int_{-\infty}^{t} \Phi\, dt$ et celle qui figure au second membre de (118) par $-\int_{-\infty}^{t} \left(\frac{d\Phi}{d\mu}\right)_0 dt$, l'indice o signifiant qu'il faut prendre à la limite inférieure μ_0 la dérivée première de Φ en μ. Il viendra, par la double substitution, à $F'(t)$, de sa valeur V et, à ι, de $e^{\mu}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}$,

$$\varphi = -R^2V\mu + 2\frac{\varepsilon}{\rho}\mu \int_{-\infty}^{t} \left(\frac{d\Phi}{d\mu}\right)_0 dt + \frac{\varepsilon}{2\rho} V e^{2\mu}$$
$$- 2\frac{\varepsilon}{\rho}\int_{-\infty}^{t} \Phi\, dt + \text{une fonction de } t \text{ seul.}$$

On en déduit, vu finalement l'équation (131), qui permet de remplacer $\frac{d^2\Phi}{d\mu^2}$ par $e^{2\mu}\frac{d\Phi}{dt}$,

$$\frac{d^2\varphi}{d\mu^2} = 2\frac{\varepsilon}{\rho}\left(Ve^{2\mu} - \int_{-\infty}^{t} \frac{d^2\Phi}{d\mu^2}\, dt\right) = 2\frac{\varepsilon}{\rho} e^{2\mu}(V - \Phi).$$

Cette formule montre bien que Φ ne peut pas dépendre de t, quand V et $\frac{d^2\varphi}{d\mu^2}$ n'en dépendent pas. Or $\frac{d^2\varphi}{d\mu^2}$, exprimé au moyen des deux premières dérivées de φ en ι, a la valeur

$$\iota^2\left(\frac{d^2\varphi}{d\iota^2} + \frac{1}{\iota}\frac{d\varphi}{d\iota}\right);$$

il cesse de dépendre de t, dès l'instant où ξ, η et, par suite, ces deux dérivées n'en dépendent plus.

oblige évidemment à faire C infiniment petit, ou à prendre Φ très lentement variable, même autour du cylindre, dans l'état *ébauché* de permanence dont la réalisation se prépare.

Par suite, à mesure que se complète ou se parfait l'état permanent, le *champ* de la perturbation sensible, autour du cylindre, s'étend, *sans limite assignable,* puisque les deux premières conditions (132) exigent, entre le cylindre et le contour de ce champ, une variation totale constante V, *mais effectuée avec une lenteur de plus en plus grande,* de la fonction Φ. Donc la perturbation finit par franchir toutes les distances petites comparativement à la longueur du cylindre et, en conséquence, par le contourner suivant la longueur même; ce qui met en défaut notre hypothèse fondamentale de mouvements plans et, dès lors aussi, nos formules.

En d'autres termes, la masse fluide retenue par le cylindre, ou ce que du Buat appelle la *poupe* et la *proue* fluides, croît sans limite, *dans un régime permanent,* avec la longueur du cylindre (dont on ne peut plus, par suite, faire abstraction); et c'est, d'ailleurs, sans rendre infinie la résistance, vu l'évanouissement simultané de l'accélération.

N'oublions pas toutefois qu'en posant l'équation (2) (p. 200), nous avons admis l'incompressibilité totale du fluide. Or il est clair que sa faible compressibilité réelle atténue sa solidarité avec le cylindre et doit rendre moins absolue la conclusion précédente, relative aux poupe et proue fluides. En outre, les mouvements sont supposés ici bien continus, sans tourbillonnements, ni ruptures.

Aux distances petites par rapport à la longueur, et où notre analyse s'applique, à fort peu près, dans le régime *approximativement permanent* du début ou le plus simple, le fluide fait corps, sensiblement, avec le cylindre. En effet, dès que, dans (114) (p. 244), $F''(t)$ ou $\frac{dV}{dt}$ s'est annulé, φ, dans le régime permanent dont il s'agit, devient lui-même indépendant de t, comme ses deux premières dérivées en ι (liées à ξ et η), puisqu'on l'annule à toute époque pour $\iota = R$. Or, alors, cette équation (114), multipliée par $\iota\, d\iota$, et intégrée de manière que $\frac{d\varphi}{d\iota}$ s'annule pour $\iota = R$, donne, grâce, finalement, à une intégration par parties,

$$(134)\quad \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{\rho}\,\iota\,\dfrac{d\varphi}{d\iota} = R^2\psi'(t)\displaystyle\int_R^{\iota}\left(\log\frac{\iota}{R}\right)\frac{\iota}{R}\,\frac{d\iota}{R} \\ \qquad\quad = \dfrac{R^2}{2}\psi'(t)\left[\dfrac{\iota^2}{R^2}\log\dfrac{\iota}{R} + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\iota^2}{R^2}\right)\right]. \end{cases}$$

En divisant par $\imath^2$, il en résulte pour $\frac{1}{\imath}\frac{d\varphi}{d\imath}$ une valeur qui, aux grandes distances de l'axe, est de l'ordre de $\psi'(t)$ multiplié par un facteur indéfiniment croissant. Mais la composante relative ξ de vitesse est, d'après (82),

$$\frac{d^2\varphi}{d\imath^2}\frac{(y-y_0)^2}{\imath^2}+\frac{1}{\imath}\frac{d\varphi}{d\imath}\frac{(x-x_0)^2}{\imath^2},$$

quantité justement égale à $\frac{1}{\imath}\frac{d\varphi}{d\imath}$ dans le plan $y=y_0$. Si l'on n'avait pas $\psi'(t)=0$, la vitesse relative du cylindre et du fluide y croîtrait donc sans limite avec la distance $\imath$: circonstance évidemment inadmissible.

Ainsi, dans le régime permanent considéré, il faut poser $\psi'(t)=0$ là où s'appliquent nos formules, c'est-à-dire aux distances de l'axe petites par rapport à la longueur du cylindre. Par suite, $\frac{d\varphi}{d\imath}$ et φ s'y annulent partout comme pour $\imath=R$: les équations (82), (119) y donnent $\xi=0$, $\eta=0$, $p=0$; d'où aussi $R_x=0$: et le fluide est sensiblement immobilisé, *sans pression actuelle* d'aucune sorte, dans tout le voisinage du cylindre.

C'est donc aux deux bouts de celui-ci ou, du moins, loin de son milieu, près duquel nous nous supposons ici placés, que s'exercera l'impulsion du fluide.

Pour essayer de trouver un mouvement où la résistance R_x tende à être constante *sans s'évanouir,* admettons que la fonction $\chi'(t)$, après avoir été nulle de $t=-\infty$ à $t=0$, croisse rapidement jusqu'à une certaine valeur C, pour s'y maintenir désormais. Alors les deux formules (125) et (124), si l'on y débarrasse les intégrales des éléments où le facteur χ' est nul, donnent :

$$(135)\qquad (\text{pour } t>0)\quad \begin{cases} R_x=m\dfrac{dV}{dt}+4\pi\varepsilon C e^{-\frac{\rho R^2}{4\varepsilon t}},\\[2ex] V=C\displaystyle\int_{R\sqrt{\frac{\rho}{2\varepsilon t}}}^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha},\\[2ex] \dfrac{dV}{dt}=\dfrac{C}{2t}e^{-\frac{\rho R^2}{4\varepsilon t}}. \end{cases}$$

La résistance tend vers la valeur fixe $4\pi\varepsilon C$. Mais le mouvement n'approche pas d'avoir une vitesse finie constante; infiniment lent pour $t=0$, il s'accélère graduellement, avec accélération, $\frac{dV}{dt}$, nulle

au début, maxima pour $t = \frac{\rho R^2}{4\varepsilon}$ et indéfiniment décroissante plus tard, pas assez vite toutefois pour maintenir la vitesse au-dessous d'une valeur assignée.

25. **Cas d'un mouvement pendulaire : équations à y intégrer préalablement.** — Abordons enfin le cas d'un mouvement pendulaire. Dans ce but, faisant abstraction d'un coefficient constant d'amplitude qui disparaîtrait de toutes les formules comme facteur commun, et supposant une origine des temps convenablement choisie, prenons $\chi'(t) = \cos kt$, ou du moins concevons que $\chi'(t)$, après avoir été nul à une époque très ancienne, soit devenu peu à peu de la forme $\cos kt$. Alors la perturbation sensible ne cessera pas d'être limitée dans l'espace; car la dernière formule (130) de Φ, même en y faisant remonter jusqu'à $t = -\infty$ l'expression pendulaire de χ', tend vers zéro pour ι infini ou pour μ infini. Elle prend, en effet, la forme

(136)
$$\left\{\begin{aligned} \Phi &= (\cos kt)\int_0^\infty \left(\cos\frac{ke^{2\mu}}{2\alpha^2}\right) e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha} \\ &+ (\sin kt)\int_0^\infty \left(\sin\frac{ke^{2\mu}}{2\alpha^2}\right) e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha}; \end{aligned}\right.$$

et, si l'on change la variable d'intégration α contre une autre, β, égale à $\frac{e^\mu\sqrt{k}}{\alpha}$, les deux intégrales définies y deviennent

(137)
$$e^{-\mu}\int_0^\infty \left(\cos\frac{\beta^2}{2} \quad \text{ou} \quad \sin\frac{\beta^2}{2}\right)\left(\frac{e^\mu}{\beta} e^{-\frac{k}{2}\frac{e^{2\mu}}{\beta^2}}\right) d\beta.$$

Or, sous le signe $\int$, le second facteur entre parenthèses, fonction de $\frac{e^\mu}{\beta}$ nulle aux deux limites, positive dans l'intervalle et maxima $\left(\text{égale à } \frac{1}{\sqrt{ke}}\right)$ pour $\frac{e^\mu}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{k}}$, n'empêche évidemment pas les intégrales de rester finies et déterminées, quelque grand que soit μ. Car leurs groupes alternativement positifs et négatifs d'éléments qui y seraient agrandis par ce facteur le seraient, même pour μ infini, dans un rapport restreint, et sensiblement le même s'il s'agit de groupes consécutifs; de sorte que ces intégrales constituent, en y partant des groupes les plus forts, des séries convergentes de termes décroissants à signes alternés. On voit même que les groupes les plus forts sont de plus en plus éloignés de la limite inférieure, et de plus en plus petits,

à mesure que μ grandit : ce qui fait tendre alors les sommes des séries vers zéro. Donc les expressions (137) sont plus rapidement évanouissantes que leur facteur $e^{-\mu}$, quand μ croît sans limite. C'est dire que la seconde condition (132) est vérifiée, même en supposant que le mouvement *ait toujours été* périodique.

Faisons, dans (136),

$$(138)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_0^\infty \left(\cos\frac{ke^{2\mu}}{2\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha} = \mathrm{I}\cos\tau,\\ &\int_0^\infty \left(\sin\frac{ke^{2\mu}}{2\alpha^2}\right)e^{-\frac{\alpha^2}{2}}\frac{d\alpha}{\alpha} = \mathrm{I}\sin\tau, \end{aligned}\right.$$

I désignant ainsi la racine carrée positive de la somme des carrés des deux intégrales, et τ un arc fonction continue de μ. L'expression (136) de Φ devient alors

$$(139)\qquad \Phi = \mathrm{I}\cos(kt-\tau).$$

Portons-la, développée en $\cos kt$ et $\sin kt$, dans l'équation (131), ainsi que sa dérivée en t, $-k\mathrm{I}\sin(kt-\tau)$, développée de même. Comme l'équation (131) devra être satisfaite tant aux époques où $\sin kt = 0$ qu'à celles où $\cos kt = 0$, il faudra égaler séparément dans les deux membres le terme en $\cos kt$ et le terme en $\sin kt$; ce qui donnera, pour calculer I et τ en μ, les deux équations différentielles simultanées

$$\frac{d^2\mathrm{I}}{d\mu^2}\cos\tau - 2\frac{d\mathrm{I}}{d\mu}\frac{d\tau}{d\mu}\sin\tau - \mathrm{I}\frac{d\tau^2}{d\mu^2}\cos\tau - \mathrm{I}\frac{d^2\tau}{d\mu^2}\sin\tau = ke^{2\mu}\mathrm{I}\sin\tau,$$

$$\frac{d^2\mathrm{I}}{d\mu^2}\sin\tau + 2\frac{d\mathrm{I}}{d\mu}\frac{d\tau}{d\mu}\cos\tau - \mathrm{I}\frac{d\tau^2}{d\mu^2}\sin\tau + \mathrm{I}\frac{d^2\tau}{d\mu^2}\cos\tau = -ke^{2\mu}\mathrm{I}\cos\tau.$$

En les ajoutant, après les avoir respectivement multipliées soit par $\cos\tau$ et $\sin\tau$, soit par $-\sin\tau$ et $\cos\tau$, on les remplace par celles-ci,

$$(140)\qquad \frac{1}{\mathrm{I}}\frac{d^2\mathrm{I}}{d\mu^2} = \frac{d\tau^2}{d\mu^2},\qquad \frac{1}{\mathrm{I}^2}\frac{d}{d\mu}\left(\mathrm{I}^2\frac{d\tau}{d\mu}\right) = -ke^{2\mu},$$

qui reviennent identiquement à

$$(141)\qquad \frac{d^2\log\mathrm{I}}{d\mu^2} + \left(\frac{d\log\mathrm{I}}{d\mu}\right)^2 = \frac{d\tau^2}{d\mu^2},\qquad \frac{d^2\tau}{d\mu^2} + 2\frac{d\log\mathrm{I}}{d\mu}\frac{d\tau}{d\mu} = -ke^{2\mu}.$$

Il se joint à ces équations différentielles du second ordre, pour déterminer les quatre constantes arbitraires qu'introduit leur intégration,

les conditions aux limites, transformées des deux premières (132), où l'on devra encore égaler séparément, dans les deux membres, les termes en $\cos kt$ et les termes en $\sin kt$. Se donner, en particulier, V, ce sera connaître I et τ à la surface du cylindre, c'est-à-dire pour

$$\mu = \mu_0 = \log\left(R\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}\right).$$

Quant à la seconde condition (132), elle astreindra la fonction positive I à s'annuler pour μ infini.

La première équation (140) montre que la dérivée de I, ayant sa propre dérivée essentiellement positive, grandit sans cesse avec μ : nulle, comme I, pour μ infini, cette dérivée première de I est donc négative, et I décroît sans cesse. Elle montre encore que le produit $I\frac{d\tau^2}{d\mu^2}$, égal à la dérivée seconde de I nulle pour μ infini, s'annule lui-même à cette limite ; ce qui exige que l'expression $I\frac{d\tau}{d\mu}$ tende vers zéro pour μ infini. Sans cela, en effet, I s'y annulant, le facteur $\frac{d\tau}{d\mu}$ deviendrait infini et rendrait infinie l'expression $I\frac{d\tau^2}{d\mu^2}$, qui, en réalité, s'évanouit. Or, dès lors, la seconde équation (140), qui implique une valeur essentiellement décroissante pour la fonction $I^2\frac{d\tau}{d\mu}$, astreint à être positive cette fonction, qui s'évanouit elle-même pour μ infini. Donc la dérivée $\frac{d\tau}{d\mu}$ est positive ; et, tandis que I décroît en s'éloignant de l'axe, τ y croît, au contraire.

26. Résistance du cylindre au mouvement pendulaire. — Cela posé, voyons comment on obtiendra la résistance du cylindre, représentée par la formule (133). En différentiant par rapport à μ l'expression (139) de Φ, il vient

$$\frac{d\Phi}{d\mu} = \frac{dI}{d\mu}\cos(kt-\tau) + I\frac{d\tau}{d\mu}\sin(kt-\tau);$$

ce qui est la même chose que

$$\frac{d\Phi}{d\mu} = \frac{1}{I}\frac{dI}{d\mu}\Phi - \frac{1}{k}\frac{d\tau}{d\mu}\frac{d\Phi}{dt}:$$

et comme, à la limite $\mu = \mu_0$, Φ se réduit à la fonction connue V du temps t, on a

$$(142) \quad \left[\text{pour } \mu = \mu_0 = \log\left(R\sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon}}\right)\right] \quad \frac{d\Phi}{d\mu} = -\left(\frac{d}{d\mu}\log\frac{1}{I}\right)V - \frac{1}{k}\frac{d\tau}{d\mu}\frac{dV}{dt}.$$

Par suite, si l'on appelle, pour abréger, P et Q les deux quantités, essentiellement positives d'après ce qui précède,

$$(143) \qquad P = \frac{e^{-2\mu}}{k}\frac{d}{d\mu}\log\frac{1}{I}, \qquad Q = \frac{e^{-2\mu}}{k}\frac{d\tau}{d\mu},$$

l'expression (133) de la résistance devient, en y remplaçant $\pi\varepsilon$ par sa valeur, tirée de (128) et qui est $\pi\iota^2\rho e^{-2\mu}$ ou $me^{-2\mu}$,

$$(144) \qquad R_x = (1+4Q)m\frac{dV}{dt} + 4PkmV \quad (\text{pour } \mu = \mu_0 \text{ ou } \iota = R).$$

Il ne reste donc plus qu'à déterminer les deux fonctions P, Q de μ, pour en introduire, dans cette expression, les valeurs correspondant à $\mu = \mu_0$ ou à $\iota = R$.

Les formules (143), qui définissent P et Q, donnent

$$\frac{d\log I}{d\mu} = -ke^{2\mu}P, \qquad \frac{d\tau}{d\mu} = ke^{2\mu}Q;$$

et les relations (141) deviennent, en P et Q, les deux équations différentielles du premier ordre

$$(145) \qquad \frac{dP}{d\mu} + 2P = ke^{2\mu}(P^2 - Q^2), \qquad \frac{dQ}{d\mu} + 2Q = 2ke^{2\mu}PQ - 1.$$

En les ajoutant, respectivement multipliées par 1 et par $\sqrt{-1}$, on voit qu'elles sont réunies dans l'équation suivante, mais imaginaire, de Riccati,

$$(146) \qquad \frac{dS}{d\mu} + 2S = ke^{2\mu}S^2 - \sqrt{-1},$$

où S désigne la somme

$$(147) \qquad S = P + Q\sqrt{-1}.$$

Et celle-ci (146) elle-même, si l'on pose

$$(148)\qquad T = e^{-k\int e^{2\mu}S d\mu},\qquad \text{ou}\qquad S = -\frac{e^{-2\mu}}{k}\frac{d\log T}{d\mu} = -\frac{e^{-2\mu}}{kT}\frac{dT}{d\mu},$$

devient, en T, l'équation linéaire et binome du second ordre

$$(149)\qquad \frac{d^2T}{d\mu^2} = k\sqrt{-1}\,e^{2\mu}T,$$

montrant que T est une fonction cylindrique (ou Bessélienne) imaginaire ([1]). Il faudra donc intégrer ou cette équation (149), ou, directement, les deux équations simultanées (145), à termes réels.

Considérons plutôt celles-ci. Comme l'hypothèse $\varepsilon = 0$, ou $\mu = \infty$, fait évanouir, dans (144), les parties de R_x autres que $m\frac{dV}{dt}$, on voit que P, Q doivent s'annuler à la limite $\mu = \infty$.

On le reconnaît d'ailleurs directement, d'abord pour P, dont l'expression dépend, d'après (143), de $e^{2\mu}$ et de $\log I$. Comparons, en effet, pour μ très grand, $\log I$, ou plutôt $\log\frac{1}{I}$, qui est alors positif, à $e^{2\mu}$. Si n désigne leur rapport, positif lui-même, on aura $ne^{2\mu} + \log I = 0$, ou bien, en passant des logarithmes aux nombres, $e^{ne^{2\mu}}I = 1$, et, par suite,

$$e^{ne^{2\mu}}(I\cos\tau \text{ ou } I\sin\tau) = (\cos\tau \text{ ou } \sin\tau).$$

Or les expressions (137) de $I\cos\tau$ et de $I\sin\tau$, multipliées par $e^{ne^{2\mu}}$, deviennent

$$(150)\qquad \int_0^\infty \left(\cos\frac{\beta^2}{2} \quad\text{ou}\quad \sin\frac{\beta^2}{2}\right) e^{e^{2\mu}\left(n-\frac{k}{2\beta^2}\right)}\frac{d\beta}{\beta};$$

et il est facile de voir que celles-ci ne pourraient égaler $\cos\tau$ ou $\sin\tau$, c'est-à-dire se trouver comprises entre -1 et $+1$, si n n'y tendait pas vers zéro quand μ grandit. Car, si n restait supérieur à une limite positive ν^2, les éléments qui correspondent à $\beta > \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{k}{2}}$ rendraient évidemment infinies les deux intégrales quand l'exponentielle le serait, savoir, pour μ infini. Ainsi, le rapport n, c'est-à-dire l'expression

---

([1]) *Voir*, au sujet de cette équation, une Note du Tome II (*Compléments*) de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (p. 311* et 312*) : dans cette note, notre μ actuel devient $\frac{1}{2}\xi$.



$e^{-2\mu}\log\frac{1}{I}$, tend vers zéro à cette limite. Il en est, par suite, de même de sa dérivée en μ, qui est

$$e^{-2\mu}\frac{d}{d\mu}\log\frac{1}{I} - 2e^{-2\mu}\log\frac{1}{I}, \quad \text{ou} \quad kP - 2n;$$

et P tend bien, comme n, vers zéro, quand μ croît indéfiniment.

Dès lors, il en est de même de la dérivée de P en μ; et la première équation (145), divisée par $-ke^{2\mu}$, devient, pour μ infini, $0 = Q^2$. Ainsi, Q tend vers zéro comme P. Mais alors les premiers membres des équations (145) s'annulent à la limite; et ces équations tendent vers la forme

$$(Pe^{\mu}\sqrt{2k})^2 - (Qe^{\mu}\sqrt{2k})^2 = 0, \qquad (Pe^{\mu}\sqrt{2k})(Qe^{\mu}\sqrt{2k}) = 1.$$

Il en résulte (P, Q étant positifs) $Pe^{\mu}\sqrt{2k} = Qe^{\mu}\sqrt{2k} = 1$, ou bien

(151) . (pour μ très grand) $$P = \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{2k}}, \qquad Q = \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{2k}}.$$

27. **Cas d'un cylindre à grand rayon ou d'un mouvement à courte période : lois simples, approchées, de résistance.** — Si μ est assez grand, ces valeurs approchées de P et Q, portées dans les premiers membres de (145), en fourniront une approximation meilleure que la première (zéro); et ces équations, devenues

(152) $$\begin{cases} (Pe^{\mu}\sqrt{2k})^2 - (Qe^{\mu}\sqrt{2k})^2 = 2\dfrac{e^{-\mu}}{\sqrt{2k}}, \\ (Pe^{\mu}\sqrt{2k})(Qe^{\mu}\sqrt{2k}) = 1 + \dfrac{e^{-\mu}}{\sqrt{2k}}, \end{cases}$$

donneront très sensiblement, c'est-à-dire avec erreurs de l'ordre de $e^{-3\mu}$ seulement, en adoptant d'abord $(Pe^{\mu}\sqrt{2k})^2$ et $(Qe^{\mu}\sqrt{2k})^2$ comme inconnues provisoires,

(153) $$Q = \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{2k}}, \qquad P = \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{2k}} + \frac{e^{-2\mu}}{2k}.$$

On en déduit des valeurs des premiers membres de (145) qui se trouvent être les mêmes qu'à l'approximation précédente. Mais, en résolvant alors plus exactement les équations (152), c'est-à-dire sans

négliger, dans P et Q, les termes de l'ordre de $e^{-3\mu}$, il vient comme troisième approximation, à laquelle nous nous bornerons,

$$(154) \qquad Q = \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{2k}}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{e^{-2\mu}}{2k}\right), \qquad P = \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{2k}}\left(1 + \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{2k}} - \frac{1}{4}\frac{e^{-2\mu}}{2k}\right).$$

D'après (128) (p. 250), où il faudra faire $\iota = R$, la fraction $\frac{e^{-\mu}}{\sqrt{2k}}$ recevra, dans ces formules, la valeur $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\rho k}}$. Donc celles de seconde approximation par exemple, c'est-à-dire (153), donneront, comme expression de la résistance R_x, représentée par (144), et où $m = \pi R^2 \rho$,

$$(155) \qquad R_x = m\left(1 + \frac{2}{R}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\rho k}}\right)\frac{dV}{dt} + 2\pi\varepsilon\left(1 + 2R\sqrt{\frac{\rho k}{2\varepsilon}}\right)V.$$

On remarquera sa complète analogie avec l'expression que donne, pour la résistance de la sphère de même rayon R, la formule (111) (p. 240). Même les trois coefficients numériques 2, π et 2π qui y affectent, d'une part, $\frac{m}{R}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\rho k}}\frac{dV}{dt}$, d'autre part, le produit, par εV, du contour *mouillé*, 2, de la section maxima 2R normale au sens du mouvement, et, enfin, le produit de cette section maxima 2R par $\varepsilon V\sqrt{\frac{\rho k}{2\varepsilon}}$, sont peu différents des coefficients analogues $\frac{9}{4}$, 3 et 6, relatifs au cas de la sphère, où le contour et la section dont il s'agit étaient $2\pi R$ et πR^2.

Les diverses parties de la résistance qui, dans des oscillations pendulaires, dépendent du frottement intérieur sembleraient, d'après cela, ne pas varier beaucoup avec la forme du corps, à égalité soit de sa plus petite dimension 2R et de la masse fluide déplacée m, s'il s'agit de la première partie mentionnée, soit du contour de la section maxima normale au mouvement, s'il s'agit de la deuxième, soit, enfin, de l'aire de cette section, s'il est question de la troisième et dernière partie introduite par les frottements du fluide.

Les formules ci-dessus de P, Q seront, évidemment, d'autant plus approchées que sera plus grande leur variable $e^{\mu}\sqrt{2k}$, c'est-à-dire l'expression $2R\sqrt{\frac{\rho k}{2\varepsilon}}$, ou aussi, par suite, le diamètre 2R du cylindre. Or c'est dans ce cas, précisément, qu'on pourra s'attendre à voir le mieux vérifiée notre hypothèse fondamentale de mouvements du fluide bien continus ou sans tourbillonnements, nécessaire pour

que les lois élémentaires du frottement soient celles que nous avons admises. On conçoit, en effet, qu'un cylindre trop mince, ou généralement un corps très ténu, de rayon minime par rapport à l'amplitude des mouvements dans l'unité de temps, soit franchi plutôt que simplement contourné par le fluide oscillant, et le rompe au lieu de le suivre.

28. Aperçu des calculs à faire dans le cas général : leur mise fréquente en défaut par les ruptures du fluide. — Mais pour savoir jusqu'à quelle limite inférieure des valeurs de $e^{\mu}\sqrt{2k}$ ces formules (153) et (154) pourront s'appliquer, du moins dans la supposition d'amplitudes ou de vitesses assez faibles pour sauvegarder la continuité des mouvements, il faut intégrer les équations (145), ou mieux l'équation (149), que l'on rendra, d'ailleurs, indépendantes de k, en y remplaçant μ par la nouvelle variable $\mu' = \mu + \log\sqrt{k}$ (d'où $e^{\mu}\sqrt{k} = e^{\mu'}$). Si, même, adoptant provisoirement une variable, γ, *imaginaire* comme l'est la fonction T, on fait $\gamma = 2\mu' + \log\sqrt{-1}$, l'équation (149) prendra la forme plus simple, *entièrement réelle,*

$$\frac{d^2\mathrm{T}}{d\gamma^2} = \frac{1}{4}e^{\gamma}\mathrm{T}. \tag{156}$$

Posons-y

$$\gamma = 2\log r, \qquad e^{\gamma} = r^2 \qquad \left(\text{d'où } \frac{d}{d\gamma} = \frac{r}{2}\,\frac{d}{dr}\right): \tag{157}$$

elle devient aisément

$$\frac{d^2\mathrm{T}}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d\mathrm{T}}{dr} = \mathrm{T}. \tag{158}$$

Comme, d'ailleurs, la fonction T ne doit pas devenir infinie pour r infini, cette fonction a précisément, au changement près de $\mathfrak{r}$ en r, la forme de celle, u, que nous avons déterminée au n° 228 (p. 116), et qui vérifiait, dans ce numéro, l'équation (84) identique à celle-ci (158), sous la même condition de rester finie quand sa variable croissait indéfiniment. On aura donc, vu les formules (85) et (90) des n°s 228 et 229,

$$\mathrm{T} = -c_1\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \log\frac{r\sin^2\alpha}{2}\right] \mathrm{coh}(r\cos\alpha)\,d\alpha, \tag{159}$$

expression développable (n° 232) en séries toujours convergentes, procédant suivant les puissances de r, avec le facteur $\log r$ en plus dans

une de ces séries. La constante c_1 s'éliminera de la valeur (148) de S, où T entre seulement par la dérivée de son logarithme. Après quoi, les calculs numériques de S, P, Q se feront par les séries entièrement déterminées et explicites.

Ces calculs très laborieux ont été effectués, dans le grand Mémoire sur le pendule cité plus haut (p. 240), par sir Georges Stokes, qui a pu ainsi construire une Table des valeurs de P et de Q. Il s'en est servi pour évaluer la résistance de l'air aux petites oscillations d'une tige mince autour d'une de ses extrémités et, par suite, la part de résistance qu'oppose la tige de suspension aux mouvements, dans l'air, du pendule sphérique. On reconnaît, par confrontation avec cette Table, que les formules simples ci-dessus, (154), de P et Q commencent à s'appliquer pratiquement, dès que la variable $e^{\mu}\sqrt{2k}$, ou $2R\sqrt{\frac{\rho k}{2\varepsilon}}$, atteint environ la valeur 3, et même seulement 2 ou 1,5 [1].

---

[1] L'approximation devient cependant assez grossière pour la valeur 1,5 de $e^{\mu}\sqrt{2k}$; car les formules (154) donnent alors

$$1+4Q=3{,}96, \qquad 4P=4{,}15,$$

au lieu des valeurs exactes (obtenues par interpolation de la Table) 3,79 et 4,22. Pour $e^{\mu}\sqrt{2k}=1$, elles donneraient

$$1+4Q=6, \qquad 4P=7,$$

tandis que les vraies valeurs sont environ 5,33 et 7,34.

A la limite inférieure $e^{\mu}\sqrt{2k}=0$, les coefficients $1+4Q$ et $4P$ de $m\frac{dV}{dt}$ et de kmV, dans la formule (144) de la résistance R_x, deviennent infinis, mais d'un ordre d'infinitude plus élevé que les expressions (151), alors tout à fait en défaut; car les inverses de ces coefficients $1+4Q$ et $4P$ tendent respectivement (à des écarts *relatifs* près négligeables) vers

$$\frac{1}{2\pi}\left(e^{\mu}\sqrt{2k}\log\frac{1}{e^{\mu}\sqrt{2k}}\right)^2 \quad \text{et vers} \quad \frac{1}{8}\left(e^{\mu}\sqrt{2k}\right)^2\log\frac{1}{e^{\mu}\sqrt{2k}}.$$

Il en résulte que, dans cette formule (144) de R_x, les coefficients $(1+4Q)k$ et $4Pk$ de $\frac{m}{k}\frac{dV}{dt}$ et de mV sont alors, si k tend vers zéro, comparables aux inverses de $\left(\log\frac{1}{k}\right)^2$ et de $\log\frac{1}{k}$.

En prenant $V=\cos kt$ et, par suite, $\frac{1}{k}\frac{dV}{dt}=-\sin kt$, on voit donc que *les deux parties de la résistance R_x s'évanouiront, même celle qui dépend de la vitesse, si la période devient infinie, ou si le mouvement pendulaire dégénère en un mouvement uniforme.* C'est bien d'accord avec ce que nous avait indiqué

Il est très douteux qu'au-dessous de ces limites, même un peu au-dessus, l'hypothèse de la continuité des mouvements soit, en général, vérifiée [1].

(p. 254), pour le cas en question du mouvement uniforme, l'établissement, près du cylindre, d'un régime sensiblement permanent, consistant dans l'immobilisation presque complète, par le cylindre, du fluide ambiant.

[1] C'est ce qui paraît résulter de la courte Note finale de sir Georges Stokes, ajoutée par M. C. Wolf à la traduction française du Mémoire cité de l'éminent professeur de Cambridge : celui-ci ne s'y explique que par des remous, c'est-à-dire par des tourbillonnements ou des ruptures de fluide, l'écart notable existant entre les valeurs théoriques de la résistance, calculées d'après les vrais coefficients ε de frottement, et celles qu'on déduit des meilleures expériences sur les oscillations des tiges minces dans l'air. *Voir*, à ce sujet, la page 419 du Tome V cité des *Mémoires publiés par la Société française de Physique*. C'est, comme il a été dit plus haut (p. 119), aux pages 321 à 332 du même Volume que se trouve exposée la remarquable intégration d'où M. Stokes déduit (p. 333) la Table numérique des valeurs de P et de Q : sa variable m est notre $\frac{1}{2}e^{\mu}\sqrt{k}$, ou $\frac{R}{2}\sqrt{\frac{\rho k}{\varepsilon}}$, et ses quantités k, k' sont nos coefficients $1+4Q$, $4P$.

NOTE II.

EXPOSÉ DE LA THÉORIE DES ONDES LUMINEUSES CONTENUE EN GERME DANS LES TROISIÈME ET QUATRIÈME LEÇONS.

NOTE II.

EXPOSÉ DE LA THÉORIE MÉCANIQUE DES ONDES LUMINEUSES CONTENUE EN GERME DANS LES TROISIÈME ET QUATRIÈME LEÇONS.

PREMIÈRE PARTIE.

FORMULES GÉNÉRALES ET ÉQUATION DES FORCES VIVES.

1. Objet de cette seconde Note finale. — C'est en 1867 (¹) que j'ai commencé à faire connaître le mode d'explication des ondes lumineuses dont les IIIᵉ et IVᵉ Leçons ont exposé les principes. Cette théorie fut, peu après, appréciée et adoptée par l'illustre mécanicien-géomètre Barré de Saint-Venant, comme on le voit par le substantiel exposé qu'il en fit comparativement aux autres tentatives de théorie mécanique, dans le Tome XXV (4ᵉ série, 1872) des *Annales de Chimie*

(¹) *Théorie nouvelle des ondes lumineuses* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* 5 août 1867, t. LXV, p. 235). Le Mémoire *in extenso* a paru, l'année suivante, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (t. XIII, 1868, p. 313 à 339), où il a été suivi de trois *Compléments* (même t. XIII, p. 425 à 438; t. XVII, 1872, p. 165 à 174; t. XVIII, 1873, p. 361 à 390).

Le retard que j'ai mis à publier le Mémoire principal, de 1867, rédigé dès le mois d'août 1865, s'explique par cette circonstance que j'en avais fait le sujet de ma thèse pour le doctorat et devais, dès lors, le conserver inédit jusqu'à la soutenance. Je l'envoyai dans ce but, en novembre 1865, à Émile Verdet, l'éminent suppléant de Lamé dans la chaire de Physique mathématique de la Sorbonne et le professeur de France le plus compétent en Optique. Après examen, il déposa lui-même ce Mémoire, comme sujet de thèse présenté, au Secrétariat de la Faculté des Sciences, et me fit part de son approbation au moment de se rendre, très malade déjà, en congé dans sa famille, où il devait s'éteindre au bout de quelques mois. Après sa mort, universellement regrettée, mû par un sentiment de réserve bien explicable (à raison de travaux optiques très distingués, mais inspirés par des idées tout autres que les miennes, de son successeur dans le Cours de Physique mathématique), je jugeai convenable de retirer du Secrétariat, avant que mon nouvel examinateur en eût pris connaissance, ce projet de

et de Physique (¹). Notre grand physicien Fizeau la regarda aussi, dès lors, comme très fondée et très suggestive. Quelques années après, des savants éminents, surtout en Allemagne, mais aussi en France, la reprirent, en l'étendant même aux milieux absorbants (car je m'y étais borné aux cas de transparence parfaite), et ils lui demandèrent des points de départ ou des vues simples pour leurs travaux d'optique physique, dont elle a inspiré ainsi un certain nombre. Pendant ce temps, je me trouvais moi-même absorbé par des recherches appartenant à de tout autres champs de la Mécanique ou de la Physique mathématique; en sorte que je n'ai pu revenir aux ondes lumineuses, et encore seulement d'une manière accidentelle, qu'après un intervalle de vingt ans, en 1893 (²).

C'est à la sollicitation de l'un de nos physiciens-géomètres les plus actifs et les plus clairs, M. Carvallo, dont les recherches optiques, tant théoriques qu'expérimentales, sont le type de la précision, que je suis ainsi revenu à mon étude première, pour y apporter un complément nécessité par les mesures relativement récentes des indices, ou des vitesses de propagation, des radiations infra-rouges, à périodes beaucoup plus longues que celles des radiations *visibles;* et j'ai reconnu facilement que les actions de la matière pondérable sur l'éther, exercées aux distances intermoléculaires, ne sont pas totalement négligeables dans les équations du mouvement vibratoire de l'éther, mais qu'elles y introduisent justement les petits termes, proportionnels aux déplacements mêmes de celui-ci, reconnus par M. Carvallo nécessaires pour expliquer les vitesses effectives de propagation des radiations infra-rouges.

Comme je ne sais s'il me sera jamais donné de publier ailleurs l'ensemble des résultats, plus ou moins probables, de mes réflexions sur ce sujet des ondes lumineuses, exceptionnellement délicat, où est si

---

thèse, auquel je substituai le Mémoire, *Sur la propagation de la chaleur dans les cristaux,* qui est devenu ma thèse effective. Et c'est seulement après mon examen de doctorat (du 13 mai 1867) que j'ai pu, vers le milieu de 1867, m'occuper de la publication des autres Mémoires dont j'étais déjà en possession : on les trouve, pour la plupart, résumés dans les *Comptes rendus* du second semestre de 1867 et imprimés dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de 1868.

(¹) *Sur les diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses,* par M. de Saint-Venant, membre de l'Institut.

(²) *Introduction naturelle de termes proportionnels aux déplacements de l'éther, dans les équations de mouvement des ondes lumineuses, et considérations diverses sur la théorie de ces ondes* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CXVII, p. 80, 138 et 193; 10, 17 et 24 juillet 1893).

grande encore la part de l'incertain, j'essaierai d'en compléter ici l'exposé ébauché dans les IIIe et IVe Leçons (t. I, p. 29 à 73), en évitant d'ailleurs le plus possible les développements d'Analyse qui rentreraient dans la théorie générale de l'élasticité et ceux qui, se rapportant au détail des phénomènes, appartiendraient plutôt au cours même de Physique.

2. Résistance de la matière pondérable au mouvement vibratoire de l'éther, dans les corps transparents, et équations indéfinies approchées du mouvement lumineux. — Il résulte des considérations exposées au n° 32 (t. I, p. 65) que, dans les corps transparents en repos, les molécules pondérables, entraînées par l'éther, exécutent des oscillations incomparablement plus étroites que les siennes. D'où il suit que le mouvement vibratoire relatif de l'éther par rapport au corps se confond sensiblement avec son mouvement absolu. On a vu aussi (n° 29, p. 58) que la résistance opposée par chaque molécule pondérable à l'éther ambiant doit, à raison de la brièveté extrême des vibrations, dépendre surtout des accélérations relatives des deux espèces de matière, comme celle qu'oppose aux oscillations assez courtes d'un fluide tout corps solide immergé, mais avec des coefficients incomparablement plus grands (t. I, p. 59) dus à ce que la molécule rompt ici, en quelque sorte, un solide et non un fluide.

D'ailleurs, les trois accélérations relatives, suivant les axes, des deux espèces de matière, accélérations appelées $X - \frac{d^2 x_0}{dt^2}$, $Y - \frac{d^2 y_0}{dt^2}$, $Z - \frac{d^2 z_0}{dt^2}$, dans la Note précédente (p. 207), seront à très peu près $\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}$, où ξ, η, ζ désignent les trois composantes du déplacement vibratoire général de l'éther dans la région (x, y, z). Par suite, les formules (25) de cette Note, où il faudra changer les signes de R_x, R_y, R_z pour qu'elles désignent les résistances totales opposées suivant les axes par la molécule à l'éther, et non plus les impulsions contraires de l'éther sur la molécule, donneront des expressions de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} R_x = -m\left(a\frac{d^2\xi}{dt^2} + f\frac{d^2\eta}{dt^2} + e'\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right), \\ R_y = -m\left(f'\frac{d^2\xi}{dt^2} + b\frac{d^2\eta}{dt^2} + d\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right), \\ R_z = -m\left(e\frac{d^2\xi}{dt^2} + d'\frac{d^2\eta}{dt^2} + c\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right). \end{cases}$$

La masse m d'éther déplacée par la molécule est le produit du

volume ϖ de celle-ci par la densité ρ de l'éther libre; et, d'ailleurs, les coefficients a, b, c, d, e, f, d', e', f' sont ici, comme on vient de le dire, très grands par rapport à l'unité, ou très supérieurs aux valeurs qu'ils auraient si l'éther en vibrant se comportait à la manière d'un fluide parfait ([1]).

Malgré cette profonde différence, l'analogie qui nous conduit ainsi aux formules (1) paraît se poursuivre encore plus loin, savoir, jusqu'au point de donner dans ces formules la triple égalité

$$(2) \qquad \mathrm{d}' = \mathrm{d}, \qquad \mathrm{e}' = \mathrm{e}, \qquad \mathrm{f}' = \mathrm{f},$$

comme pour la résistance d'un fluide (p. 209). Nous admettrons donc cette triple égalité, sauf à fournir ensuite quelques indications sur la manière plus compliquée dont se passeraient les phénomènes, si elle n'avait pas lieu.

On déduira simplement, des formules (1) relatives à une molécule, celles qui exprimeront les trois composantes $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$, $\mathcal{R}_z$ de la résistance totale opposée par la matière pondérable au mouvement de l'unité de volume d'éther. Il suffira de procéder par voie de sommation, comme on l'a fait, au n° 30 (t. I, p. 60), pour les impulsions de l'éther, vibrant parallèlement à une direction donnée, sur une matière composée de molécules isotropes. Il viendra, si ϖ' désigne le volume élémentaire considéré d'éther,

$$\mathcal{R}_x = \frac{1}{\varpi'}\sum \mathrm{R}_x = -\rho\frac{d^2\xi}{dt^2}\frac{\Sigma\,\mathrm{a}\varpi}{\varpi'} - \rho\frac{d^2\eta}{dt^2}\frac{\Sigma\,\mathrm{f}\varpi}{\varpi'} - \rho\frac{d^2\zeta}{dt^2}\frac{\Sigma\,\mathrm{e}'\varpi}{\varpi'}, \qquad \mathcal{R}_y = \ldots.$$

([1]) Il est bon d'observer que l'éther, tout en résistant ainsi, comme pourrait le faire un solide, à sa division par les molécules pondérables, ou dans une proportion beaucoup plus forte, pour d'égales accélérations relatives des deux espèces de matière, que ne font les fluides dans les phénomènes mieux à notre portée, ne se distingue cependant pas en cela des autres fluides réels. Tous, soumis à des vibrations d'aussi courte période que les vibrations lumineuses, éprouveraient des résistances relativement aussi fortes de la part de petits corps solides immergés. L'éther n'est donc pas, pour cela, moins apte que l'eau et l'air à reconstituer sans cesse son isotropie, sa parité de constitution en tous sens, et, par suite, comme l'eau et l'air, à souder, à *confondre* très rapidement, après avoir été divisé, ses fragments juxtaposés. Si l'on oubliait cette circonstance, ou si l'on assimilait trop complètement à un solide l'éther vibrant lumineusement, on pourrait craindre qu'il ne fût dépourvu, comme les solides, de la propriété de se souder *spontanément* à lui-même, après avoir été rompu, et qu'il ne se comportât, lorsque quelques vibrations y auraient multiplié les surfaces intérieures de rupture, comme une masse pulvérulente sans élasticité, désormais incapable de transmettre régulièrement le mouvement.

Appelons A, B, C, D, E, F, D′, E′, F′ les valeurs moyennes respectives de a, b, c, d, e, f, d′, e′, f′, multipliées par le très petit rapport $\frac{\Sigma\varpi}{\varpi'}$, c'est-à-dire les expressions

$$(3)\qquad A=\frac{\Sigma\varpi a}{\Sigma\varpi}\frac{\Sigma\varpi}{\varpi'}=(\text{moy. de a})\frac{\Sigma\varpi}{\varpi'},\qquad B=\ldots,$$

analogues au nombre α du n° 30 (t. I, p. 60) et qui seront, comme α, comparables à l'unité.

Il viendra évidemment

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathfrak{R}_x=-\rho\left(A\dfrac{d^2\xi}{dt^2}+F\dfrac{d^2\eta}{dt^2}+E'\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}\right),\\ \mathfrak{R}_y=-\rho\left(F'\dfrac{d^2\xi}{dt^2}+B\dfrac{d^2\eta}{dt^2}+D\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}\right),\\ \mathfrak{R}_z=-\rho\left(E\dfrac{d^2\xi}{dt^2}+D'\dfrac{d^2\eta}{dt^2}+C\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}\right). \end{cases}$$

Et l'on remarquera que A, B, C, D, E, F, D′, E′, F′ se forment linéairement au moyen des coefficients individuels correspondants a, b, c, ..., c'est-à-dire qu'ils sont, comme $\Sigma\varpi$a, $\Sigma\varpi$b, ..., composés de parties proportionnelles aux nombres des molécules de chaque espèce, ou orientées dans chaque sens, que contient l'unité de volume du corps, les coefficients respectifs de proportionnalité y variant avec la forme de la molécule et se trouvant, à forme pareille, en raison directe de son volume, si du moins l'analogie empruntée à la résistance des fluides se maintient jusque dans ces détails. Il va sans dire, en outre, que D′, E′, F′ se confondent respectivement avec D, E, F, quand a lieu la triple égalité (2).

L'unité de volume d'éther n'éprouve guère, de la part de la matière pondérable, que cette résistance (4), exercée aux distances mêmes où s'exercent les actions élastiques sensibles de l'éther sur lui-même; et comme celles-ci ont, d'ailleurs, d'après la note des pages 48 à 52 (t. I), toujours sur l'unité de volume d'éther, les composantes totales

$$(5)\qquad \mu\left(\Delta_2\xi-\frac{d\theta}{dx}\right),\quad \mu\left(\Delta_2\eta-\frac{d\theta}{dy}\right),\quad \mu\left(\Delta_2\zeta-\frac{d\theta}{dz}\right),$$

les trois équations approchées du mouvement vibratoire lumineux s'obtiendront en égalant aux trois sommes respectives des expressions (4) et (5) les composantes $\rho\dfrac{d^2(\xi,\eta,\zeta)}{dt^2}$ de la force motrice de l'éther. Ces équations indéfinies approchées, plus générales que

celle, (11), de la IVe Leçon (t. I, p. 62), seront donc

$$(6)\qquad \begin{cases} \rho(1+A)\dfrac{d^2\xi}{dt^2}+\rho F\dfrac{d^2\eta}{dt^2}+\rho E'\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}=\mu\left(\Delta_2\xi-\dfrac{d\theta}{dx}\right),\\ \rho F'\dfrac{d^2\xi}{dt^2}+\rho(1+B)\dfrac{d^2\eta}{dt^2}+\rho D\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}=\mu\left(\Delta_2\eta-\dfrac{d\theta}{dy}\right),\\ \rho E\dfrac{d^2\xi}{dt^2}+\rho D'\dfrac{d^2\eta}{dt^2}+\rho(1+C)\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}=\mu\left(\Delta_2\zeta-\dfrac{d\theta}{dz}\right), \end{cases}$$

où θ, dilatation cubique, a l'expression

$$(7)\qquad \theta=\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}.$$

3. Relation qui remplace généralement celle de conservation des volumes d'éther propre aux corps transparents, isotropes et homogènes. — Si, dans l'hypothèse générale d'un milieu hétérogène, où A, B, C, ..., F' peuvent dépendre des x, y, z, on différentie ces équations (6), respectivement, par rapport à x, y, z, puis qu'on les ajoute terme à terme, il vient, en divisant par ρ,

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{d.(1+A)\xi}{dx}+\frac{d.(1+B)\eta}{dy}+\frac{d.(1+C)\zeta}{dz}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{d.D'\eta}{dz}+\frac{d.D\zeta}{dy}\right)+\left(\frac{d.E'\zeta}{dx}+\frac{d.E\xi}{dz}\right)+\left(\frac{d.F'\xi}{dy}+\frac{d.F\eta}{dx}\right)\right]=0.$$

Or il s'agit ici de mouvements vibratoires où s'annulent, en chaque point, les valeurs moyennes tant de $(1+A)\xi$, $(1+B)\eta$, ... que, par suite, de leurs dérivées en x, y, z; et les raisonnements indiqués en note à la page 52 du Tome I montrent, pour ce cas de petites vibrations et pour celui de mouvements propagés d'ailleurs en (x, y, z), que cette équation revient à poser

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d.(1+A)\xi}{dx}+\dfrac{d.(1+B)\eta}{dy}+\dfrac{d.(1+C)\zeta}{dz}+\left(\dfrac{d.D'\eta}{dz}+\dfrac{d.D\zeta}{dy}\right)\\ \qquad+\left(\dfrac{d.E'\zeta}{dx}+\dfrac{d.E\xi}{dz}\right)+\left(\dfrac{d.F'\xi}{dy}+\dfrac{d.F\eta}{dx}\right)=0. \end{cases}$$

Telle sera donc la relation linéaire, existant entre les déplacements ξ, η, ζ et leurs dérivées partielles premières en x, y, z, qui remplacera, dans les milieux hétérogènes et hétérotropes, l'équation $\theta=0$ de conservation des volumes d'éther, ou de transversalité exacte des vibrations, propre aux milieux homogènes isotropes.

4. Simplification de ces équations, dans le cas d'un corps possédant trois plans rectangulaires, ou trois axes rectangulaires, de symétrie de contexture. — Admettons que notre milieu, homogène ou non, ait une de ses particules symétrique de contexture par rapport à un plan, de telle sorte que la résistance ($\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$, $\mathcal{R}_z$), dans la particule, soit parallèle à ce plan quand l'accélération

$$\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)$$

l'est elle-même. Alors, si l'on choisit la direction du plan dont il s'agit pour celle des xy, la formule (4) de $\mathcal{R}_z$ devra s'annuler dès qu'on y fera $\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0$: ce qui revient à dire que les deux coefficients E, D' seront nuls. Admettons de même que la particule ait encore deux plans de symétrie de contexture, perpendiculaires au premier et entre eux. En les prenant pour plans des yz et des zx, on verra que les coefficients F, E' et D, F' seront également nuls. Il ne subsistera donc dans les formules (4), des neuf coefficients de résistance, que les trois appelés A, B, C, ou directs en quelque sorte, et évidemment positifs dans tous les corps.

On arrive aux mêmes conclusions, en supposant dans la particule trois axes rectangulaires de symétrie, suivant lesquels ait lieu la résistance ($\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$, $\mathcal{R}_z$) quand l'accélération $\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2}$ leur est parallèle. Car l'axe des z étant, par exemple, choisi dans le sens de l'un d'eux, $\mathcal{R}_x$ et $\mathcal{R}_y$ s'annuleront, dans la particule, si l'on y annule à la fois $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ et $\frac{d^2\eta}{dt^2}$. Cela obligera à poser $E' = 0$ et $D = 0$, au lieu de $E = 0$ et $D' = 0$ que l'on posait ci-dessus. Et, finalement, les six coefficients autres que A, B, C devront être nuls.

Donc, si la contexture du corps transparent proposé admet partout trois plans ou trois axes rectangulaires de symétrie, d'orientation constante, et qu'on ait pris leurs directions pour celles des plans ou des axes coordonnés, les équations (6) du mouvement auront leurs premiers membres réduits à la forme monome qu'ils affectent dans les corps isotropes. Seulement, la densité ρ de l'éther libre, au lieu de s'y trouver multipliée par le même facteur, $1 + \alpha$, dans les trois équations du mouvement, le sera par trois facteurs distincts $1 + A$, $1 + B$, $1 + C$; et l'éther aura ainsi sa densité fictivement accrue, par la résistance de la matière pondérable, dans trois rapports différents suivant les trois

axes, à raison des formes, inégalement effilées dans les divers sens, offertes par les molécules.

Dès lors, même si le milieu est homogène ou que A, B, C soient constants, la relation (8), quoique ayant son premier membre réduit, comme l'expression de 0, aux termes en $\frac{d\xi}{dx}, \frac{d\eta}{dy}, \frac{d\zeta}{dz}$, n'implique pas la conservation des volumes d'éther ; et les seconds membres de (6) ne peuvent pas être débarrassés des termes en $\frac{d\theta}{d(x, y, z)}$. Mais ces équations conservent néanmoins une simplicité inespérée, dont n'approchent pas celles qui régissent les petits mouvements des solides élastiques hétérotropes.

Aussi y a-t-il lieu de chercher si, dans le cas général d'une contexture quelconque, il n'existerait pas pour toute particule transparente un système d'axes rectangulaires, amenant les mêmes réductions des formules (4) de $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$, $\mathcal{R}_z$ aux trois termes en A, B, C.

5. Réduction des résistances et des équations approchées du mouvement à leurs formes les plus simples. — Il nous faut évidemment, pour cela, effectuer un changement d'axes analogue à celui de la VIIIe Leçon (t. I, p. 125). Si l'on appelle x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un nouveau système rectangulaire d'axes, défini en direction, relativement à celui des x, y, z, par des cosinus directeurs donnés, savoir, a, a', a'' pour x_1, b, b', b'' pour y_1, et c, c', c'' pour z_1, les composantes $\mathcal{R}_{x_1}$, $\mathcal{R}_{y_1}$, $\mathcal{R}_{z_1}$, suivant les x_1, y_1, z_1, de la résistance ($\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y, \mathcal{R}_z$) seront

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{R}_{x_1} &= a\,\mathcal{R}_x + a'\,\mathcal{R}_y + a''\,\mathcal{R}_z,\\ \mathcal{R}_{y_1} &= b\,\mathcal{R}_x + b'\,\mathcal{R}_y + b''\,\mathcal{R}_z,\\ \mathcal{R}_{z_1} &= c\,\mathcal{R}_x + c'\,\mathcal{R}_y + c''\,\mathcal{R}_z.\end{aligned}\right.$$

Grâce aux formules (4), où il faudra remplacer ξ, η, ζ par leurs valeurs en fonction des déplacements ξ_1, η_1, ζ_1 relatifs aux nouveaux axes, c'est-à-dire par

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= a\xi_1 + b\eta_1 + c\zeta_1,\\ \eta &= a'\xi_1 + b'\eta_1 + c'\zeta_1,\\ \zeta &= a''\xi_1 + b''\eta_1 + c''\zeta_1,\end{aligned}\right.$$

ces expressions (9) de $\mathcal{R}_{x_1}, \mathcal{R}_{y_1}, \mathcal{R}_{z_1}$ prendront immédiatement les

formes voulues

$$(11)\quad \begin{cases} \mathcal{R}_{x_1} = -\rho\left(A_1 \dfrac{d^2\xi_1}{dt^2} + F_1 \dfrac{d^2\eta_1}{dt^2} + E'_1 \dfrac{d^2\zeta_1}{dt^2}\right), \\ \mathcal{R}_{y_1} = -\rho\left(F'_1 \dfrac{d^2\xi_1}{dt^2} + B_1 \dfrac{d^2\eta_1}{dt^2} + D_1 \dfrac{d^2\zeta_1}{dt^2}\right), \\ \mathcal{R}_{z_1} = -\rho\left(E_1 \dfrac{d^2\xi_1}{dt^2} + D'_1 \dfrac{d^2\eta_1}{dt^2} + C_1 \dfrac{d^2\zeta_1}{dt^2}\right), \end{cases}$$

où l'on aura

$$(12)\quad \begin{cases} A_1 = A a^2 + B a'^2 + C a''^2 + (D + D')a'a'' + (E + E')a''a + (F + F')aa', \\ D_1 = A bc + B b'c' + C b''c'' + D b'c'' + D'c'b'' + E b''c + E'c''b + F bc' + F'cb', \\ D'_1 = A bc + B b'c' + C b''c'' + D c'b'' + D'b'c'' + E c''b + E'b''c + F cb' + F'bc', \\ B_1 = A b^2 + B b'^2 + \ldots, \text{ etc.} \end{cases}$$

D'ailleurs, de celles-ci l'on déduit

$$(13)\quad \begin{cases} D_1 + D'_1 = 2A bc + 2B b'c' + 2C b''c'' + (D + D')(b'c'' + c'b'') \\ \qquad\qquad + (E + E')(b''c + c''b) + (F + F')(bc' + cb'), \\ E_1 + E'_1 = 2A ca + 2B c'a' + \ldots, \\ F_1 + F'_1 = 2A ab + 2B a'b' + \ldots. \end{cases}$$

Or imaginons que l'on construise, autour du point (x, y, z) à partir duquel se comptent les déplacements ou coordonnées ξ, η, ζ, la surface du second degré qui aurait pour équation

$$(14)\quad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + (D + D')\eta\zeta + (E + E')\zeta\xi + (F + F')\xi\eta = \text{const.}$$

Dans le nouveau système rectangulaire des coordonnées ξ_1, η_1, ζ_1, cette équation devient précisément, vu les formules (10),

$$(15)\quad \begin{cases} A_1\xi_1^2 + B_1\eta_1^2 + C_1\zeta_1^2 + (D_1 + D'_1)\eta_1\zeta_1 \\ \qquad + (E_1 + E'_1)\zeta_1\xi_1 + (F_1 + F'_1)\xi_1\eta_1 = \text{const.}, \end{cases}$$

les nouveaux coefficients y désignant ceux que définissent trois des formules (12) et les formules (13).

Donc, si l'on choisit pour les directions des nouveaux axes celles des axes principaux de la surface du second degré à centre exprimée par (14), les rectangles $\eta_1\zeta_1$, $\zeta_1\xi_1$, $\xi_1\eta_1$ des coordonnées disparaîtront identiquement de sa nouvelle équation (15); et l'on aura

$$(16)\quad D_1 + D'_1 = 0, \qquad E_1 + E'_1 = 0, \qquad F_1 + F'_1 = 0.$$

C'est dire qu'*il y a, pour toute particule transparente, une orientation possible du système rectangulaire des axes, qui rend égaux*

deux à deux, avec signes contraires, les six coefficients indirects de résistance D′ *et* D, E′ *et* E, F′ *et* F.

Si le corps proposé est homogène, ou que, du moins, cette orientation soit la même dans toutes ses particules, on pourra la choisir pour celle des axes coordonnés. Et les équations (6) du mouvement vibratoire deviendront

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \rho(1+\mathrm{A})\frac{d^2\xi}{dt^2}+\rho\,\mathrm{F}\frac{d^2\eta}{dt^2}-\rho\,\mathrm{E}\frac{d^2\zeta}{dt^2}&=\mu\left(\Delta_2\xi-\frac{d\theta}{dx}\right),\\ -\rho\,\mathrm{F}\frac{d^2\xi}{dt^2}+\rho(1+\mathrm{B})\frac{d^2\eta}{dt^2}+\rho\,\mathrm{D}\frac{d^2\zeta}{dt^2}&=\mu\left(\Delta_2\eta-\frac{d\theta}{dy}\right),\\ \rho\,\mathrm{E}\frac{d^2\xi}{dt^2}-\rho\,\mathrm{D}\frac{d^2\eta}{dt^2}+\rho(1+\mathrm{C})\frac{d^2\zeta}{dt^2}&=\mu\left(\Delta_2\zeta-\frac{d\theta}{dz}\right).\end{aligned}\right.$$

Mais admettons que les coefficients D′ et D, E′ et E, F′ et F soient respectivement égaux deux à deux, conformément à l'analogie fournie par la résistance d'un liquide, et qui paraît bien s'étendre à tous les corps transparents. Les formules (12) montrent d'ailleurs que ces trois égalités auront lieu dans tous les systèmes rectangulaires d'axes, dès qu'on la donnera dans un seul; car il suffit de poser $\mathrm{D}'=\mathrm{D}$, $\mathrm{E}'=\mathrm{E}$, $\mathrm{F}'=\mathrm{F}$ pour qu'il vienne $\mathrm{D}'_1=\mathrm{D}_1$, $\mathrm{E}'_1=\mathrm{E}_1$, $\mathrm{F}'_1=\mathrm{F}_1$. Alors les équations (16) reviendront à annuler D_1, E_1, F_1; et *le milieu transparent se comportera comme s'il admettait trois plans rectangulaires, ou trois axes rectangulaires, de symétrie de contexture.*

Les équations de son mouvement vibratoire seront donc, au lieu de (17),

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \rho(1+\mathrm{A})\frac{d^2\xi}{dt^2}&=\mu\left(\Delta_2\xi-\frac{d\theta}{dx}\right),\\ \rho(1+\mathrm{B})\frac{d^2\eta}{dt^2}&=\mu\left(\Delta_2\eta-\frac{d\theta}{dy}\right),\\ \rho(1+\mathrm{C})\frac{d^2\zeta}{dt^2}&=\mu\left(\Delta_2\zeta-\frac{d\theta}{dz}\right).\end{aligned}\right.$$

Divisons-les par μ; et posons, pour abréger, en appelant a, b, c trois quantités positives données, constantes si le milieu est homogène,

$$(19)\qquad \frac{\mu}{\rho(1+\mathrm{A})}=a^2,\qquad \frac{\mu}{\rho(1+\mathrm{B})}=b^2,\qquad \frac{\mu}{\rho(1-\mathrm{C})}=c^2.$$

Il viendra

$$(20)\quad \frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}=\Delta_2\xi-\frac{d\theta}{dx},\quad \frac{1}{b^2}\frac{d^2\eta}{dt^2}=\Delta_2\eta-\frac{d\theta}{dy},\quad \frac{1}{c^2}\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\Delta_2\zeta-\frac{d\theta}{dz},$$

équations aussi simples que possible et entraînant, d'après (8), entre les dérivées premières de ξ, η, ζ, la relation

$$(20\ bis) \qquad \frac{1}{a^2}\frac{d\xi}{dx} + \frac{1}{b^2}\frac{d\eta}{dy} + \frac{1}{c^2}\frac{d\zeta}{dz} = 0.$$

6. **Équation des forces vives, dans le mouvement vibratoire de l'éther des corps transparents : énergie potentielle de résistance de la matière pondérable.** — Quoique nous ne devions pas ici faire usage de l'équation des forces vives, il ne sera pas inutile de former cette équation pour le problème, que nous étudions actuellement, des petits mouvements de l'éther au sein des corps transparents.

Prenons les équations du mouvement sous leur forme générale (6) (p. 272), mais en y séparant, aux premiers membres, les termes dus aux forces motrices de l'éther, savoir $\rho\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2}$, des autres, qui expriment les résistances (changées de signe) de la matière pondérable, et en faisant d'ailleurs, dans ceux-ci, $D' = D$, $E' = E$, $F' = F$. Puis multiplions ces trois équations, respectivement, par

$$\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}dt\, d\varpi,$$

ajoutons-les et intégrons dans toute une étendue ϖ quelconque d'éther. En posant, pour abréger,

$$(2) \quad U = A\frac{d\xi^2}{dt^2} + B\frac{d\eta^2}{dt^2} + C\frac{d\zeta^2}{dt^2} + 2D\frac{d\eta}{dt}\frac{d\zeta}{dt} + 2E\frac{d\zeta}{dt}\frac{d\xi}{dt} + 2F\frac{d\xi}{dt}\frac{d\eta}{dt},$$

nous aurons immédiatement

$$(2') \quad \left\{ \begin{aligned} & d\int_\varpi \frac{\rho}{2}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2}\right) d\varpi + d\int_\varpi \frac{\rho}{2}\,U\,d\varpi \\ & \qquad = dt\int_\varpi \mu\left[\frac{d\xi}{dt}\left(\Delta_2\xi - \frac{d\theta}{dx}\right) + \frac{d\eta}{dt}\left(\Delta_2\eta - \frac{d\theta}{dy}\right) + \frac{d\zeta}{dt}\left(\Delta_2\zeta - \frac{d\theta}{dz}\right)\right] d\varpi. \end{aligned} \right.$$

Le second membre exprime le travail élémentaire des actions élastiques de l'éther, en jeu dans toute l'étendue ϖ. Quant au premier membre, composé de deux termes de forme analogue, le premier de ces termes est l'accroissement, durant l'instant dt, de l'énergie actuelle du mouvement vibratoire de l'éther, et le second est, au signe près, le travail élémentaire des résistances de la matière pondérable à ce mouvement. Le sextinome U y a donc sa valeur indépendante du choix des axes.

Et, en effet, si l'on introduit, au lieu des coordonnées x, y, z, le

système des x_1, y_1, z_1 (p. 274) où les déplacements de l'éther sont ξ_1, η_1, ζ_1, les vitesses $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ s'exprimeront, dans (α), en fonction de $\frac{d(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{dt}$, par les formules (10), différentiées en t. Or on voit alors que le sextinome U devient, en $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$, un sextinome analogue, avec coefficients A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 justement donnés par les formules (12) où l'on ferait $D' = D$, $E' = E$, $F' = F$. L'expression (α) de U a donc bien, en chaque point (x, y, z) de l'éther, même valeur que l'expression correspondante

$$A_1 \frac{d\xi_1^2}{dt^2} + \ldots + 2F_1 \frac{d\xi_1}{dt}\frac{d\eta_1}{dt}.$$

Cela posé, si l'on oriente, dans chaque particule considérée à part, les déplacements ξ_1, η_1, ζ_1, suivant les axes de symétrie de la particule, qui y annulent D_1, E_1, F_1, ce sextinome U, deviendra la somme de trois carrés,

$$\left(\sqrt{A_1}\frac{d\xi_1}{dt}\right)^2 + \left(\sqrt{B_1}\frac{d\eta_1}{dt}\right)^2 + \left(\sqrt{C_1}\frac{d\zeta_1}{dt}\right)^2,$$

essentiellement positive, sauf pour la valeur zéro de la vitesse absolue de l'éther, qui l'annule. Donc l'intégrale $\int_\varpi \frac{\rho}{2} U\, d\varpi$, figurant au second terme de l'équation (α') des forces vives, est *positive;* et elle ne se réduit à son minimum zéro que lorsque les trois composantes $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ de la vitesse de l'éther s'annulent à la fois, dans tout l'espace ϖ. Cette intégrale est évidemment, dans la question, une *énergie potentielle,* un capital de travail, dû à la présence, et à l'action sur l'éther, des molécules pondérables interposées.

Quand toutes les particules du milieu transparent ont les axes de symétrie optique de leur contexture orientés de même, on peut supposer les x, y, z dirigés suivant ces axes; ce qui annule partout D, E, F dans l'expression (α) de U. Le premier membre de (α') se réduit donc à

$$d\int_\varpi \left(\frac{\rho + \rho A}{2}\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{\rho + \rho B}{2}\frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{\rho + \rho C}{2}\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right) d\varpi;$$

et l'on peut, fondant ainsi l'intégrale $\int_\varpi \frac{\rho}{2} U\, d\varpi$ avec celle qui exprime

l'énergie actuelle de l'éther, la considérer non comme une énergie potentielle, mais comme une demi-force vive supplémentaire, dont elle aurait tout à fait l'expression sans l'inégalité des trois masses fictives, ρA, ρB, ρC par unité de volume, y multipliant les demi-carrés des composantes respectives de la vitesse. Il est donc plus simple alors de raisonner comme si la matière pondérable n'existait pas, mais que la densité ρ de l'éther du corps eût été portée respectivement à $\rho + \rho A$, $\rho + \rho B$, $\rho + \rho C$ dans les trois équations du mouvement : c'est ce que nous avons fait à diverses reprises, et ce qu'un sentiment profond des phénomènes lumineux avait inspiré à Fresnel (du moins en ce qui concerne les corps isotropes) dans sa manière habituelle de concevoir l'éther.

7. Énergie élastique de l'éther : équation définitive des forces vives. — Mais transformons le second membre de (α'), où nous pourrons, sans erreur sensible, rendre continu le champ ϖ de l'intégrale $\int_\varpi$, en y comprenant les insignifiants volumes des molécules pondérables interposées. Tâchons d'extraire de ce second membre le travail extérieur $d\mathfrak{T}_e$, travail élémentaire des pressions exercées par l'éther environnant sur la surface limite σ du volume ϖ; ce qui n'y laissera subsister que le travail des actions élastiques intérieures.

Si l'on appelle p_x, p_y, p_z les composantes de la pression (par unité d'aire) sur l'élément quelconque $d\sigma$ de la surface, et $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$ les trois cosinus directeurs de la normale tirée vers le dehors à $d\sigma$, les formules usuelles de la théorie de l'*élasticité*, appliquées à l'éther où s'annule la vitesse de propagation des vibrations longitudinales, donneront

$$(\alpha'')\quad \left\{\begin{aligned} p_x &= \mu\left[-2\left(\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right)\cos\alpha + \left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right)\cos\beta + \left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right)\cos\gamma\right],\\ p_y &= \mu\left[\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right)\cos\alpha - 2\left(\frac{d\zeta}{dz}+\frac{d\xi}{dx}\right)\cos\beta + \left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right)\cos\gamma\right],\\ p_z &= \mu\left[\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right)\cos\alpha + \left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right)\cos\beta - 2\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}\right)\cos\gamma\right]; \end{aligned}\right.$$

et, d'ailleurs, le travail de ces composantes, étant, sur l'élément $d\sigma$,

$$p_x d\sigma . d\xi + p_y d\sigma . d\eta + p_z d\sigma . d\zeta = dt\left(\frac{d\xi}{dt}p_x + \frac{d\eta}{dt}p_y + \frac{d\zeta}{dt}p_z\right)d\sigma,$$

vaudra, sur toute la surface limite σ,

$$(\alpha''')\qquad d\mathfrak{T}_e = dt\int_\sigma \left(\frac{d\xi}{dt}p_x + \frac{d\eta}{dt}p_y + \frac{d\zeta}{dt}p_z\right)d\sigma.$$

Transportons-y les valeurs (α'') de p_x, p_y, p_z; et, pour pouvoir extraire du second membre de (α') l'expression de $d\mathfrak{G}_e$, ou réduire ainsi ce second membre, transformons, dans (α'''), chaque terme, qui indique une intégration sur toute la surface σ, en une intégrale de volume, par la formule usuelle (applicable à toute fonction continue φ de x, y, z)

$$\int_\sigma \varphi \cos(\alpha, \beta, \gamma)\, d\sigma = \int_\varpi \frac{d\varphi}{d(x, y, z)}\, d\varpi.$$

Il suffira de faire successivement, dans celle-ci,

$$\varphi = -2\mu \frac{d\xi}{dt}\left(\frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right), \qquad \varphi = \mu \frac{d\xi}{dt}\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right), \qquad \dots$$

En effectuant ensuite, sous les signes $\int_\varpi$, les différentiations des produits φ en x, y, z, que suivront des réductions immédiates, et en posant enfin

$$(\beta) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Phi = {} & \frac{d\xi^2}{dx^2} + \frac{d\eta^2}{dy^2} + \frac{d\zeta^2}{dz^2} \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)^2 - \theta^2, \end{aligned} \right.$$

il viendra

$$(\beta') \qquad d\mathfrak{G}_e = \text{le second membre de } (\alpha') + d\int_\varpi \mu\Phi\, d\varpi.$$

Le travail des actions élastiques de l'éther intérieures au système, excédent du second membre de (α') sur $d\mathfrak{G}_e$, est donc exprimé par $-d\int_\varpi \mu\Phi\, d\varpi$, ou égal au décroissement de l'intégrale $\int_\varpi \mu\Phi\, d\varpi$. Celle-ci est, dès lors, l'*énergie potentielle d'élasticité* de l'éther. Et, en effet, on reconnaît dans la fonction $\mu\Phi$ le *potentiel d'élasticité* de l'éther (assimilé à un corps solide).

Ajoutons enfin aux deux membres de l'équation (α') le terme $d\int_\varpi \mu\Phi\, d\varpi$, et nous aurons l'équation cherchée des forces vives sous sa forme la plus simple possible :

$$(\gamma) \qquad d\left[\int_\varpi \frac{\rho}{2}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2}\right) d\varpi + \int_\varpi \frac{\rho}{2} \mathrm{U}\, d\varpi + \int_\varpi \mu\Phi\, d\varpi\right] = d\mathfrak{G}_e.$$

Elle exprime que *l'énergie actuelle de l'éther, l'énergie poten-*

tielle de résistance de la matière pondérable interposée, enfin l'énergie potentielle d'élasticité de l'éther, constituent ensemble, pour le mouvement vibratoire, une énergie totale, s'accroissant continuellement du travail, positif ou négatif, des pressions exercées sur l'éther considéré par l'éther extérieur.

8. **Valeur, toujours positive, de l'énergie élastique de l'éther vibrant.** — Les éléments des trois intégrales dont se compose l'énergie totale sont positifs dans tous les corps transparents connus. C'est évident pour la première et cela résulte, pour la seconde, de l'inégalité $U > 0$ démontrée ci-dessus. Quant à la troisième, le facteur Φ serait, il est vrai, susceptible d'y devenir négatif, à cause de sa dernière partie $-\theta^2$, si les dérivées partielles premières de ξ, η, ζ en x, y, z pouvaient recevoir des valeurs quelconques. Mais la relation (8) (p. 272), qu'elles vérifieront toujours, comme on a vu, dans les faibles quoique rapides déformations auxquelles nos équations sont applicables, astreint la dilatation cubique θ, du moins dans les milieux homogènes, à égaler une fonction linéaire, à coefficients très petits devant l'unité, des six *déformations élémentaires*

$$(\gamma') \qquad \frac{d\xi}{dx},\quad \frac{d\eta}{dy},\quad \frac{d\zeta}{dz},\quad \frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy},\quad \frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz},\quad \frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}.$$

En effet, tous les corps transparents connus sont *assez peu* biréfringents (ou optiquement hétérotropes) pour que A, B, C n'y diffèrent guère de leur moyenne et pour que D′, E′, F′, égaux respectivement à D, E, F, y soient petits à côté de A, B, C. Or si l'on substitue, par exemple, à A, B, C leur moyenne, accrue de leurs petits excédents respectifs sur cette moyenne, la somme θ des trois premières déformations (γ'), figurera seule, dans (8), avec un coefficient notable; et, en isolant θ, on aura bien, pour θ, l'ensemble de six termes respectivement proportionnels aux déformations (γ'), avec de faibles coefficients. Ainsi θ sera toujours petit par rapport à la plus forte des six déformations (γ') et, θ^2, très petit à côté du carré de cette déformation. Dès lors, dans (β), le terme négatif $-\theta^2$ ne fait que réduire l'un des six termes positifs qui précèdent, d'une minime fraction de sa valeur; et la troisième partie de l'énergie totale de l'éther n'est pas moins positive que les deux autres, dans tous les phénomènes auxquels nos équations sont applicables.

Mais cherchons dans quelles limites serait tenue de rester l'hétérotropie des corps transparents (si elle devenait beaucoup plus grande qu'elle n'est), pour laisser ainsi essentiellement positive l'énergie po-

tentielle d'élasticité de l'éther vibrant, ou à quelle condition générale doivent satisfaire, dans ce but, les coefficients A, B, ... de résistance de la matière pondérable.

Nous pouvons, considérant à part une particule quelconque du milieu transparent proposé, admettre que l'on ait orienté les x, y, z suivant ses axes de symétrie optique : alors D, E, F s'annulent, et, A, B, C devenant les trois coefficients principaux de résistance, les coefficients $1+A$, $1+B$, $1+C$ des premiers termes de (8) sont entre eux comme les inverses des carrés a^2, b^2, c^2, qui figurent dans les précédentes équations (20) de mouvement. Cette condition (8) se trouve ainsi réduite à

$$(\gamma'') \qquad \frac{1}{a^2}\frac{d\xi}{dx}+\frac{1}{b^2}\frac{d\eta}{dy}+\frac{1}{c^2}\frac{d\zeta}{dz}=0.$$

Les trois dernières des six déformations (γ') n'y paraissent plus et restent entièrement arbitraires. Donc les termes de (β) qui contiennent leurs carrés forment une somme positive, mais pouvant s'annuler indépendamment des quatre autres termes. Par suite, il faut et il suffit que l'ensemble de ceux-ci, savoir

$$\frac{d\xi^2}{dx^2}+\frac{d\eta^2}{dy^2}+\frac{d\zeta^2}{dz^2}-\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right)^2,$$

soit essentiellement positif. Si nous y développons le quatrième carré, nous aurons ainsi, après avoir divisé par 2, l'inégalité

$$(\gamma''') \qquad -\frac{d\eta}{dy}\frac{d\zeta}{dz}-\frac{d\zeta}{dz}\frac{d\xi}{dx}-\frac{d\xi}{dx}\frac{d\eta}{dy}>0,$$

où les trois dérivées respectives de ξ, η, ζ en x, y, z seront liées par la relation (γ''). Pour simplifier l'écriture, divisons (γ''') par $a^2b^2c^2$, et posons ensuite

$$(\delta) \qquad \frac{1}{a^2}\frac{d\xi}{dx}=X, \qquad \frac{1}{b^2}\frac{d\eta}{dy}=Y, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{d\zeta}{dz}=Z.$$

La relation (γ'') donnera $Z=-X-Y$; et l'inégalité (γ'''), déjà devenue

$$-\frac{YZ}{a^2}-\frac{ZX}{b^2}-\frac{XY}{c^2}>0,$$

prendra la forme

$$(\delta') \qquad \frac{1}{a^2}Y^2+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)YX+\frac{1}{b^2}X^2>0.$$

Donc le premier membre de (δ'), positif pour $\frac{Y}{X} = 0$ et pour $\frac{Y}{X}$ infini, ne doit être annulé par aucune valeur du rapport $\frac{Y}{X}$; et il suffit d'exprimer que l'équation, du second degré par rapport à $\frac{Y}{X}$, obtenue en l'égalant à zéro, a ses racines imaginaires.

Il vient ainsi

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)^2 - \frac{4}{a^2 b^2} < 0,$$

ou bien, en développant le carré du trinome et donnant au résultat sa forme la plus symétrique,

$$(\delta'') \qquad \frac{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4}}{\frac{1}{b^2 c^2} + \frac{1}{c^2 a^2} + \frac{1}{a^2 b^2}} < 2.$$

9. **Stabilité de l'état naturel, dans l'éther vibrant.** — Dans tous les corps transparents connus, a^2, b^2, c^2 sont relativement peu différents, et le premier membre de cette inégalité (δ'') ne s'écarte guère de l'unité. Mais on voit qu'il ne pourrait pas dépasser la valeur 2, sans rendre le potentiel d'élasticité Φ susceptible de recevoir des valeurs négatives; et celles-ci se produiraient pour certaines valeurs du rapport des deux premières déformations (γ'), resté arbitraire malgré la condition (γ''). Or, alors, l'état naturel ou primitif de l'éther ne serait, généralement, plus stable dans ces corps : autrement dit, *il se pourrait que l'agitation y naquît spontanément* ou, du moins, s'y accrût à la suite d'ébranlements *infiniment petits,* pourvu que ceux-ci donnassent lieu aux valeurs négatives (de Φ) dont il s'agit.

En effet, traçons, autour de la région où nous supposons initialement produits de pareils ébranlements insensibles, une sphère de volume ϖ, assez étendue pour que le mouvement ne puisse atteindre sa surface qu'au bout d'un certain temps. Jusqu'à ce que ce temps soit écoulé, le travail extérieur $d\mathfrak{E}_e$ sur la sphère sera évidemment nul; et l'équation (γ) donnera simplement, dans l'étendue ϖ,

$$(\delta''') \quad \int_\varpi \frac{\rho}{2}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2}\right) d\varpi + \int_\varpi \frac{\rho}{2} \mathrm{U}\, d\varpi + \int_\varpi \mu\Phi\, d\varpi = \text{une const. C.}$$

L'énergie constante C sera, d'ailleurs, infiniment petite : elle se réduira, par exemple, à la valeur initiale donnée de la somme des deux premiers termes de (δ'''), quand les ébranlements consistent en de

petites vitesses, imprimées aux atomes de l'éther *dans leurs situations mêmes de repos ou d'état naturel.* Or, si ces vitesses sont choisies, comme on l'admet, de manière à amener les déformations rendant négatif le potentiel Φ, celui-ci s'éloignera de zéro en décroissant, et l'ensemble des deux premiers termes de (δ'''), dès lors tenu de grandir, ou de s'écarter de son minimum nul, impliquera généralement l'existence de vitesses $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ croissantes en valeur absolue. Ainsi, le mouvement pourrait *s'accélérer*, à partir des situations d'équilibre : circonstance évidemment inadmissible dans un corps ou milieu quelconque parvenu à un état *durable*.

On est donc conduit à admettre que la condition (δ'') se trouve réalisée dans tous les corps. Alors les petits ébranlements, quels qu'ils soient, écartant de son minimum zéro le troisième terme de l'équation (δ'''), l'astreignent à grandir, aux dépens de la somme des deux premiers termes; et cette somme, en décroissant, entraîne la réduction des vitesses $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$. Le mouvement est ainsi ralenti : il est même, vu l'extrême petitesse admise de C, complètement enrayé, avant que les déplacements ξ, η, ζ et, par suite, Φ aient pu devenir sensibles.

10. Application du théorème du viriel au mouvement vibratoire de l'éther des corps transparents. — Nous plaçant, pour simplifier le langage, dans l'esprit de la théorie de Fresnel, assimilons l'énergie potentielle des résistances de la matière pondérable, où figurent des carrés et produits de vitesses, à une demi-force vive, en l'appelant la demi-force vive *fictive* de l'éther; et considérons d'ailleurs le cas général d'un corps transparent hétérogène, où cette énergie actuelle fictive sera exprimée par le terme $\int_\varpi \frac{\rho}{2} \mathrm{U}\, d\varpi$, U y désignant le sextinome (α) (p. 277). Alors le théorème de Mécanique dit du *viriel*, appliqué convenablement, donnera, du moins pour les vibrations lumineuses les plus étudiées, qui se font par ondes approximativement planes dans des étendues restreintes, une relation simple entre l'énergie potentielle élastique et l'énergie actuelle *totale*, somme de la demi-force vive *réelle* $\int_\varpi \frac{\rho}{2}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2}\right) d\varpi$ et de la demi-force vive *fictive* $\int_\varpi \frac{\rho}{2} \mathrm{U}\, d\varpi$.

La formule de ce théorème s'obtient, quand il s'agit de mouve-

ments vibratoires, en multipliant les trois équations (6) du mouvement (p. 272), où nous faisons $D'=D$, $E'=E$, $F'=F$, par le demi-élément $\frac{1}{2}d\varpi$ du volume et par les déplacements respectifs ξ, η, ζ suivant les axes (plutôt que par les trois coordonnées complètes $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$), puis, en ajoutant les trois équations, et en intégrant enfin le résultat, dans tout le volume ϖ que limite une surface donnée σ. Observons que les produits ou les binomes $\xi\frac{d^2\xi}{dt^2}, \ldots$, $\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}, \ldots$, égalent identiquement

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\xi^2}{2}-\frac{d\xi^2}{dt^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^2.\eta\zeta}{dt^2}-2\frac{d\eta}{dt}\frac{d\zeta}{dt}, \quad \ldots;$$

et il viendra

$$(\varepsilon)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2}\int_\varpi \frac{\rho}{2}\left(\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{2}+\frac{A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2}{2}+D\eta\zeta+E\zeta\xi+F\xi\eta\right)d\varpi \\ &\qquad -\int_\varpi \frac{\rho}{2}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2}+\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right)d\varpi-\int_\varpi \frac{\rho}{2}U\,d\varpi \\ &\quad =\frac{1}{2}\int_\varpi \mu\left[\xi\left(\Delta_2\xi-\frac{d\theta}{dx}\right)+\eta\left(\Delta_2\eta-\frac{d\theta}{dy}\right)+\zeta\left(\Delta_2\zeta-\frac{d\theta}{dz}\right)\right]d\varpi. \end{aligned}\right.$$

Or le second membre est relié simplement, d'une part, à l'énergie élastique $\int_\varpi \mu\Phi\,d\varpi$, d'autre part, à l'expression, que nous appellerons $\mathfrak{E}'$,

$$(\varepsilon')\qquad \mathfrak{E}'=\frac{1}{2}\int_\sigma (p_x\xi+p_y\eta+p_z\zeta)\,d\sigma,$$

et qui serait, au signe près, la moitié du travail total des pressions actuelles $p_x\,d\sigma$, $p_y\,d\sigma$, $p_z\,d\sigma$ s'exerçant du dehors sur les divers éléments $d\sigma$ de la surface, si ces éléments $d\sigma$, sans qu'elles changeassent, revenaient à leurs situations d'état naturel, ou éprouvaient les déplacements $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$. En effet, après avoir substitué à p_x, p_y, p_z leurs valeurs (α'') (p. 279), transformons, dans $\mathfrak{E}'$, par la méthode suivie après la formule (α'''), les intégrales de surface en intégrales de volume. Il viendra immédiatement

$$\mathfrak{E}'=\text{le second membre de } (\varepsilon)+\int_\varpi \mu\Phi\,d\varpi.$$

Ajoutons donc $\int_\varpi \mu\Phi\,d\varpi$ aux deux membres de (ε); et nous aurons

l'équation cherchée du viriel :

$$(\varepsilon'') \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2}{dt^2} \int_{\varpi} \frac{\rho}{2} \left(\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2} + \frac{A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2}{2} + D\eta\zeta + E\zeta\xi + F\xi\eta \right) d\varpi \\ & - \int_{\varpi} \frac{\rho}{2} \left(\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2} \right) d\varpi - \int_{\varpi} \frac{\rho}{2} U \, d\varpi + \int_{\varpi} \mu \Phi \, d\varpi = \mathfrak{T}'. \end{aligned} \right.$$

11. Les ondes lumineuses conservent, en se propageant, leur demi-force vive totale. — Voyons ce que deviennent à la fois l'équation (γ) des forces vives et celle-ci, dans un éther resté dépourvu de sources lumineuses, ou régi par nos équations (6), après avoir été initialement ébranlé. Nous le supposons, de plus, assez étendu pour que, sur une surface limite σ entourant d'assez loin toute la partie agitée, les pressions extérieures p_x, p_y, p_z et les vitesses $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ soient nulles. Alors, d'une part, l'équation des forces vives devient (δ'''), ou signifie que *les deux énergies actuelle totale et potentielle élastique ont somme constante;* d'autre part, l'équation (ε''), où l'on a $\mathfrak{T}' = 0$, montre que *l'énergie actuelle totale excède l'énergie potentielle élastique* $\int_{\varpi} \mu \Phi \, d\varpi$, *de la quantité*

$$(\varepsilon''') \quad \frac{d^2}{dt^2} \int_{\varpi} \frac{\rho}{2} \left(\frac{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}{2} + \frac{A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2}{2} + D\eta\zeta + E\zeta\xi + F\xi\eta \right) d\varpi.$$

Cela posé, dans les phénomènes lumineux les plus simples, qui sont aussi les plus étudiés par les physiciens, le mouvement vibratoire se fait par ondes approximativement planes dans les étendues de dimensions comparables aux longueurs d'onde; et, d'ailleurs, ces ondes se trouvent assez peu dépendantes mutuellement, pour que celles qui sont, à l'époque t, dans une région restreinte quelconque, se comportent et se propagent à très peu près comme si les autres n'existaient pas. Or ces ondes planes partielles se déplacent avec une vitesse constante, *sans que leur aspect change sensiblement* dans l'intervalle de quelques périodes : et, pour elles, l'intégrale $\int_{\varpi}$ figurant dans (ε''') est à très peu près constante; car elle se compose, aux divers instants successifs, d'éléments sensiblement pareils relatifs à la tête et au corps de ces ondes. Il n'est peut-être pas toujours impossible, à la vérité, que certains déplacements constants ξ, η, ζ persistent quelque peu à l'arrière (là où le repos est comme rétabli), par suite d'un petit déplacement d'ensemble qu'y éprouverait le milieu élastique;

et, alors, la partie de l'intégrale $\int_{\varpi}$ ainsi relative aux espaces déjà balayés par les ondes serait proportionnelle au temps t, tandis que la partie concernant la tête et le corps des ondes aurait valeur constante. Mais on voit que l'expression (ε'''), dérivée *seconde* en t de cette intégrale, serait encore nulle [1]. Donc, dans chaque série considérée d'ondes et même, par suite, dans chaque onde élémentaire, l'énergie totale se partage, à très peu près, également entre l'énergie actuelle totale et l'énergie potentielle élastique. C'est dire que *l'énergie totale peut y être regardée partout comme le double de la demi-force vive tant réelle que fictive ;* et, dès lors, la conservation de l'énergie de chaque onde entraîne celle de sa demi-force vive (réelle ou fictive), même en tenant maintenant compte de la petite courbure de l'onde et de la variation qu'y éprouve, à la longue, l'*amplitude* des mouvements, suivant l'étendue, croissante ou décroissante, de la surface qu'elle couvre.

En dehors de l'hypothèse, ainsi examinée, d'ondes de faible courbure et se propageant (ou *courantes*), on conçoit divers cas où l'intégrale $\int_{\varpi}$ figurant dans (ε''') sera encore, sinon presque constante, du moins fonction de t ou sensiblement *linéaire,* ou *périodiquement oscillante* de part et d'autre d'une pareille fonction linéaire. Et, alors, les deux parties, actuelle totale et potentielle élastique, de l'énergie seront égales ou à tout instant, ou en moyenne. Tel sera, par exemple, le cas d'*ondes stationnaires,* analogues aux ondes sonores, à ventres et à nœuds *fixes,* des masses élastiques limitées, ou aux oscillations (*clapotis*) du liquide pesant d'un bassin. Tel sera encore celui, plus complexe, d'un système d'ondes *courantes,* mais en train de se réfléchir et de se réfracter à la surface de séparation de deux milieux, système qui comprend plusieurs parties, variables proportionnellement au temps t, dont l'une, la plus ancienne, se raccourcit, au profit des autres qui s'allongent.

On peut donc dire que les ondes conservent dans tous ces cas, au moins *en moyenne,* leur demi-force vive totale, en partie réelle et en partie fictive.

---

(1) Cette remarque, peu nécessaire ici, serait indispensable, en Hydrodynamique, dans la question de l'onde solitaire et des autres ondes *de translation;* car la masse liquide *reste* déplacée horizontalement d'une quantité *constante,* après le passage de ces ondes.



DEUXIÈME PARTIE.

CONSTITUTION D'UN PINCEAU DE LUMIÈRE, DANS UN MILIEU OU ISOTROPE, OU BIRÉFRINGENT.

---

12. Propagation d'un pinceau de lumière, venant de l'infini, dans un milieu homogène transparent : première approximation. — Avant d'aller plus loin, voyons si les équations (20) (p. 276) conduisent bien aux lois physiques approchées d'un *rayon lumineux*, dans le cas le plus simple. C'est le cas où le rayon, issu d'une source ou région d'ébranlement éloignée, progresse uniformément à travers un milieu *homogène*, suivant une ligne droite que l'on peut appeler son *axe*, et se trouve ainsi constitué par une série d'ondes, latéralement limitées, apportant successivement, le long de cet axe ou des droites parallèles qui en sont voisines, des déplacements ξ, η, ζ, invariables en chaque point de toute onde qu'on suit dans son mouvement. En outre, lorsque les phénomènes de diffraction sont négligeables, comme il arrive le plus souvent et comme nous le supposerons ici, la largeur du *pinceau* ou rayon lumineux, dans un sens transversal quelconque, comprend un assez grand nombre de fois la longueur d'onde pour que, sur deux parallèles à l'axe du rayon situées à une distance l'une de l'autre comparable à cette longueur d'onde, les mêmes successions rapides de déplacements ξ, η, ζ se produisent à très peu près.

Tels sont les caractères que nous devrons pouvoir déduire des équations (20), dans l'hypothèse d'un éloignement suffisant de la source lumineuse.

Et, d'abord, considérons l'éther du corps homogène proposé, aux grandes distances de cette source, sur une étendue de dimensions au moins comparables à une longueur d'onde, pour tâcher d'y construire les *surfaces d'onde*, lieux des atomes d'éther qui commencent au même instant à se mouvoir. Ces surfaces, si on les imagine tracées dans tout l'espace et pour des retards uniformément croissants, à partir du moment où les ébranlements ont débuté à l'intérieur de la source lumineuse, seront évidemment *fermées*, de très grands rayons (égaux ou inégaux) autour de la source, et, par suite, de très petite courbure,

enfin, par raison de continuité, parallèles entre elles et équidistantes, dans l'étendue restreinte à laquelle on se borne maintenant, et même sur toute la largeur de notre pinceau latéralement limité de lumière. D'ailleurs, tous les points d'une pareille étendue se trouvent (au moins assez loin de la source et dans un rayon comparable à la longueur d'onde) situés de même, à des écarts relatifs près négligeables quant à la distance et à l'orientation, par rapport à chaque partie de la source ou région des ébranlements; et, dès lors, la même suite de phénomènes devra, sensiblement, s'y observer. Autrement dit, si l'on appelle t_0 (fonction continue de x, y, z) l'époque, comptée à partir d'une origine des temps arbitraire, où les déplacements ξ, η, ζ commenceront à différer de zéro, et les ondes à passer, en un point donné quelconque (x, y, z), ξ, η, ζ seront, à très peu près, fonctions de la variable unique $t - t_0$, dans l'étendue restreinte dont il s'agit : et les surfaces d'onde $t_0 =$ const., lieux de points où les mouvements seront *synchrones,* s'y réduiront à des plans parallèles, équidistants, ou situés à des distances de l'origine uniformément croissantes, pour des valeurs, uniformément croissantes aussi, de t_0 ([1]).

13. **Réduction approchée d'un tel pinceau, dans toute étendue restreinte, à des systèmes d'ondes planes, où les vibrations sont polarisées rectilignement.** — Pour étudier les mouvements de l'éther dans une étendue ainsi restreinte, ou de dimensions ne comprenant qu'un nombre modéré de longueurs d'ondes, prenons-y l'origine des x, y, z, en un point où, par exemple, la première onde aura passé à l'époque $t = 0$; et appelons α, β, γ les angles faits, avec les x, y, z positifs, par la perpendiculaire commune aux *plans d'onde,* émanée de l'origine dans la direction vers laquelle les ondes progressent. Cette perpendiculaire aura évidemment, jusqu'au plan d'onde mené par (x, y, z), la longueur $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$. Et, comme chaque onde, en venant successivement coïncider avec les divers plans, emploie un temps t_0 proportionnel à cette longueur, qui mesure la distance de l'onde à l'origine, le rapport *constant*

$$\frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{t_0}$$

([1]) On verra d'ailleurs que ces surfaces d'onde, à des distances suffisantes de la région des ébranlements, seront planes dans des étendues beaucoup plus grandes que celles où aura généralement lieu la quasi communauté des déplacements ξ, η, ζ comptés à partir des époques respectives t_0; car celle-ci ne se vérifiera qu'à une première approximation, tandis que la forme plane, le parallélisme et l'équidistance des surfaces d'onde subsisteront même à une deuxième approximation.

sera la *vitesse de propagation* des ondes *planes*, ainsi considérées, *à vibrations pareilles sur toute leur étendue*.

Appelons ω cette vitesse constante de propagation. Alors le temps t_0 employé par la première onde à venir jusqu'en (x, y, z) aura l'expression $\dfrac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\omega}$. Si donc nous posons, pour abréger,

$$(21) \qquad l = \frac{\cos\alpha}{\omega}, \qquad m = \frac{\cos\beta}{\omega}, \qquad n = \frac{\cos\gamma}{\omega},$$

les déplacements ξ, η, ζ seront, au degré d'approximation auquel on se borne ici, fonctions de la variable unique

$$(22) \qquad t - t_0 = t - lx - my - nz.$$

Nous pourrons enfin, en nous appuyant sur l'observation, attribuer à notre pinceau limité de lumière un dernier caractère ([1]). Dans un milieu *biréfringent*, c'est-à-dire non isotrope, ce pinceau sera rectilignement *polarisé*. Dans un milieu isotrope, il pourra seulement l'être; mais, quand il ne le sera pas, il se composera du moins de pinceaux de lumière rectilignement polarisés. En d'autres termes, et si l'on se borne à des pinceaux ainsi réduits, les déplacements ξ, η, ζ se feront, à de petits écarts relatifs près, dans nos ondes planes, parallèlement à une même droite de l'espace.

Désignons par l', m', n' les cosinus directeurs de cette droite, et par δ le déplacement lui-même, dans sa partie principale ou seule perceptible ([2]). Nous devrons donc pouvoir poser

$$\xi = l'\delta, \qquad \eta = m'\delta, \qquad \zeta = n'\delta.$$

En résumé, à une première approximation, l'on aura

$$(23) \quad \xi = l'\delta, \quad \eta = m'\delta, \quad \zeta = n'\delta, \quad \text{avec } \delta = \text{fonct. de } (t - lx - my - nz).$$

Si l'on appelle δ', δ'' les deux dérivées première et seconde de δ par

---

([1]) Ce recours à l'observation n'est pas indispensable, quand on ne craint pas d'allonger un peu la démonstration. *Voir*, à ce sujet, la note des pages 293 à 298 ci-après.

([2]) Perceptible quant à ses effets *généraux* sur nos organes, c'est-à-dire quant à ses effets produits par les actions simultanées et concordantes d'une multitude d'atomes d'éther, vu que l'action de quelques atomes serait toujours incapable d'être sentie.



rapport à t, les trois dérivées premières de δ en x, y, z seront les produits de δ' par $-l, -m, -n$; et la dilatation cubique θ, en particulier, vaudra $-(ll'+mm'+nn')\delta'$. Puis une nouvelle différentiation en x, y, z fera substituer au facteur δ', dans ces résultats, le produit de δ'' par $-l$, ou par $-m$, ou par $-n$.

Les équations indéfinies (20) (p. 276) auront donc, à tous leurs termes, le facteur commun δ''; et, après sa suppression, elles deviendront :

$$(24)\quad \begin{cases} \left(l^2+m^2+n^2-\frac{1}{a^2}\right) l' - l(ll'+mm'+nn') = 0, \\ \left(l^2+m^2+n^2-\frac{1}{b^2}\right) m' - m(ll'+mm'+nn') = 0, \\ \left(l^2+m^2+n^2-\frac{1}{c^2}\right) n' - n(ll'+mm'+nn') = 0. \end{cases}$$

Dans le cas général où a, b, c sont inégaux et où les vibrations se font autrement que suivant le sens d'un des axes, le trinome

$$ll'+mm'+nn'$$

diffère de zéro : car, s'il était nul sans que deux des cosinus l', m', n' s'annulassent, ou avec m' et n', par exemple, différents de zéro, on devrait avoir tout à la fois

$$l^2+m^2+n^2-\frac{1}{b^2}=0, \qquad l^2+m^2+n^2-\frac{1}{c^2}=0;$$

ce qui exigerait l'égalité $b^2=c^2$. Ainsi les vibrations ne sont pas transversales, ou comprises dans les plans des ondes.

14. Relations entre la direction des ondes planes, leur vitesse de propagation et l'orientation des vibrations. — Cela posé, égalons les trois valeurs que les équations (24), après élimination de l, m, n par (21), donnent pour le trinome $l'\cos\alpha + m'\cos\beta + n'\cos\gamma$, cosinus de l'angle de la vibration avec la normale à l'onde. Ces trois valeurs sont les rapports

$$(25)\qquad \frac{l'}{\left(-\frac{a^2\cos\alpha}{\omega^2-a^2}\right)},\quad \frac{m'}{\left(-\frac{b^2\cos\beta}{\omega^2-b^2}\right)},\quad \frac{n'}{\left(-\frac{c^2\cos\gamma}{\omega^2-c^2}\right)},$$

qui, multipliés haut et bas par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, puis ajoutés terme à terme, en donnent une quatrième,

$$(26)\qquad \frac{l'\cos\alpha+m'\cos\beta+n'\cos\gamma}{-\left(\frac{a^2\cos^2\alpha}{\omega^2-a^2}+\frac{b^2\cos^2\beta}{\omega^2-b^2}+\frac{c^2\cos^2\gamma}{\omega^2-c^2}\right)}.$$

L'égalité de cette quatrième valeur à son numérateur montre que son dénominateur vaut l'unité.

Donc, les trois relations (24) reviennent à poser : 1° d'une part, pour déterminer la vitesse ω de propagation des ondes planes suivant leur normale, quand la direction de celle-ci est définie par ses angles α, β, γ avec les axes, l'équation

$$(27)\qquad \frac{a^2\cos^2\alpha}{\omega^2-a^2}+\frac{b^2\cos^2\beta}{\omega^2-b^2}+\frac{c^2\cos^2\gamma}{\omega^2-c^2}+1=0;$$

2° d'autre part, pour déterminer ensuite la direction (l', m', n') des vibrations, c'est-à-dire les rapports mutuels des cosinus directeurs l', m', n', la double proportion

$$(28)\qquad \frac{l'}{\frac{a^2\cos\alpha}{\omega^2-a^2}}=\frac{m'}{\frac{b^2\cos\beta}{\omega^2-b^2}}=\frac{n'}{\frac{c^2\cos\gamma}{\omega^2-c^2}}.$$

Remplaçons, dans (27), le quatrième terme, 1, par le trinome $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$; puis réduisons chaque terme de ce trinome avec le terme correspondant du trinome qui précède. Et supprimons enfin le facteur commun ω^2 : ce qui revient à négliger dans l'équation en ω^2 une racine *nulle*, correspondant, d'après (28), à une solution où l', m', n' seraient entre eux comme $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, c'est-à-dire à des vibrations normales aux ondes, ou *longitudinales*. L'équation en ω^2 sera, dès lors, celle qu'a obtenue Fresnel,

$$(29)\qquad \frac{\cos^2\alpha}{\omega^2-a^2}+\frac{\cos^2\beta}{\omega^2-b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{\omega^2-c^2}=0,$$

et qui, pour chaque direction de la normale aux ondes planes, fournit, comme on sait, deux racines ω^2 positives.

Seulement, Fresnel a admis, pour la direction (l', m', n') des vibrations, non pas celle que définissent les trois rapports égaux (28), mais sa projection sur le plan des ondes, laquelle aurait des cosinus directeurs l'_1, m'_1, n'_1 donnés par la double proportion

$$(30)\qquad \frac{l'_1}{\frac{\cos\alpha}{\omega^2-a^2}}=\frac{m'_1}{\frac{\cos\beta}{\omega^2-b^2}}=\frac{n'_1}{\frac{\cos\gamma}{\omega^2-c^2}}.$$

En effet, une même direction (λ, μ, ν) dans le plan d'une onde, ou vérifiant la condition

$$(31)\qquad \lambda\cos\alpha+\mu\cos\beta+\nu\cos\gamma=0,$$

est perpendiculaire soit à (l', m', n'), soit à (l'_1, m'_1, n'_1), et donne, tout à la fois :

$$(32) \qquad \frac{a^2\cos\alpha}{\omega^2-a^2}\lambda+\frac{b^2\cos\beta}{\omega^2-b^2}\mu+\frac{c^2\cos\gamma}{\omega^2-c^2}\nu=0,$$

$$(33) \qquad \frac{\cos\alpha}{\omega^2-a^2}\lambda+\frac{\cos\beta}{\omega^2-b^2}\mu+\frac{\cos\gamma}{\omega^2-c^2}\nu=0.$$

Il suffit, pour le reconnaître, d'ajouter terme à terme les relations (31) et (32) : on trouve justement, après suppression d'un facteur commun ω^2, la relation (33). D'ailleurs la direction (l'_1, m'_1, n'_1) est bien dans le plan de l'onde ou vérifie la condition

$$l'_1\cos\alpha+m'_1\cos\beta+n'_1\cos\gamma=0;$$

car les dénominateurs des rapports (30), multipliés respectivement par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et ajoutés, donnent zéro en vertu de (29).

Donc un même plan, mené suivant une normale aux ondes, contient la vibration rigoureusement transversale supposée par Fresnel et celle que nous obtenons ici.

Observons, en terminant, qu'on aurait eu presque sans calculs l'équation (29) de Fresnel, la plus importante peut-être de la théorie actuelle, si l'on avait porté les valeurs (23) de ξ, η, ζ dans la relation capitale (20 *bis*) (p. 277) qu'impliquent les équations (20) du mouvement. Cette relation, en effet, par la suppression du facteur $-\delta'$, serait devenue

$$(33\ bis) \qquad \frac{ll'}{a^2}+\frac{mm'}{b^2}+\frac{nn'}{c^2}=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{l'\cos\alpha}{a^2}+\frac{m'\cos\beta}{b^2}+\frac{n'\cos\gamma}{c^2}=0;$$

et l'égalité des rapports (28), en permettant d'y remplacer l', m', n' par les dénominateurs de ces rapports, l'aurait changée de suite en (29) [1].

---

[1] **Lois générales des ondes planes latéralement illimitées.** — Dans un cours détaillé sur la théorie mécanique de la lumière, la question des ondes planes, d'amplitude uniforme sur toute l'étendue indéfinie de leurs plans, mériterait d'être étudiée à part, ou indépendamment de l'application approchée qu'on en fait ici aux pinceaux lumineux limités latéralement.

Pour y fixer les idées *ou concevoir le plus simplement possible la génération de ces ondes*, on supposera coupé, suivant un plan quelconque passant par l'origine, le milieu transparent donné, homogène, mais hétérotrope. Alors, ayant

15. Surface courbe dite « onde de Fresnel » : ses rapports avec le plan de l'onde et avec la direction des vibrations. — Construisons une surface, tangente, quelle que soit l'orientation de nos plans

---

enlevé sa matière située d'un côté de ce plan, on tirera à partir de l'origine, vers l'intérieur de la matière restante, la perpendiculaire au plan limite, perpendiculaire dont nous appellerons α, β, γ les angles avec les x, y, z positifs, et p la longueur, $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$, jusqu'à la rencontre du plan mené, par un point quelconque (x, y, z), parallèlement au plan limite. Enfin, imaginant d'abord en repos toutes les couches de l'éther du corps, depuis une distance p (au plan limite) nulle, jusqu'à une distance p infinie, on fera du plan limite, à partir de l'époque $t = 0$, une région d'ébranlement, soumise à des déplacements ξ, η, ζ communs, mais, d'ailleurs, fonctions arbitraires du temps t. Ce seront, par exemple, les déplacements qu'imprimeront à la couche superficielle $p = 0$, en l'atteignant, soit des ondes planes extérieures, de même direction qu'elle, soit les chocs, perpendiculaires ou obliques, d'une masse étrangère contiguë, animée de petites translations en sens divers, soit encore les transformations chimiques d'une matière recouvrant la superficie, *supposées* se faire pareillement sur tout le plan, etc.

Comme tous les points (x, y, z) d'une couche quelconque de l'éther du corps, définie par sa distance primitive p à la surface, se trouvent alors dans les mêmes conditions, sous les rapports tant de la constitution du milieu et de sa surface, que des ébranlements donnés, les mêmes déplacements s'y produiront; de sorte que ξ, η, ζ seront fonctions seulement de t et de p. Or la variable p peut être, si l'on veut, remplacée par une autre proportionnelle, $t_0 = \frac{p}{\omega}$, expression de la distance p mesurée au moyen d'une unité de longueur spéciale, ω, dont on disposera de manière à simplifier le plus possible les formules ultérieures. Ainsi, appelant l, m, n les trois quotients $\frac{\cos(\alpha, \beta, \gamma)}{\omega}$, l'on aura des déplacements ξ, η, ζ fonctions seulement du temps t et de l'*abscisse* $t_0 = lx + my + nz$; ce qui donnera, comme formules symboliques de différentiation en x, y, z et comme expression analogue du paramètre différentiel Δ_2,

$$\frac{d}{d(x, y, z)} = (l, m, n)\frac{d}{dt_0}, \qquad \Delta_2 = (l^2 + m^2 + n^2)\frac{d^2}{dt_0^2}.$$

Enfin, on réduira le phénomène à des mouvements aussi simples que possible, en se demandant s'il n'existerait pas, pour les déplacements (ξ, η, ζ) de la surface, certaines directions, à cosinus directeurs appelés ici (l', m', n'), qui, convenablement déterminées en fonction de la direction même des ondes et de la contexture du milieu, auraient le privilège de se conserver à l'intérieur, ou de donner, dans tout le corps transparent, des vibrations *rectilignes*, *polarisées* suivant une orientation *commune*. Car, s'il y avait *trois* directions ainsi privilégiées, une décomposition, suivant *ces* trois directions, et par la règle du parallélépipède des forces, des vibrations superficielles effectives, données à chaque époque t, permettrait de réduire le mouvement, même dans l'intérieur, à des systèmes d'ondes planes constituées par ces vibrations polarisées rectilignement,

d'onde, à l'onde partie de l'origine depuis l'unité de temps ou qui a pour équation $t_0 = 1$, c'est-à-dire

(34) $$lx + my + nz = 1.$$

---

vu la forme linéaire des équations du mouvement et la possibilité de *superposer* leurs intégrales particulières.

Donc, appelant δ, en (x, y, z), le déplacement rectiligne (positif ou négatif) à l'époque t, dans un de ces systèmes d'ondes, on aura la triple formule

$$(\xi, \eta, \zeta) = (l', m', n')\,\delta;$$

d'où résulte en particulier, pour la dilatation cubique θ, l'expression

$$(ll' + mm' + nn')\frac{d\delta}{dt_0}.$$

Les trois équations aux dérivées partielles du mouvement, qu'on peut écrire, sous forme condensée,

(a) $$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\xi}{a^2}, \frac{\eta}{b^2}, \frac{\zeta}{c^2}\right) = \Delta_2(\xi, \eta, \zeta) - \frac{d\theta}{d(x, y, z)},$$

deviennent alors la formule triple

$$\left(\frac{l'}{a^2}, \frac{m'}{b^2}, \frac{n'}{c^2}\right)\frac{d^2\delta}{dt^2} = [(l^2 + m^2 + n^2)(l', m', n') - (l, m, n)(ll' + mm' + nn')]\frac{d^2\delta}{dt_0^2},$$

revenant à

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{(l^2 + m^2 + n^2)(l', m', n') - (l, m, n)(ll' + mm' + nn')}{\left(\frac{l'}{a^2}, \frac{m'}{b^2}, \frac{n'}{c^2}\right)}\frac{d^2\delta}{dt_0^2}.$$

Or les trois rapports, dès lors égaux (comme exprimant celui des deux dérivées secondes directes de δ),

$$\frac{(l^2 + m^2 + n^2)\,l' - l(ll' + mm' + nn')}{\frac{l'}{a^2}},$$

$$\frac{(l^2 + m^2 + n^2)\,m' - m(ll' + mm' + nn')}{\frac{m'}{b^2}},$$

$$\frac{(l^2 + m^2 + n^2)\,n' - n(ll' + mm' + nn')}{\frac{n'}{c^2}},$$

donnent, multipliés haut et bas par l', m', n' et ajoutés terme à terme, le nouveau rapport égal

$$\frac{(l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2) - (ll' + mm' + nn')^2}{\frac{l'^2}{a^2} + \frac{m'^2}{b^2} + \frac{n'^2}{c^2}},$$

Cette surface courbe sera l'enveloppe du plan (34), rendu mobile par la variation de l, m, n.

Le point (x, y, z) commun à l'enveloppe et à l'enveloppée (34)

---

identique à

$$\frac{(mn' - nm')^2 + (nl' - ln')^2 + (lm' - ml')^2}{\frac{l'^2}{a^2} + \frac{m'^2}{b^2} + \frac{n'^2}{c^2}},$$

et essentiellement positif.

D'ailleurs, les trois mêmes rapports, à numérateurs homogènes en l, m, n, varient en raison inverse de ω^2 quand ω change; et on les rend le plus simples possible en prenant la constante positive ω telle qu'elle fasse égale à 1 leur valeur positive commune.

On aura donc, pour déterminer ω et les rapports mutuels de l', m', n', les trois équations

$$(b)\quad \left\{ \begin{aligned} \left(l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{a^2}\right)\frac{l'}{l} &= \left(l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{b^2}\right)\frac{m'}{m} \\ &= \left(l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{c^2}\right)\frac{n'}{n} = ll' + mm' + nn'. \end{aligned} \right.$$

De plus, l'équation aux dérivées partielles en δ, ainsi réduite au maximum de simplicité, est

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} - \frac{d^2\delta}{dt_0^2} = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\varphi}{dt_0} = 0,$$

si l'on pose, pour un instant,

$$(c)\qquad \varphi = \frac{d\delta}{dt} + \frac{d\delta}{dt_0}.$$

Il en résulte immédiatement pour φ une expression de la forme $F(t + t_0)$, avec la condition $F(t + t_0) = 0$ de repos pour t *négatif* quelconque, quelle que soit la valeur *positive* de l'abscisse t_0. La fonction F est donc nulle identiquement; d'où il suit que $\varphi = 0$. Or, alors, l'équation (c) donne

$$\delta = f(t - t_0),$$

avec f fonction arbitraire, sauf pour les valeurs négatives de sa variable, qui l'annulent à raison encore de l'état primitif de repos. Cette formule montre que t_0, c'est-à-dire $\frac{p}{\omega}$, exprime le *retard* éprouvé par chaque déplacement, $f(t)$, de la surface $p = 0$, à se produire dans la couche de profondeur p, ou le temps employé par ce déplacement à se propager jusqu'à la profondeur p sous la surface. Et, par suite, ω est la *célérité* ou *vitesse de propagation des ondes, suivant le sens normal à leur plan.*

Il reste à déduire des équations (b) cette vitesse, ainsi que l'orientation (l', m', n') de la vibration. Les équations (b), où l, m, n désignent les trois

vérifiera, comme on sait, l'équation aux différentielles totales

$$x\,dl + y\,dm + z\,dn = 0, \tag{35}$$

où, l, m, n satisfaisant à l'*équation* que donne l'élimination des rap-

---

quotients $\frac{\cos(\alpha, \beta, \gamma)}{\omega}$, reviennent à poser

$$\frac{l'}{\frac{a^2\cos\alpha}{a^2-\omega^2}} = \frac{m'}{\frac{b^2\cos\beta}{b^2-\omega^2}} = \frac{n'}{\frac{c^2\cos\gamma}{c^2-\omega^2}} = l'\cos\alpha + m'\cos\beta + n'\cos\gamma. \tag{d}$$

On tient compte du quatrième membre de cette triple relation, en l'égalant au rapport qui résulte des trois premiers, multipliés *haut et bas*, respectivement, par $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$ et ajoutés terme à terme. Il vient ainsi, pour déterminer ω^2, l'équation (27) du texte (p. 292), donnant, d'une part, comme on a vu, la racine $\omega^2 = 0$, qui correspond à des vibrations *longitudinales* (perpendiculaires au plan des ondes), et, d'autre part, les deux racines, ω'^2, ω''^2, de l'équation (29).

Celles-ci sont réelles, positives et comprises, l'une, entre b^2 et a^2, l'autre, entre b^2 et c^2, si l'on a, par exemple, dénommé les axes de manière à avoir $a^2 > b^2 > c^2$. En effet, l'équation (29) peut s'écrire

$$(\omega^2 - b^2)(\omega^2 - c^2)\cos^2\alpha + (\omega^2 - c^2)(\omega^2 - a^2)\cos^2\beta + (\omega^2 - a^2)(\omega^2 - b^2)\cos^2\gamma = 0.$$

Or, si l'on appelle $F(\omega^2)$ le premier membre, polynome du second degré en ω^2, on voit que $F(a^2)$, $F(b^2)$, $F(c^2)$ sont simplement

$$(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)\cos^2\alpha,\quad (b^2 - c^2)(b^2 - a^2)\cos^2\beta,\quad (c^2 - a^2)(c^2 - b^2)\cos^2\gamma,$$

et ont les signes respectifs +, — et +. Donc les *deux* racines, ω'^2, ω''^2, de l'équation (29) en ω^2, sont bien réelles, positives et comprises, entre a^2 et c^2, de part et d'autre de b^2.

Les formules (30) du texte donnent, pour la trace, dans le plan des ondes, des deux plans respectifs des vibrations correspondantes, ou plans menés suivant ces vibrations normalement aux ondes, des cosinus directeurs l'_1, m'_1, n'_1 proportionnels à $\frac{\cos\alpha}{\omega^2 - a^2}$, $\frac{\cos\beta}{\omega^2 - b^2}$, $\frac{\cos\gamma}{\omega^2 - c^2}$; et l'on reconnaît aisément que ces plans de vibration se trouvent, dans les deux systèmes, mutuellement perpendiculaires, ou que l'on a la formule de rectangularité

$$\frac{\cos\alpha}{\omega'^2 - a^2}\,\frac{\cos\alpha}{\omega''^2 - a^2} + \frac{\cos\beta}{\omega'^2 - b^2}\,\frac{\cos\beta}{\omega''^2 - b^2} + \frac{\cos\gamma}{\omega'^2 - c^2}\,\frac{\cos\gamma}{\omega''^2 - c^2} = 0.$$

Il suffit, pour le voir, de retrancher *terme à terme*, l'une de l'autre, les deux égalités

$$\frac{\cos^2\alpha}{\omega'^2 - a^2} + \frac{\cos^2\beta}{\omega'^2 - b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{\omega'^2 - c^2} = 0,$$

$$\frac{\cos^2\alpha}{\omega''^2 - a^2} + \frac{\cos^2\beta}{\omega''^2 - b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{\omega''^2 - c^2} = 0,$$

ports mutuels de l', m', n' entre les trois relations fondamentales (24), dl, dm, dn se trouvent reliés par la différentielle de cette équation.

L'équation en l, m, n n'est autre, au fond, que l'équation (27) en ω, où il suffirait, d'après (21), de remplacer $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ par $l\omega$, $m\omega$, $n\omega$, puis, finalement, $\frac{1}{\omega^2}$ par $l^2+m^2+n^2$. Mais il est plus simple, au lieu de la différentier elle-même, de considérer les équations (24), dans lesquelles elle se trouve impliquée, et de les différentier complètement. Il vient

$$(36)\quad \begin{cases} \left(l^2+m^2+n^2-\frac{1}{a^2}\right)dl'-l(l\,dl'+m\,dm'+n\,dn') \\ \qquad +l'd(l^2+m^2+n^2)-(l'd.l^2+m'd.lm+n'd.ln)=0, \\ \left(l^2+m^2+n^2-\frac{1}{b^2}\right)dm'-\ldots=0, \\ \left(l^2+m^2+n^2-\frac{1}{c^2}\right)dn'-\ldots=0. \end{cases}$$

Multiplions celles-ci par l', m', n'; puis ajoutons. Les coefficients totaux de dl', dm', dn' seront justement les trois premiers membres, nuls, des équations (24) elles-mêmes; et nous aurons la formule simple, *d'où sont éliminés* a, b, c,

$$(37)\quad \begin{cases} (l'^2+m'^2+n'^2)\,d(l^2+m^2+n^2) \\ \quad -(l'^2d.l^2+m'^2d.m^2+n'^2d.n^2+2m'n'd.mn+2n'l'd.nl+2l'm'd.lm)=0. \end{cases}$$

Il ne reste plus, après avoir remplacé $l'^2+m'^2+n'^2$ par l'unité, qu'à y développer $d.l^2$, $d.m^2$, ...; et, en divisant par 2, l'on aura

$$(38)\quad \begin{cases} [l-l'(ll'+mm'+nn')]\,dl+[m-m'(ll'+mm'+nn')]\,dm \\ \qquad\qquad +[n-n'(ll'+mm'+nn')]\,dn=0. \end{cases}$$

---

et de supprimer, du résultat, le facteur commun $\omega''^2-\omega'^2$, différent de zéro.

Les trois directions privilégiées, pour l'orientation du mouvement de l'éther dans tout le corps, suivant lesquelles il s'agissait de décomposer les déplacements communs imprimés du dehors à la couche superficielle $p=0$, existent donc. Elles permettent, par suite, de résoudre, à son entrée dans le corps, le système quelconque des ondes planes extérieures qui viennent ébranler sa surface, ou des impulsions partout les mêmes qu'on lui imprime, en trois systèmes, distincts, d'ondes planes à vibrations rectilignes orientées suivant ces directions mêmes, et dont chacun se propage indépendamment des deux autres. Comme *l'un d'eux, à mouvements longitudinaux, reste confiné dans la couche superficielle* par sa célérité ω de propagation *nulle*, l'on n'observera dans l'intérieur que les deux autres systèmes, à vibrations polarisées dans deux plans rectangulaires et où, vu la faible inégalité relative des trois constantes spécifiques a^2, b^2, c^2, le mouvement sera *quasi transversal*.

Substituons à l, m, n les cosinus directeurs proportionnels $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; et, d'ailleurs, appelons ε l'angle (ordinairement très petit) de la vibration avec le plan de l'onde, de manière à poser

$$(39)\qquad l'\cos\alpha + m'\cos\beta + n'\cos\gamma = \sin\varepsilon.$$

Il viendra, sous sa forme la plus simple possible, la relation cherchée en dl, dm, dn :

$$(40)\quad (\cos\alpha - l'\sin\varepsilon)\,dl + (\cos\beta - m'\sin\varepsilon)\,dm + (\cos\gamma - n'\sin\varepsilon)\,dn = 0.$$

Sa comparaison à (35) montre, vu l'indépendance du rapport de deux des différentielles dl, dm, dn, que l'on doit avoir la multiple proportion

$$(41)\quad \frac{x}{\cos\alpha - l'\sin\varepsilon} = \frac{y}{\cos\beta - m'\sin\varepsilon} = \frac{z}{\cos\gamma - n'\sin\varepsilon} = \frac{\omega}{\cos^2\varepsilon},$$

le quatrième rapport égal résultant, vu (34), (21) et (39), de l'addition (terme à terme) des trois premiers, respectivement multipliés, haut et bas, par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Ces équations feront connaître les coordonnées extrêmes, x, y, z, de la droite $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ joignant l'origine au point (x, y, z) de contact du plan d'onde (34) avec son enveloppe; et elles permettront de construire celle-ci par points. La droite r sera évidemment un *rayon* de l'enveloppe, en attendant que nous y reconnaissions *l'axe même de notre rayon lumineux*.

Si l'on appelle de nouveau λ, μ, ν les cosinus directeurs de la droite du plan de l'onde qui est perpendiculaire à la vibration, ou qui donne, tout à la fois,

$$(42)\qquad \lambda\cos\alpha + \mu\cos\beta + \nu\cos\gamma = 0, \qquad \lambda l' + \mu m' + \nu n' = 0,$$

les trois premiers rapports égaux (41), ajoutés terme à terme après multiplication de leurs termes respectifs par λ, μ, ν, donneront aussi

$$(43)\qquad \lambda x + \mu y + \nu z = 0;$$

et il y aura également perpendicularité du rayon à la même droite du plan d'onde. C'est dire que les deux projections, sur le plan de l'onde, du rayon et de la vibration ne sont qu'une seule et même droite, savoir, celle suivant laquelle se ferait la vibration d'après Fresnel.

Les trois premiers rapports égaux (41), ajoutés après avoir été multipliés haut et bas par l', m', n', donnent encore, vu (39),

$$(44)\qquad l'x + m'y + n'z = 0.$$

Donc, *la direction des vibrations est celle que supposait Fresnel, déviée seulement du petit angle* ε *et rendue ainsi perpendiculaire au rayon, dans le plan qu'elle détermine avec celui-ci et avec la normale à l'onde* ([1]).

Par suite, l'angle ε de la direction vraie de la vibration et de celle que lui attribue Fresnel est l'égal ou le supplémentaire de l'angle que font, dans son plan, les deux perpendiculaires respectives à ses côtés, émanées de l'origine, savoir, le rayon r, et la normale

$$\omega = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \tag{45}$$

au plan de l'onde. Or, dans le triangle rectangle dont ces deux droites r, ω sont deux côtés, l'angle compris a pour cosinus $\frac{\omega}{r}$, et le carré de son sinus, c'est-à-dire $\sin^2\varepsilon$, a, par suite, la formule

$$(l'\cos\alpha + m'\cos\beta + n'\cos\gamma)^2 = \sin^2\varepsilon = \frac{r^2 - \omega^2}{r^2}. \tag{46}$$

16. Équation de l'onde de Fresnel. — Cela posé, il est aisé d'éliminer non seulement l', m', n', mais aussi $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et ω, entre les formules précédentes, de manière à obtenir simplement en x, y, z l'équation de l'enveloppe des plans d'onde (34) ou (45). Comme les trois rapports (25) (p. 291) expriment $\sin\varepsilon$, leur égalité à $\sin\varepsilon$ donne

$$l' = -\frac{a^2\cos\alpha}{\omega^2 - a^2}\sin\varepsilon, \quad m' = -\frac{b^2\cos\beta}{\omega^2 - b^2}\sin\varepsilon, \quad n' = -\frac{c^2\cos\gamma}{\omega^2 - c^2}\sin\varepsilon; \tag{47}$$

et ces valeurs de l', m', n', portées dans la triple proportion (41), donnent à leur tour, en égalant chacun des trois premiers rapports au quatrième, après substitution de $\frac{r^2 - \omega^2}{r^2}$ à $\sin^2\varepsilon$ et de $\frac{\omega^2}{r^2}$ à $\cos^2\varepsilon$:

$$\frac{x}{r^2 - a^2} = \frac{\omega\cos\alpha}{\omega^2 - a^2}, \quad \frac{y}{r^2 - b^2} = \frac{\omega\cos\beta}{\omega^2 - b^2}, \quad \frac{z}{r^2 - c^2} = \frac{\omega\cos\gamma}{\omega^2 - c^2}. \tag{48}$$

Multiplions celles-ci par x, y, z et ajoutons. Il vient

$$\frac{x^2}{r^2 - a^2} + \frac{y^2}{r^2 - b^2} + \frac{z^2}{r^2 - c^2} = \omega\left(\frac{x\cos\alpha}{\omega^2 - a^2} + \frac{y\cos\beta}{\omega^2 - b^2} + \frac{z\cos\gamma}{\omega^2 - c^2}\right). \tag{49}$$

([1]) M. Sarrau paraît avoir remarqué le premier (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XIII, p. 95; 1868) que la vibration se fait normalement au rayon, quand les équations du mouvement ont la forme (20).

Mais les équations (48), résolues par rapport à x, y, z, deviennent, identiquement :

$$(50)\quad \begin{cases} x = \omega\cos\alpha + \omega(r^2 - \omega^2)\dfrac{\cos\alpha}{\omega^2 - a^2}, \\ y = \omega\cos\beta + \omega(r^2 - \omega^2)\dfrac{\cos\beta}{\omega^2 - b^2}, \\ z = \omega\cos\gamma + \omega(r^2 - \omega^2)\dfrac{\cos\gamma}{\omega^2 - c^2}. \end{cases}$$

Or celles-ci, multipliées respectivement par $\dfrac{\omega\cos\alpha}{\omega^2 - a^2}$, $\dfrac{\omega\cos\beta}{\omega^2 - b^2}$, $\dfrac{\omega\cos\gamma}{\omega^2 - c^2}$ et ajoutées, donnent, vu (29),

$$(51)\quad \begin{cases} \omega\left(\dfrac{x\cos\alpha}{\omega^2 - a^2} + \dfrac{y\cos\beta}{\omega^2 - b^2} + \dfrac{z\cos\gamma}{\omega^2 - c^2}\right) \\ \quad = \omega^2(r^2 - \omega^2)\left[\left(\dfrac{\cos\alpha}{\omega^2 - a^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos\beta}{\omega^2 - b^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos\gamma}{\omega^2 - c^2}\right)^2\right]. \end{cases}$$

Au contraire, élevées simplement au carré et ajoutées, elles donnent, vu toujours (29), et en retranchant ω^2 des deux membres du résultat, pour diviser finalement par $r^2 - \omega^2$,

$$(52)\quad 1 = \omega^2(r^2 - \omega^2)\left[\left(\frac{\cos\alpha}{\omega^2 - a^2}\right)^2 + \left(\frac{\cos\beta}{\omega^2 - b^2}\right)^2 + \left(\frac{\cos\gamma}{\omega^2 - c^2}\right)^2\right].$$

La comparaison des équations (51) et (52) montre immédiatement que le second membre de (49) vaut l'unité; en sorte que cette relation (49) devient l'équation cherchée de l'enveloppe :

$$(53)\quad \frac{x^2}{r^2 - a^2} + \frac{y^2}{r^2 - b^2} + \frac{z^2}{r^2 - c^2} = 1, \qquad \text{où} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

On y reconnaît bien l'équation de l'*onde courbe de Fresnel*, fournissant, par ses plans tangents, toutes les ondes planes parties de l'origine depuis une unité de temps.

17. Deuxième approximation du calcul d'un pinceau de lumière parallèle : éléments qu'on peut y supposer constants. — Nous avons supposé jusqu'ici non seulement planes et parallèles les surfaces d'onde, et constante l'orientation des vibrations, mais, aussi, fonctions seulement de $t - t_0$, ou plutôt de $t - lx - my - nz$, les déplacements ξ, η, ζ. Il est temps de tenir compte de la lente variation de ceux-ci aux divers points d'une même onde censée suivie dans sa pro-

pagation, c'est-à-dire de leur variation avec x, y, z, quand t croît ou non, mais que la différence $t - lx - my - nz$ se maintient constante.

Notre première surface d'onde, sur laquelle $t_0 = 0$, sera prise sensiblement plane, dans une étendue beaucoup plus grande en tous sens que celle où les déplacements ξ, η, ζ qui s'y produisent sont uniformes, savoir, dans toute l'étendue transversale du pinceau : c'est justement ce qui distinguera notre pinceau *parallèle* d'un pinceau *divergent*, ou que l'on considérerait à une distance médiocre de la source lumineuse. Comme l'approximation précédente, applicable dans toute petite étendue à partir de cette première surface d'onde, déterminera dès lors une vitesse ω de propagation et une direction approchée (l', m', n') des vibrations communes à tout l'espace contigu, quelque grand qu'il soit dans les sens latéraux, les surfaces d'onde $t_0 =$ const. voisines, et, de proche en proche, même celles qui seront éloignées, se trouveront équidistantes les unes des autres et de la première, à des écarts relatifs près très petits partout, et constitueront, par conséquent, une famille de plans parallèles. Bref, t_0 admettra, sauf erreur négligeable, dans tout le pinceau lumineux, l'expression linéaire

$$t_0 = lx + my + nz;$$

et, partout aussi, les vibrations seront sensiblement polarisées suivant la direction fixe correspondante (l', m', n').

Mais rien n'y astreint l'*élongation* δ à rester comprise entre des limites assignées, quelles qu'elles soient.

18. Éléments qui seront variables à cette deuxième approximation : manière d'y opérer. — Les ondes étant, ainsi, presque planes et parallèles, ou, en d'autres termes, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, ω, l, m, n, ayant des valeurs *fixes*, que l'on se représentera comme données en conformité des équations précédentes (21) et (29), nous pourrons toujours, évidemment, faire dépendre les fonctions de t, x, y et z, comme sont ξ, η, ζ, ..., de la variable $t - lx - my - nz$, que nous appellerons la *variable principale;* et, en outre, de x, y, z. Nous continuerons à exprimer avec l'aide d'accents leurs dérivées par rapport à la première variable, qui s'écriront ξ', ξ'', ..., η', ..., tandis que nous indiquerons par des ∂ de ronde les différentiations en x, y, z *effectuées sans faire changer cette première variable* $t - lx - my - nz$. Les dérivées partielles ainsi obtenues s'écriront donc $\frac{\partial\xi}{\partial x}$, $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$, ... Il résulte de nos hypothèses touchant la lenteur de variation de ξ, η, ζ, ... sur une même onde, que celles-ci seront beaucoup plus petites, pour

chaque quantité, que la dérivée du même ordre (divisée par ω) de cette quantité par rapport à t.

Observons d'ailleurs que la partie principale, seule sensible, du déplacement effectif sera, d'après les résultats précédents, sa composante positive ou négative δ suivant la direction fixe et censée connue (l', m', n'); de telle sorte que, si δ désigne ainsi le trinome

$$\delta = l'\xi + m'\eta + n'\zeta,$$

les différences $\xi - l'\delta$, $\eta - m'\delta$, $\zeta - n'\delta$ seront de très petites quantités φ, χ, ψ, représentant ensemble un minime déplacement, *correctif* en quelque sorte, et normal à la direction (l', m', n'). Nous aurons donc

$$(54) \qquad \xi = l'\delta + \varphi, \qquad \eta = m'\delta + \chi, \qquad \zeta = n'\delta + \psi,$$

où δ sera le seul déplacement sensible, et φ, χ, ψ de très petites fonctions, astreintes à donner

$$(55) \qquad l'\varphi + m'\chi + n'\psi = 0.$$

Celles-ci, φ, χ, ψ, varieront beaucoup plus rapidement avec leur première variable $t - lx - my - nz$ qu'avec les autres, x, y, z. Car les imperceptibles quantités φ, χ, ψ, nulles avant le moment $t = t_0$ où la première onde arrive en (x, y, z), c'est-à-dire tant que δ y reste égal à zéro, naissent avec ce déplacement principal δ, puis grandissent et, finalement, disparaissent à peu près avec lui. L'on n'associe, en effet, à δ ces petites quantités, dont deux restent arbitraires malgré (55), que pour pouvoir disposer d'elles, de manière, tout en satisfaisant aux équations (20) du mouvement (p. 276), à se donner δ lentement variable à volonté d'un point à l'autre d'une première surface d'onde, et même nul en dehors d'une aire assez ample, de figure quelconque, sur cette surface.

Il suit de là qu'en différentiant ξ, η, ζ une ou deux fois en x, y, z, pour substituer dans (20) les dérivées ainsi obtenues, on pourra se borner à faire varier $t - lx - my - nz$ dans φ, χ, ψ, tandis que, pour la quantité beaucoup plus grande δ, il faudra aussi y tenir compte des dérivées $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ les moins faibles, qui seront celles où ne figurera qu'une différentiation par ∂ en x, y ou z. Car des dérivées, très petites à raison de la lenteur de variation de la fonction différentiée, ne varient, elles-mêmes, de quantités comparables à leurs valeurs, avec les variables dont elles dépendent ainsi très peu, que le long de

grands parcours; en sorte que leurs dérivées successives relatives à ces variables sont d'ordres de petitesse de plus en plus élevés.

Nous aurons donc, par exemple : 1° pour les dérivées de ξ, ou de $l'\delta + \varphi$,

$$(56)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dx} = (l'\delta' + \varphi')(-l) + l'\dfrac{\partial\delta}{\partial x} = -ll'\delta' - l\varphi' + l'\dfrac{\partial\delta}{\partial x}, \\ \dfrac{d^2\xi}{dx^2} = \left(-ll'\delta'' - l\varphi'' + l'\dfrac{\partial\delta'}{\partial x}\right)(-l) - ll'\dfrac{\partial\delta'}{\partial x} \\ \qquad = l^2 l'\delta'' + l^2\varphi'' - 2ll'\dfrac{\partial\delta'}{\partial x}, \quad \dots; \end{cases}$$

2° pour la dilatation cubique $\dfrac{d\xi}{dx} + \dfrac{d\eta}{dy} + \dfrac{d\zeta}{dz}$, et pour sa dérivée en x,

$$(57)\quad \begin{cases} \theta = -(ll' + mm' + nn')\delta' \\ \qquad - (l\varphi' + m\chi' + n\psi') + \left(l'\dfrac{\partial\delta}{\partial x} + m'\dfrac{\partial\delta}{\partial y} + n'\dfrac{\partial\delta}{\partial z}\right), \\ \dfrac{d\theta}{dx} = \Big[-(ll' + mm' + nn')\delta'' - (l\varphi'' + m\chi'' + n\psi'') \\ \qquad + \left(l'\dfrac{\partial\delta'}{\partial x} + m'\dfrac{\partial\delta'}{\partial y} + n'\dfrac{\partial\delta'}{\partial z}\right)\Big](-l) - (ll' + mm' + nn')\dfrac{\partial\delta'}{\partial x}. \end{cases}$$

19. Direction du rayon lumineux. — Les premiers membres des équations (20) (p. 276) étant d'ailleurs

$$\frac{1}{a^2}(l'\delta'' + \varphi''), \quad \dots,$$

il sera facile de voir ce que deviennent ces équations. La première, par exemple, après qu'on en aura supprimé les termes en δ'' à raison de l'équation (24) correspondante, sera, si l'on isole dans un membre les termes où figurent les petites fonctions φ'', χ'', ψ'',

$$(58)\quad \begin{cases} \left(l^2 + m^2 + n^2 - \dfrac{1}{a^2}\right)\varphi'' - l(l\varphi'' + m\chi'' + n\psi'') = 2l'\left(l\dfrac{\partial\delta'}{\partial x} + m\dfrac{\partial\delta'}{\partial y} + n\dfrac{\partial\delta'}{\partial z}\right) \\ \qquad - l\left(l'\dfrac{\partial\delta'}{\partial x} + m'\dfrac{\partial\delta'}{\partial y} + n'\dfrac{\partial\delta'}{\partial z}\right) - (ll' + mm' + nn')\dfrac{\partial\delta'}{\partial x}. \end{cases}$$

Pour pouvoir intégrer deux fois immédiatement sur place, ou par rapport à t, cette équation et les deux autres ses analogues, il suffit d'y introduire au lieu du déplacement sensible δ, fonction de $t - lx - my - nz$ et de x, y, z, son intégrale ou *fonction primitive* par rapport à sa variable principale $t - lx - my - nz$, intégrale

complètement déterminée si on la fait nulle initialement, c'est-à-dire pour $t < lx + my + nz$. Soit alors F sa valeur, fonction, comme δ, rapidement variable de $t - lx - my - nz$, mais lentement variable de x, y, z, et qui, comme δ, commencera à différer de zéro, en (x, y, z), pour

$$t = lx + my + nz.$$

Dans (58), δ pourra être remplacé par F′, ou δ' par F″; et l'équation, multipliée deux fois successivement par dt, puis intégrée chaque fois sur place, à partir de l'instant $t = lx + my + nz$ où ses termes cessent d'être nuls, deviendra, en y substituant d'ailleurs à

$$l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{a^2}$$

sa valeur tirée de la première relation (24) (p. 291), puis à l, m, n leurs expressions (21) (p. 290) et enfin $\sin\varepsilon$ à $l'\cos\alpha + m'\cos\beta + n'\cos\gamma$:

$$(59)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\cos\alpha}{\omega}\left[\frac{\sin\varepsilon}{l'}\varphi - (\varphi\cos\alpha + \chi\cos\beta + \psi\cos\gamma)\right] \\ &\quad = 2l'\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma\right) \\ &\qquad - \left(l'\frac{\partial F}{\partial x} + m'\frac{\partial F}{\partial y} + n'\frac{\partial F}{\partial z}\right)\cos\alpha - \frac{\partial F}{\partial x}\sin\varepsilon. \end{aligned}\right.$$

Cette relation subsisterait si, au lieu de considérer, en (x, y, z), des ondes qui y sont propagées d'ailleurs, ou des mouvements ayant succédé au repos, on étudiait une agitation perpétuelle où les déplacements ξ, η, ζ et, par suite, leurs dérivées auraient, en chaque point, valeurs moyennes nulles; car, pourvu qu'on déterminât alors F, dans sa partie indépendante de t, de manière à annuler sa valeur moyenne au point (x, y, z), les intégrations par rapport à t n'introduiraient aucune arbitraire, d'après les considérations déjà rappelées qui, dans la note des pages 48 à 52 (t. I) ont permis (p. 52) de déduire la relation $\theta = 0$ de l'équation $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = 0$, quand il s'agissait des mouvements lumineux ou calorifiques de l'éther libre.

Cela posé, multiplions l'équation (59) et les deux autres analogues, respectivement, par l', m', n', puis ajoutons. Il vient, en divisant par 2,

$$(60)\quad 0 = (\cos\alpha - l'\sin\varepsilon)\frac{\partial F}{\partial x} + (\cos\beta - m'\sin\varepsilon)\frac{\partial F}{\partial y} + (\cos\gamma - n'\sin\varepsilon)\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Les coefficients des dérivées partielles de F, au second membre,

sont entre eux, d'après (41) (p. 299), comme les cosinus directeurs du rayon r, ou comme les accroissements de x, y, z le long d'un chemin parallèle à ce rayon. L'équation (60) exprime donc que la différentielle totale, ∂F, de F le long d'un tel chemin, obtenue sans faire varier

$$t - lx - my - nz,$$

c'est-à-dire en y suivant une onde dans sa propagation, est nulle, ou, plus exactement (puisque nos calculs ne sont qu'approchés), qu'elle y est incomparablement plus petite que dans les autres directions.

C'est dire, évidemment, que *le sens suivant lequel le mouvement de l'onde plane se propage sans variation sensible est le sens même du rayon, r, aboutissant au point de contact de cette onde avec l'enveloppe de toutes celles qui seraient parties en même temps qu'elle de l'origine, mais dans d'autres directions.* Bref, c'est le rayon r de la surface d'onde courbe (53) (p. 301) qui constitue le *rayon lumineux*, ou l'axe du pinceau considéré de lumière parallèle.

20. Sa délimitation latérale dans les deux sens. — Adoptons, sur chaque onde suivie dans son mouvement, deux axes rectangulaires des s et des s_1, comptés à partir du point où l'axe r perce l'onde, le premier, suivant le sens (λ, μ, ν) normal à la vibration, le second suivant la direction (l'_1, m'_1, n'_1) qu'aurait la vibration, d'après Fresnel, dans le plan de l'onde. Les cosinus directeurs de celle-ci sont entre eux, vu (28) et (30) (p. 292), comme $\frac{\omega^2 l'}{a^2}$, $\frac{\omega^2 m'}{b^2}$, $\frac{\omega^2 n'}{c^2}$, ou, identiquement, comme

$$l' + \frac{\omega^2 - a^2}{a^2} l', \quad m' + \frac{\omega^2 - b^2}{b^2} m', \quad n' + \frac{\omega^2 - c^2}{c^2} n',$$

c'est-à-dire encore, d'après (47) (p. 300), dans les mêmes rapports que les trois quantités

(61) $$l' - \sin\varepsilon \cos\alpha, \quad m' - \sin\varepsilon \cos\beta, \quad n' - \sin\varepsilon \cos\gamma.$$

Si l'on divise ces dernières par la racine carrée, $\cos\varepsilon$, de la somme de leurs carrés, prise avec le signe *plus* (vu le choix naturel d'une valeur positive pour le cosinus $l'l'_1 + m'm'_1 + n'n'_1$), on voit que ces trois cosinus directeurs seront

(62) $$l'_1 = \frac{l' - \sin\varepsilon\cos\alpha}{\cos\varepsilon}, \quad m'_1 = \frac{m' - \sin\varepsilon\cos\beta}{\cos\varepsilon}, \quad n'_1 = \frac{n' - \sin\varepsilon\cos\gamma}{\cos\varepsilon}.$$

La dérivée $\frac{\partial F}{\partial s_1}$ égale la somme des trois produits respectifs des dé-

rivées $\frac{\partial F}{\partial(x,y,z)}$ par ces cosinus; et l'on a la formule

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} &(l'-\sin\varepsilon\cos\alpha)\frac{\partial F}{\partial x}+(m'-\sin\varepsilon\cos\beta)\frac{\partial F}{\partial y}\\ &\qquad+(n'-\sin\varepsilon\cos\gamma)\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F}{\partial s_1}\cos\varepsilon. \end{aligned}\right.$$

Son premier membre ne dépend de F, comme le second membre de (60), que par les deux trinomes

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma \quad \text{et} \quad l'\frac{\partial F}{\partial x}+m'\frac{\partial F}{\partial y}+n'\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Ceux-ci, qui sont entre eux, d'après (60), comme $\sin\varepsilon$ est à 1, peuvent donc, vu (63), s'exprimer en fonction de $\frac{\partial F}{\partial s_1}$; et ils ont les valeurs

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma=\frac{\partial F}{\partial s_1}\tang\varepsilon,\\ &\quad l'\frac{\partial F}{\partial x}+m'\frac{\partial F}{\partial y}+n'\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{1}{\cos\varepsilon}\frac{\partial F}{\partial s_1}. \end{aligned}\right.$$

On peut les éliminer de (59); ce qui donne à cette équation (59) la forme plus simple

$$(65)\quad \left\{\begin{aligned} &-\frac{\sin\varepsilon}{\omega}\frac{\varphi\cos\alpha}{l'}+\frac{\varphi\cos\alpha+\chi\cos\beta+\psi\cos\gamma}{\omega}\cos\alpha\\ &\qquad=\frac{\partial F}{\partial x}\sin\varepsilon+\frac{\cos\alpha-2l'\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}\cdot\frac{\partial F}{\partial s_1}. \end{aligned}\right.$$

Avec ses deux analogues, dont une seule est distincte à cause de la condition de compatibilité (60), qui fait de l'une des trois équations une résultante linéaire des autres, on aura bien deux équations du premier degré en φ, χ, ψ, pour déterminer, par leur adjonction à l'équation également du premier degré (55) (p. 303), ces trois petites quantités correctives φ, χ, ψ. On voit qu'elles seront fonctions linéaires des dérivées $\frac{\partial F}{\partial(x,y,z)}$, et du même ordre qu'elles, ou, en définitive, aussi petites qu'on le voudra, pourvu que la fonction F, mesure, en quelque sorte, de l'amplitude des mouvements, varie assez lentement d'un point à l'autre d'une même onde. Et l'on aura, d'après (54), pour exprimer les déplacements ξ, η, ζ en fonction des dérivées premières de F, c'est-à-dire de ses modes de variation *rapides* ou *lents*, les for-

mules

$$(66)\qquad \xi = l'F' + \varphi, \qquad \eta = m'F' + \chi, \qquad \zeta = n'F' + \psi.$$

Notre analyse approchée, supposant φ, χ, ψ très petits à côté de δ, tomberait en défaut au moment et dans la région où, par exemple, le repos primitif se rétablirait par une annulation définitive de δ, c'est-à-dire par des valeurs de F désormais indépendantes de t, sans que les dérivées $\frac{\partial F}{\partial(x, y, z)}$, dès lors invariables aussi, fussent elles-mêmes nulles. Les petits déplacements *résiduels* φ, χ, ψ, fonctions linéaires de ces dérivées et admissibles l'instant d'avant (où ils étaient encore petits par rapport à δ et devaient cependant commencer à varier peu avec t), s'évanouiraient sans doute avec la lenteur relative que semble indiquer leur invariabilité dans nos formules, mais qui échappe à nos calculs de seconde approximation.

Au reste, un tel cas ne se présentera pas si le mouvement a été purement oscillatoire, c'est-à-dire si le déplacement δ a eu partout des valeurs indifféremment positives et négatives, nulles en moyenne. Car cette hypothèse donne à la fonction F, c'est-à-dire à l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t} \delta\, dt$$

prise sur place, la valeur finale zéro et, par suite, la même valeur finale zéro aux dérivées $\frac{\partial F}{\partial(x, y, z)}$, ainsi qu'à φ, χ, ψ (¹).

(¹) On reconnaît la lenteur avec laquelle disparaissent les déplacements résiduels φ, χ, ψ et. en même temps, leur peu d'importance physique, en imaginant une prolongation du phénomène, sur la première surface d'onde et, par suite, sur toutes les autres, par la production, avant annulation définitive, de petites valeurs de δ, de signe convenable, maintenues assez longtemps pour réduire partout à zéro la valeur finale de $\int_{t_0}^{t} \delta\, dt$, c'est-à-dire de F. Alors nos formules approchées de φ, χ, ψ ne cessent pas d'être applicables, et elles font annuler définitivement φ, χ, ψ en même temps que δ. Il n'y a eu cependant, de la sorte, aucune modification notable introduite dans le phénomène; car on n'y a ajouté que des déplacements δ imperceptibles, se faisant avec des vitesses encore plus inappréciables, sans déploiement sensible d'énergie, c'est-à-dire quelque chose comme cette faible agitation de l'eau qui subsiste un instant dans un canal après le passage d'une grosse intumescence.

Ainsi, quelles que soient les vraies valeurs notables de δ, arbitrairement données sur la première surface d'onde, les mouvements sensibles produits dans le pinceau de lumière seront exprimés par les formules précédentes; et, seuls,

Il est clair que, pour la même raison de valeurs de $\frac{\partial F}{\partial(x, y, z)}$ trop fortes, nos formules de φ, χ, ψ peuvent encore tomber en défaut à la surface latérale du pinceau lumineux, quand le déplacement δ et, par suite, la fonction F y tendent trop vite vers zéro. Mais nous avons écarté ce cas, en convenant de négliger ici les phénomènes de *diffraction,* dus justement à une variation trop rapide de l'amplitude des vibrations sur le contour de la surface d'onde *excitatrice*, ou surface d'onde correspondant à $t = 0$.

21. Légère incurvation ou ellipticité imposée aux trajectoires moléculaires par cette limitation latérale. — Il est maintenant très simple de former, avec l'équation (65) et ses analogues, deux combinaisons où F n'entre que par sa dérivée en s_1 ou sa dérivée en s.

On n'a, pour obtenir la première de ces deux équations, qu'à ajouter membre à membre (65) et ses deux analogues, après les avoir multipliées soit par l'_1, m'_1, n'_1 ou leurs valeurs (62), afin que les premiers termes des seconds membres introduisent dans la somme la dérivée même $\frac{\partial F}{\partial s_1}$, soit par les coefficients respectifs de $\frac{\partial F}{\partial(x, y, z)}$ dans (60), afin que ces premiers termes des seconds membres s'éliminent de la somme en vertu de (60). Il vient sans difficulté, vu la perpendicularité des deux directions (l'_1, m'_1, n'_1), $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, et en divisant finalement, dans la première méthode, par $-\frac{\sin\varepsilon}{\omega}$,

$$\frac{l'_1 \cos\alpha}{l'}\varphi + \frac{m'_1 \cos\beta}{m'}\chi + \frac{n'_1 \cos\gamma}{n'}\psi = \omega\frac{\partial F}{\partial s_1}. \tag{67}$$

Cette équation subsiste même quand $\sin\varepsilon = 0$, quoiqu'on l'ait obtenue, dans une des deux méthodes, en divisant par $\sin\varepsilon$. En effet, dans ce cas où $\sin\varepsilon = 0$, *qui comprend celui des corps isotropes,* et où $l'_1 = l'$, $m'_1 = m'$, $n'_1 = n'$, son premier membre n'est autre que la composante, $\varphi\cos\alpha + \chi\cos\beta + \psi\cos\gamma$, de l'imperceptible déplacement correctif (φ, χ, ψ), suivant la normale à l'onde ou le rayon (alors confondus); et l'on voit que l'équation (65) se réduit alors à (67). Non seulement donc celle-ci, (67), subsiste, mais il ne reste même qu'elle pour régir à très peu près φ, χ, ψ.

Du reste, cette équation (67), qui est ainsi la plus capitale de la

des déplacements à la fois très lents et très faibles, indiqués mais non évalués par les valeurs résiduelles ou persistantes de φ, χ, ψ résultant de ces formules, exigeront une analyse plus complète.

présente étude, ne fait, comme l'équation (29) en ω, également la plus capitale de l'étude précédente de première approximation, que traduire l'importante relation (20 *bis*) (p. 277). Vu la valeur (56) de $\frac{d\xi}{dx}$ et les expressions analogues de $\frac{d\eta}{dy}$ et de $\frac{d\zeta}{dz}$, cette relation (20 *bis*) donne, en effet, si l'on se rappelle l'équation (33 *bis*) (p. 293) déjà obtenue de même, et en intégrant d'ailleurs une fois, sur place, par rapport à t, après multiplication par $\omega\, dt$ et substitution de F' à δ :

$$(68) \qquad \frac{\varphi \cos\alpha}{a^2} + \frac{\chi \cos\beta}{b^2} + \frac{\psi \cos\gamma}{c^2} = \omega \left(\frac{l'}{a^2} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{m'}{b^2} \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{n'}{c^2} \frac{\partial F}{\partial z} \right).$$

Remplaçons, dans cette formule, a^2, b^2, c^2, que contiennent tous les dénominateurs, par les quantités, proportionnelles d'après (28) et (30), $\frac{l'}{l'_1}$, $\frac{m'}{m'_1}$, $\frac{n'}{n'_1}$; et nous aurons bien (67) (¹).

(¹) **Cas particulier d'un pinceau de lumière parallèle dans un corps isotrope.** — Dans un Cours détaillé, la propagation d'un pinceau de lumière parallèle, à l'intérieur d'un corps transparent *isotrope*, devrait être traitée séparément et en premier lieu; car elle fournirait l'exemple le plus simple possible de notre méthode d'intégration par approximations successives. Les équations du mouvement de l'éther y étant, à raison de l'annulation de la dilatation cubique θ,

$$\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} = \omega^2 \Delta_2(\xi, \eta, \zeta),$$

avec ω constant, on y dirigerait, par exemple, les x positifs normalement aux plans d'onde, suivant le sens de la transmission du mouvement, de manière à avoir, dans la variable principale, $t_0 = \frac{x}{\omega}$, et, par suite, $\frac{dt_0}{d(y, z)} = 0$. Cela réduirait les six dérivées secondes $\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{(dy^2, dz^2)}$ à $\frac{\partial^2(\xi, \eta, \zeta)}{(\partial y^2, \partial z^2)}$, quantités du deuxième ordre au moins de petitesse et négligeables au degré d'approximation poursuivi dans nos calculs. Les équations du mouvement, ainsi devenues

$$\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} = \omega^2 \frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dx^2},$$

seraient, en x et t, celle de la *corde vibrante;* d'où résulterait, même sans avoir besoin d'intégrer, une propagation du mouvement, suivant tout chemin parallèle aux x ou rendant y et z constants, indépendante des circonstances produites ailleurs que *sur ce chemin*, c'est-à-dire la même que si les déplacements ζ, η, ξ étaient, dans toute l'étendue de chaque plan d'onde, ce qu'ils sont sur ce chemin, ou ne dépendaient pas de y et z. Ainsi, *la transmission du mouvement et l'orientation du pinceau de lumière suivant les normales au premier plan d'onde, dans un milieu isotrope homogène*, peuvent s'établir presque sans calcul, intuitivement.

Quant à la circonstance qui rend alors la composante longitudinale ξ des dépla-

Enfin, la dernière combinaison linéaire à former de l'équation (65) et de ses deux analogues, celle qui doit introduire la seconde dérivée partielle distincte, $\frac{\partial F}{\partial s}$, de F sur une même onde, s'obtient en ajoutant ces trois équations, respectivement multipliées par les cosinus directeurs λ, μ, ν du chemin ds, perpendiculaire, tout à la fois, à la direction (l', m', n') de la vibration et à celle ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) de la normale à l'onde. Il vient tout de suite

$$(69)\qquad -\frac{\sin\varepsilon}{\omega}\left(\frac{\lambda\cos\alpha}{l'}\varphi+\frac{\mu\cos\beta}{m'}\chi+\frac{\nu\cos\gamma}{n'}\psi\right)=\frac{\partial F}{\partial s}\sin\varepsilon.$$

Cette équation, la troisième, qu'il faudra joindre, comme on voit, à (55) et à (67) pour déterminer φ, χ, ψ, se trouve identiquement vérifiée quand $\sin\varepsilon = 0$, c'est-à-dire, notamment, dans les corps isotropes. Donc, *dans les corps isotropes* et même dans les autres, quand les plans d'onde contiennent la vibration principale ou sensible δ, *le lent changement de l'amplitude des mouvements d'un point à l'autre d'une même onde, suivant le sens normal aux vibrations, n'implique aucun déplacement correctif* (φ, χ, ψ), *qui soit comparable au petit déplacement longitudinal*, $\varphi\cos\alpha+\chi\cos\beta+\psi\cos\gamma$, exprimé à très peu près par (67), et *que nécessite l'autre lente variation analogue de l'amplitude, celle qui a lieu dans le sens même de la vibration*, ou des s_1.

Quand $\sin\varepsilon$ n'est pas nul, on peut diviser (69) par $-\frac{\sin\varepsilon}{\omega}$; et cette

---

cements très petite à côté de η, ζ, elle tient à ce que, dans l'équation $\theta = 0$, les deux termes $\frac{d\eta}{dy}$, $\frac{d\zeta}{dz}$ se réduisent à $\frac{\partial\eta}{\partial y}$, $\frac{\partial\zeta}{\partial z}$, tandis que le terme $\frac{d\xi}{dx}$ a pour partie principale $-l\xi'$, c'est-à-dire $-\frac{\xi'}{\omega}$. Si donc, supposant, par exemple, rectiligne la composante transversale du mouvement, on choisit les y suivant son sens, on aura $\eta=\delta$, $\zeta=0$, et aussi, par définition, $F=\int_{t_0}^{t}\delta\,dt$. Alors l'équation $\theta=0$ devient $-\frac{\xi'}{\omega}+\frac{\partial F'}{\partial y}=0$, ou $\xi'\,dt=\omega\frac{\partial F'}{\partial y}dt$, et, en intégrant *sur place*, à partir de l'époque $t=t_0$, où F et ξ étaient nuls,

$$\xi=\omega\frac{\partial F}{\partial y}.$$

C'est bien ce à quoi se réduit la formule (67), devenue celle de la petite composante longitudinale du mouvement; car ∂y se confond ici avec ∂s_1.

relation devient

$$(70) \qquad \frac{\lambda \cos\alpha}{l'}\varphi + \frac{\mu\cos\beta}{m'}\chi + \frac{\nu\cos\gamma}{n'}\psi = -\omega\frac{\partial F}{\partial s}.$$

Les deux équations (70) et (67) signifient évidemment que l'existence des petites dérivées $\frac{\partial F}{\partial s}$ et $\frac{\partial F}{\partial s_1}$ de la fonction F fait naître, à côté du déplacement sensible δ exprimé par la dérivée principale F' de cette fonction, de petits déplacements *correctifs*, proportionnels à ces dérivées respectives $\frac{\partial F}{\partial s}$, $\frac{\partial F}{\partial s_1}$, quand on les évalue en projection sur les deux droites dont les cosinus directeurs sont entre eux, pour la première dérivée, comme $\frac{\lambda\cos\alpha}{l'}$, $\frac{\mu\cos\beta}{m'}$, $\frac{\nu\cos\gamma}{n'}$, et, pour la seconde, comme $\frac{l'_1\cos\alpha}{l'}$, $\frac{m'_1\cos\beta}{m'}$, $\frac{n'_1\cos\gamma}{n'}$. Le déplacement correctif devant être, en outre, contenu dans le plan normal à δ, ses deux projections sur les deux droites dont il s'agit le déterminent bien ; et il est clair, vu leur non-proportionnalité à F' ou à δ, que leur présence rend légèrement courbes les trajectoires des atomes vibrants de l'éther ([1]).

22. Des erreurs graves qu'entraînerait l'hypothèse de vibrations rigoureusement rectilignes, si on l'acceptait d'une manière générale, pour la lumière polarisée rectilignement. — L'hypothèse, en Optique, de vibrations rectilignes, inévitable et féconde à une première approximation, doit donc être laissée de côté à une approximation plus haute, de même qu'en Astronomie, celle de mouvements circulaires et uniformes pour les planètes, après avoir permis de créer cette science, est devenue un obstacle et a dû être corrigée ([2]).

([1]) L'analyse exposée ici est le cas particulier le plus simple de celle qui concernerait les ondes émanées d'un centre, origine des coordonnées, ou ayant la forme courbe de l'enveloppe des ondes planes orientées dans tous les sens et passées simultanément à ce centre. J'ai donné cette analyse plus complète, et même pour un éther homogène (fictif) de la contexture élastique la plus compliquée possible, aux pages 673 à 698 de mon Volume de 1885 intitulé : *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, avec des notes étendues sur divers points de Physique mathématique et d'Analyse*. Je traite, du reste, dans la suite de cette deuxième partie du présent Mémoire, le cas en question d'ondes émanées d'un centre.

([2]) Elle est restée toutefois, grâce à sa simplicité idéale, le type et l'élément irréductible auquel on rapporte les mouvements effectifs et par le moyen duquel on tâche de les exprimer tous ; car les développements, en série trigonométrique, des coordonnées des planètes, si universellement employés encore par les astro-

Accepter l'hypothèse de vibrations rigoureusement rectilignes, pour la lumière dite *polarisée en ligne droite,* sur la foi des Traités de Physique où elle est admise sans restriction, ce serait, comme on voit, annuler les petits déplacements correctifs φ, χ, ψ et, par suite, s'il s'agit d'un milieu biréfringent, égaler à zéro les deux dérivées $\frac{\partial F}{\partial(s, s_1)}$ de la fonction F dans le plan d'une onde, ou faire dépendre la fonction F de la variable unique $t - lx - my - nz$. S'il s'agit d'un milieu isotrope, ce serait, du moins, annuler la dérivée $\frac{\partial F}{\partial s_1}$ de la fonction F suivant la direction des vibrations. Dans un cas comme dans l'autre, l'existence d'un *rayon lumineux*, c'est-à-dire d'un pinceau de lumière latéralement limité, serait impossible, puisque l'amplitude existerait sur une largeur indéfinie, tout au moins dans un sens. L'élément le plus essentiel de l'Optique resterait donc inexpliqué. Faute, sans doute, d'un examen suffisant, d'éminents géomètres ont cependant accepté l'hypothèse en question; et ils sont arrivés à des lois extraordinaires que la nature ne réalise jamais et dont les physiciens n'ont pas le moindre soupçon. Quand rien, en effet, n'astreint des myriades de points matériels, comme sont les atomes de l'éther d'une région de l'espace, à avoir pour trajectoires des lignes droites, il n'y a qu'une probabilité infiniment petite, pratiquement nulle, pour que les ébranlements émanés d'une source lumineuse leur fassent décrire de telles trajectoires.

Je citerai (parce qu'on le trouve dans un livre classique), comme exemple d'un tel oubli de la prudence indispensable aux géomètres dans l'adoption d'une hypothèse, les huit dernières (XVIIe à XXIVe) des *Leçons* de Lamé *sur l'élasticité des corps solides* (¹). Cet exemple m'avait entraîné, dans mon premier travail sur ce sujet, intitulé *Étude sur les vibrations rectilignes et sur la diffraction, dans*

---

nomes, et que la série de Fourier a permis d'étendre à tous les phénomènes périodiques de la nature, ne sont que la décomposition du mouvement réel des astres en mouvements circulaires uniformes, ceux-ci étant censés, du moins, vus en projection sur les axes coordonnés.

(¹) La loi à laquelle il arrive pour l'amplitude des mouvements aux divers points (x, y, z) d'une même onde, et que j'obtiens aussi, dans le Mémoire *Sur les vibrations rectilignes* cité ci-après, malgré la différence notable des deux milieux étudiés par Lamé et par moi-même, consiste dans la proportionnalité inverse de cette amplitude à la moyenne géométrique des deux projections, sur des plans normaux aux axes optiques, du rayon r aboutissant au point (x, y, z) considéré [*voir* la XXIIIe Leçon de Lamé, form. (33), p. 322].

les milieux isotropes et dans l'éther des cristaux, Mémoire qui a paru au Tome XIII (1868) du *Journal de Mathématiques pures et appliquées.* Je n'avais pas eu encore l'idée des trois petits termes correctifs φ, χ, ψ, qui libèrent le déplacement principal (seul sensible) δ de toute loi, dans l'étendue d'une même onde considérée à un moment donné de son existence. Mais j'avais cependant observé, à la fin du § VII ([1]), que d'insignifiants écarts offerts, dans chaque cas, par les expressions effectives des déplacements, d'avec les formes *rectiligne* et *pendulaire,* suffisaient pour mettre en défaut les deux lois que j'obtenais pour l'amplitude des mouvements aux divers points d'une même onde (courbe ou à centre), mais surtout celle qui était spéciale aux corps hétérotropes, ou qui correspondait à notre formule (70). Et je regardais comme satisfaisante l'approximation permettant de rejeter cette loi; d'où résultait ([2]) la justification de la méthode de Fresnel pour le calcul des phénomènes de diffraction, c'est-à-dire la possibilité de former une intégrale approchée des équations de mouvement de l'éther, dans le cas d'une surface d'ébranlement arbitrairement donnée, en superposant, à la manière d'Huygens et de Fresnel, une infinité de systèmes d'ondes à centre, sauf une avance d'un quart d'ondulation à leur donner sur les mouvements effectifs ([3]).

([1]) Une erreur d'impression y fait lire, à la deuxième ligne de l'avant-dernier alinéa, les mots : « ... en diffère beaucoup par son importance et par sa généralité », au lieu de « ... en diffère beaucoup pour l'importance et la généralité ».

([2]) Je le dirai avec un peu plus de détails dans une note du n° 26 (p. 327).

([3]) **Sur le motif probable pour lequel Poisson est resté longtemps favorable au système de l'émission et sur une raison extrinsèque, mais importante, qu'a dû avoir Newton d'adopter ce système.** — Poisson a accepté presque toute sa vie, dans la théorie de la lumière, le système de l'*émission,* auquel l'autorité de Newton avait rallié les plus grands géomètres; et, même après les travaux de Fresnel, il penchait encore, malgré de nombreux doutes, en faveur de ce système, par suite de l'impossibilité qu'il trouvait, dans la théorie des ondulations, à expliquer la délimitation latérale d'un pinceau lumineux. Or, à quoi pouvait tenir, pour un analyste de la force de Poisson, une telle impossibilité, si ce n'est justement à l'hypothèse de vibrations rectilignes qu'il devait faire et, peut-être, presque sans s'en douter?

Il a fini, du reste, mais quand il ne pouvait déjà plus écrire sa pensée, par trouver le nœud de la difficulté qui l'avait arrêté si longtemps; car, dans sa dernière maladie, il disait avoir expliqué, par les formules des vibrations élastiques, *un filet de lumière.* C'est ce qu'indique une note finale de son *Mémoire* (posthume) *sur l'équilibre et le mouvement des corps cristallisés,* inséré au Tome XVIII (1842) des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris.* L'alinéa par lequel se termine (p. 6) l'introduction du même Mémoire montre, d'ailleurs, que Poisson avait alors reconnu la possibilité d'efforts tangentiels et de vibrations transver-

Une réflexion analogue pourrait être faite, comme je viens indirectement de l'observer, à propos de la forme *pendulaire* attribuée gé-

---

sales dans les fluides « lorsqu'elles se propagent, dit-il, avec une extrême rapidité, ce qui rapproche en général les lois de cette propagation de celles qui ont lieu dans les solides »; et qu'il se proposait d'envisager à ce point de vue, dans un Mémoire ultérieur, « la théorie des ondes lumineuses, c'est-à-dire des petites vibrations d'un éther impondérable, répandu dans l'espace ou dans une matière pondérable telle que l'air ou un corps solide, cristallisé ou non ».

Quant à Newton, par le fait même qu'il voulait pouvoir appliquer l'Analyse de son temps aux phénomènes optiques, et bien qu'un éclair de génie lui ait fait découvrir la formule de la vitesse du son, il n'avait réellement pas le choix entre les deux systèmes de l'émission et des ondulations. Celui-ci aurait nécessairement exigé, pour ses calculs, la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre, qui n'existait pas encore et qui n'a commencé qu'avec d'Alembert, par la formation et l'intégration de l'équation des cordes vibrantes, vingt ans après la mort de Newton. Huygens avait bien, déjà, exposé d'admirables intuitions sur l'optique ondulatoire, mais à titre d'analogies physiques, suggérées sans doute par l'observation des ondes liquides, et qu'il disait lui-même ne devoir pas *être recherchées avec trop de soin, ni de subtilité.*

Au contraire, le système de l'émission, simplifié par l'hypothèse de l'indépendance mutuelle des atomes qu'émettraient les corps lumineux, pouvait se borner à considérer le mouvement de chacun de ces atomes, sous l'action des corps ou milieux transparents, comme si les autres atomes lumineux n'existaient pas. Ce système n'employait donc que les équations simplement différentielles du mouvement d'un point.

Il est vrai qu'il fallait encore, pour y arriver aux lois de la lumière dès lors connues et notamment à la constance, dans un milieu donné, de la vitesse de chaque espèce de lumière, regarder les particules d'éther comme soustraites à tout ralentissement de la part des molécules pondérables qu'elles heurtent, malgré les énormes vitesses de choc et l'infinie petitesse relative des masses heurtantes. Il fallait donc, tout en affirmant la réalité des effluves lumineux émanés d'un corps incandescent, leur sensibilité aux actions de la matière pondérable s'exerçant à petite distance et, enfin, leur effet sur la rétine, dépouiller en quelque sorte ces effluves ou flux matériels de toute impénétrabilité, c'est-à-dire de l'attribut qui nous semble le plus inséparable de la matière, et les assimiler, sous ce rapport, à de pures ou idéales figures géométriques. Si, pour se rapprocher des inductions que suggère l'expérience, on avait comparé à un vrai fluide, formant de rapides courants, de tels effluves émis en tous sens dans un espace éclairé, la théorie de l'émission aurait été bien plus difficile à mettre en œuvre, par le géomètre, que celle des ondulations; car, au lieu du fluide, que demande celle-ci, à peu près en repos ou n'exécutant que d'imperceptibles vibrations régies par des équations linéaires, on aurait eu de rapides courants d'une complication inextricable, se comportant d'ailleurs tout autrement que ne font des rayons lumineux.

Même avec les simplifications admises par Newton, ou l'hypothèse du vide autour de chaque atome d'éther, l'explication des phénomènes de réfraction dans le système de l'émission exigeait, comme on sait, des vitesses de ces atomes plus grandes dans les corps transparents que dans le vide, contrairement à ce qu'a montré depuis l'expérience.

néralement aux vibrations dans une suite d'ondes qui se propagent. Des lois entraînées par sa vérification *rigoureuse*, ou ne s'observant plus pour une forme *approximativement* pendulaire du mouvement, constitueraient de simples faits d'Analyse et seraient dépourvues de réalité, sauf peut-être dans des cas extraordinaires.

23. Étude d'un pinceau de lumière divergente ou émanée d'un centre d'ébranlement situé à distance finie : calcul des surfaces d'onde. — Les pinceaux de lumière parallèle étudiés aux numéros précédents sont, on le sait, un cas limite de ceux qui émanent d'un centre situé à distance finie, c'est-à-dire d'une région d'ébranlement bornée en tous sens, entourant l'origine; et il nous faut voir encore comment se comporte l'un quelconque de ceux-ci.

Essayons d'abord d'y dégager la forme et les dimensions successives de l'*onde initiale*, ou, en d'autres termes, les surfaces lieux des points (x, y, z) atteints *ensemble* par le mouvement, au bout de temps t_0 de plus en plus grands depuis l'instant $t = 0$ où le repos aura cessé dans la région d'ébranlement. Ce sont, évidemment, des surfaces fermées, entourant cette région et enveloppant, chacune, toutes les précédentes, si, du moins, on considère séparément leurs diverses nappes ou, séparément, chaque série distincte des mouvements susceptibles d'être provoqués simultanément dans la région centrale.

C'est, seulement, assez loin de celle-ci que nous pouvons espérer y trouver des lois simples, indépendantes de la forme qu'affecte le siège de l'excitation et des autres particularités de cette dernière. Ne considérons donc les surfaces $t_0 =$ const. qu'à des distances du centre très grandes, tout à la fois, par rapport aux dimensions de la région d'ébranlement et par rapport à une longueur d'onde lumineuse. Dans une petite étendue quelconque, de dimensions seulement comparables à cette longueur d'onde, les surfaces $t_0 =$ const. y auront, par raison de continuité, une courbure insensible, des inclinaisons mutuelles négligeables, et, entre elles, des espacements ou intervalles uniformes, si on les a construites pour des valeurs de t_0 équidistantes. Enfin, tous les points (x, y, z) s'y trouvant, à très peu près, disposés de même par rapport à chaque partie de la région d'ébranlement, les déplacements ξ, η, ζ devront y offrir sensiblement les mêmes séries de valeurs, ou n'être presque fonction que de la variable $t - t_0$. Autrement dit, les coordonnées de repos x, y, z n'y figureront, à une première approximation, que par l'intermédiaire du *retard* t_0 dont se trouvent affectés en (x, y, z) les ébranlements, comparativement à la région centrale. Bref, le mouvement se fera très sensiblement, dans l'espace

considéré, par ondes planes, d'amplitude uniforme et à propagation uniforme.

Or il suit de là que les vibrations y seront rectilignes, ou de celles dont on a donné les lois aux nos 12, 13 et 14; sans quoi (¹) elles constitueraient, sur une quelconque des surfaces d'onde $t_0 = \text{const.}$ choisie comme siège accessoire d'excitation, la superposition de trois pareils systèmes rectilignes de vibrations se transmettant séparément, à partir de là, chaque système avec sa vitesse spéciale de propagation, aux plans d'onde suivants, ou ne cheminant pas en commun, contrairement à l'hypothèse. Ainsi le mouvement, dans toute petite étendue assez éloignée de l'origine, consistera en ondes planes, tangentes aux surfaces $t_0 = \text{const.}$, et dont la vitesse ω de propagation, ainsi que l'orientation (l', m', n') des mouvements, seront définies par les équations (29) et (28) (p. 292) en fonction des cosinus directeurs $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$ de la normale aux surfaces $t_0 = \text{const.}$

En particulier, les ébranlements initiaux s'y transmettront avec la vitesse ω, de l'une quelconque de ces surfaces et suivant sa normale, aux surfaces voisines.

Cela posé, partons d'une première de nos surfaces d'onde $t_0 = \text{const.}$, intérieure à toutes les autres dont nous nous occuperons, ou telle que le paramètre t_0 y ait une petite valeur, τ_0, juste suffisante pour permettre d'appliquer les raisonnements précédents à toutes celles qui l'entourent.

Donnons-nous directement, et cette première surface, que nous appellerons σ_0, et la suite des mouvements vibratoires qui s'y effectuent, afin de pouvoir négliger les phénomènes, bien plus complexes, de l'espace intérieur. Menant à σ_0 le plan tangent, quelconque, dont la normale fait les angles α, β, γ avec les x, y, z positifs, nous appellerons p_0 sa distance à l'origine. Ce sera une fonction *donnée* des cosinus directeurs $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$ ou, plus précisément, de leurs rapports mutuels, fonction constamment *petite*, comparativement aux distances à l'origine de la plupart des points (x, y, z) où le mouvement admettra les lois simples que nous nous proposons d'établir.

Nous représentant alors l'ensemble des surfaces d'onde, à paramètre t_0 plus grand, qui entourent celle-là σ_0, nous pourrons mener à toutes le plan tangent normal à la direction fixe $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, de manière à avoir un espace continu, jalonné par la ligne des points de contact, où les ondes planes élémentaires soient parallèles, animées à très peu près de la *célérité* ω commune et à mouvements orientés

(¹) D'après ce qu'on a vu dans la note des pages 293 à 298.

dans la direction (l', m', n'), commune aussi. Soit p la distance à l'origine

$$p = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

de celui d'entre ces plans qui est tangent, en un point (x, y, z), à la surface d'onde quelconque dont le paramètre est t_0. La distance normale $p - p_0$ de ce plan tangent, au premier, franchie par l'onde initiale dans le temps $t_0 - \tau_0$, égalera sensiblement $\omega(t_0 - \tau_0)$; et l'on aura, comme équation approchée du plan tangent en question, d'orientation donnée, à la surface d'onde t_0,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p_0 + \omega(t_0 - \tau_0),$$

ou bien, en divisant par ω, isolant t_0 et rappelant que les quotients de $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$ par ω sont précisément nos paramètres l, m, n,

$$(71) \qquad t_0 = lx + my + nz + \left(\tau_0 - \frac{p_0}{\omega}\right).$$

On saura donc, à partir des plans tangents donnés de la petite surface d'onde intérieure σ_0, construire à très peu près leurs parallèles. tangents à toute autre surface d'onde, de paramètre plus grand t_0, puisqu'on connaîtra, au moins d'une manière approchée, les espacements respectifs $\omega(t_0 - \tau_0)$ de ces nouveaux plans aux premiers; et il ne restera plus, pour avoir la surface $t_0 = \text{const.}$, qu'à déterminer l'enveloppe de la famille de plans ainsi obtenue.

Observons que, dans l'équation (71), la différence $\tau_0 - \frac{p_0}{\omega}$ exprime un petit temps, de l'ordre de ceux qu'emploie la lumière à franchir la région des ébranlements, temps graduellement variable d'ailleurs avec les rapports mutuels de $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$, c'est-à-dire de l, m, n, ou qu'on peut supposer, comme p_0, fonction continue et donnée de l, m, n. Appelant ε_0 cette petite fonction, nous aurons donc à chercher l'enveloppe des plans

$$(72) \qquad lx + my + nz + \varepsilon_0 = t_0,$$

dépendant de paramètres l, m, n entre les différentielles desquels existe la relation (38) (p. 298). Comme la différentiation de (72) en l, m, n donnera

$$\left(x + \frac{d\varepsilon_0}{dl}\right)dl + \left(y + \frac{d\varepsilon_0}{dm}\right)dm + \left(z + \frac{d\varepsilon_0}{dn}\right)dn = 0,$$

il viendra, évidemment, pour déterminer le point quelconque (x, y, z)

de l'enveloppe, situé sur l'enveloppée (72), la double proportion

$$(73) \quad \frac{x+\dfrac{d\varepsilon_0}{dl}}{l-l'(ll'+mm'+nn')}=\frac{y+\dfrac{d\varepsilon_0}{dm}}{m-m'(ll'+mm'+nn')}=\frac{z+\dfrac{d\varepsilon_0}{dn}}{n-n'(ll'+mm'+nn')}.$$

Or, aux distances un peu grandes de l'origine, les seules que nous ayons en vue, ε_0 disparaît, dans (72), à côté de lx, my, nz, et les dérivées de ε_0 en l, m, n disparaissent de même, dans (73), comparativement à x, y, z. On obtient donc, surtout quant à la direction (x, y, z) des rayons aboutissant aux points de contact et quant à la forme affectée, autour de ces rayons, par les surfaces cherchées $t_0 =$ const., les mêmes enveloppes que si les ondes planes élémentaires (71) de toute direction étaient parties non de la surface centrale donnée σ_0, mais de l'origine. Ainsi, *aux distances de l'origine très grandes par rapport aux dimensions de la région d'ébranlement et par rapport à la longueur d'ondulation, les surfaces d'onde* $t_0 =$ const., *homothétiques entre elles, sont, à très peu près, les enveloppes d'ondes planes de toute orientation, parties simultanément de cette origine des coordonnées et s'étant, depuis, propagées uniformément, suivant les lois qui leur sont propres, durant les temps respectifs* t_0. L'une d'elles, correspondant à $t_0 = 1$, n'est donc autre que l'*onde de Fresnel* et se trouve apte à les représenter toutes.

24. Polarisation approchée des vibrations sur chaque rayon, et variations, suivant sa longueur, de l'amplitude de toute onde. — Ayant maintenant, du moins aux grandes distances r de l'origine, des données approchées sur t_0, qui s'y confond presque avec $lx+my+nz$, et sur ξ, η, ζ, presque égaux de même à $l'\delta$, $m'\delta$, $n'\delta$, nous pourrons poser, comme pour un pinceau de lumière parallèle,

$$(74) \qquad \xi = l'\delta + \varphi, \qquad \eta = m'\delta + \chi, \qquad \zeta = n'\delta + \psi,$$

formules où les cosinus directeurs l', m', n' du déplacement principal δ seront reliés, en chaque endroit (x, y, z), par les formules (21) et (24) (p. 290 et 291), à la direction $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ de la normale aux surfaces d'onde $t_0 =$ const. qui y passent, et où les trois composantes φ, χ, ψ du petit *écart*, ou déplacement *correctif*, perpendiculaire à δ, vérifieront la condition de cette perpendicularité

$$(75) \qquad l'\varphi + m'\chi + n'\psi = 0.$$

Le déplacement principal δ et φ, χ, ψ seront ainsi des fonctions rapidement variables de $t - t_0$, mais, en comparaison, lentement variables de x, y, z.

Imaginons qu'on ait construit, au lieu des rigoureuses surfaces d'onde $t_0 =$ const., lieux des points où l'agitation se manifeste à la fois, celles qui sont homothétiques de l'onde de Fresnel, ou qu'on aurait pour une région d'ébranlement réduite à l'origine et pour des mouvements obéissant en toute rigueur, dans chaque petit espace, aux lois des ondes planes. Elles donnent exactement, en chaque point (x, y, z),

$$t_0 = lx + my + nz \qquad \text{et aussi} \qquad \frac{dt_0}{d(x, y, z)} = (l, m, n),$$

vu la condition (35) (p. 297), y déterminant le point (x, y, z) commun au plan enveloppé et à sa surface enveloppe. Nous appellerons donc l, m, n, ou $\frac{\cos(\alpha, \beta, \gamma)}{\omega}$, en chaque point (x, y, z), les trois dérivées en x, y, z de cette valeur approchée $lx + my + nz$ de t_0, non de la valeur exacte. Alors, ε_1 désignant le petit excédent de celle-ci sur la valeur approchée, remplaçons $t - t_0$ par

$$(t - lx - my - nz) - \varepsilon_1.$$

Les fonctions rapidement variables de $t - t_0$ et lentement variables de x, y, z deviendront des fonctions rapidement variables de $t - lx - my - nz$ et de ε_1. Mais ε_1, constamment petit dans tout l'espace considéré, aura ses dérivées en x, y, z très faibles, ou variera *lentement* avec x, y, z. Donc, en définitive, δ, φ, χ, ψ ne seront fonctions rapidement variables que de l'expression $t - (lx + my + nz)$, expression où nous pourrons bien, encore, appeler simplement t_0 le trinome $lx + my + nz$; et elles seront, en outre, fonctions lentement variables de x, y, z, comme le sont déjà, aux distances considérées r de l'origine, les paramètres l, m, n, leurs fonctions ω, l', m', n' et même les cosinus directeurs $\frac{(x, y, z)}{r}$, reliés à l, m, n, des rayons $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ émanés de l'origine.

Bref, nous aurons simplifié notre variable principale $t - t_0$, sans perdre le droit d'appliquer aux formules (74) de ξ, η, ζ nos procédés approchés de différentiation (p. 303).

Les dérivées de t_0 en x, y, z étant l, m, n, on trouve successive-

ment, au lieu de (56) et (57) (p. 304),

$$\frac{d\xi}{dx} = -\,l(l'\delta' + \varphi') + \frac{\partial . l'\delta}{\partial x},$$

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = l^2(l'\delta'' + \varphi'') - l\frac{\partial . l'\delta'}{\partial x} - \frac{\partial . ll'\delta'}{\partial x}, \qquad \ldots;$$

et la première équation du mouvement, qu'on peut écrire

$$(76) \qquad o = -\frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} + \Delta_2\xi - \frac{d\theta}{dx},$$

devient aisément, au lieu de (58), après substitution de

$$(ll' + mm' + nn')\,\frac{l}{l'},$$

en vertu de (24) (p. 291), au coefficient total $l^2 + m^2 + n^2 - \frac{1}{a^2}$ de $l'\delta'' + \varphi''$ dans le résultat :

$$(76\,bis)\quad \left\{\begin{aligned} &(ll' + mm' + nn')\frac{l\varphi''}{l'} - l(l\varphi'' + m\chi'' + n\psi'') \\ &\quad = \left(l\frac{\partial . l'\delta'}{\partial x} + m\frac{\partial . l'\delta'}{\partial y} + n\frac{\partial . l'\delta'}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial . ll'\delta'}{\partial x} + \frac{\partial . ml'\delta'}{\partial y} + \frac{\partial . nl'\delta'}{\partial z}\right) \\ &\qquad - l\left(\frac{\partial . l'\delta'}{\partial x} + \frac{\partial . m'\delta'}{\partial y} + \frac{\partial . n'\delta'}{\partial z}\right) - \frac{\partial . (ll' + mm' + nn')\delta'}{\partial x}\Bigg). \end{aligned}\right.$$

Introduisons, ici encore, la fonction primitive, ou intégrale prise par rapport à la variable principale $t - t_0$,

$$(77) \qquad F = \int_{-\infty}^{t} \delta . dt = \int_{t=t_0}^{t=t} \delta . d(t - t_0),$$

et qui est, comme δ, une fonction rapidement variable de $t - t_0$, mais lentement variable de x, y, z, *initialement* nulle aussi en (x, y, z). La substitution de F'' à δ' permettra de remplacer $\varphi'', \chi'', \psi'', F''$, dans l'équation (76 *bis*) et dans ses deux analogues, par φ, χ, ψ, F, pourvu qu'on fasse précéder chaque terme du symbole de différentiation $\frac{d^2}{dt^2}$; et alors, deux multiplications successives par dt, suivies, chaque fois, d'une intégration faite *sur place,* à partir d'un instant où le repos primitif régnait encore en x, y, z, donnent :

$$(78)\quad \left\{\begin{aligned} &(ll' + mm' + nn')\frac{l\varphi}{l'} - l(l\varphi + m\chi + n\psi) \\ &\quad = \left(l\frac{\partial . l'F}{\partial x} + m\frac{\partial . l'F}{\partial y} + n\frac{\partial . l'F}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial . ll'F}{\partial x} + \frac{\partial . ml'F}{\partial y} + \frac{\partial . nl'F}{\partial z}\right) \\ &\qquad - l\left(\frac{\partial . l'F}{\partial x} + \frac{\partial . m'F}{\partial y} + \frac{\partial . n'F}{\partial z}\right) - \frac{\partial . (ll' + mm' + nn')F}{\partial x}, \end{aligned}\right.$$

avec deux relations analogues.

Éliminons φ, χ, ψ, comme nous l'avons fait des équations (59) (p. 305), en multipliant respectivement par l', m', n' et ajoutant. Si nous n'écrivons explicitement que les termes du résultat en $\frac{\partial}{\partial x}$, auxquels les autres seraient pareils, il viendra

$$o = ll'\frac{\partial.l'F}{\partial x} + l'\frac{\partial.ll'F}{\partial x} + lm'\frac{\partial.m'F}{\partial x} + m'\frac{\partial.lm'F}{\partial x} + ln'\frac{\partial.n'F}{\partial x} + n'\frac{\partial.ln'F}{\partial x}$$
$$-(ll'+mm'+nn')\frac{\partial.l'F}{\partial x} - l'\frac{\partial.(ll'+mm'+nn')F}{\partial x} + \ldots.$$

Multiplions par F; et chaque groupe explicite de deux termes constituera la dérivée d'un produit, savoir, la dérivée, en x, du produit $(ll'F)(l'F)$, ou $(lm'F)(m'F)$, ou $(ln'F)(n'F)$, etc. La somme des produits ainsi placés sous le symbole $\frac{\partial}{\partial x}$ sera

$$[l - l'(ll'+mm'+nn')]F^2,$$

expression où l'on peut substituer au coefficient de F^2 le produit du cosinus directeur correspondant $\frac{x}{r}$ du rayon, r, aboutissant au point (x, y, z), par un facteur, $\varkappa$, invariable le long de ce rayon r émané de l'origine.

On a vu, en effet (p. 319), que les trois différences

$$l - l'(ll'+mm'+nn'), \quad m - m'(ll'+mm'+nn'), \quad n - n'(ll'+mm'+nn')$$

sont entre elles comme les trois cosinus directeurs $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$; d'où résulte bien pour la première d'entre elles la valeur $\varkappa\frac{x}{r}$, si $\varkappa$ désigne l'un quelconque des trois rapports égaux.

L'équation obtenue s'écrit donc, en y rétablissant les termes seulement indiqués ci-dessus,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{F^2}{r}x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{F^2}{r}y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{F^2}{r}z\right) = o,$$

ou bien

$$\varkappa\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F^2}{r}x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F^2}{r}y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{F^2}{r}z\right)\right] + \frac{F^2}{r}\left(x\frac{\partial\varkappa}{\partial x} + y\frac{\partial\varkappa}{\partial y} + z\frac{\partial\varkappa}{\partial z}\right) = o.$$

Or le dernier terme triple est nul, à raison de ce fait que $\varkappa$ ne varie pas le long d'un même rayon, c'est-à-dire le long d'un chemin r où ∂x, ∂y, ∂z sont entre eux comme x, y, z. Il vient donc, après suppres-

sion du facteur $\varkappa$, pour régir la fonction principale F du problème, en *tant qu'elle dépend des variables accessoires x, y, z*, l'équation aux dérivées partielles très simple

$$(79)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{F^2}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{F^2}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{F^2}{r}\right)=0,\\ &\text{ou}\\ &x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F^2}{r}\right)+y\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F^2}{r}\right)+z\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{F^2}{r}\right)+3\frac{F^2}{r}=0.\end{aligned}\right.$$

Multiplions par $\frac{\partial r}{r}$ et imaginons que l'on suive, à partir de (x, y, z), le prolongement, ∂r, du rayon r, dont les projections ∂x, ∂y, ∂z ont les valeurs $\frac{(x, y, z)}{r}\partial r$. La fonction $\frac{F^2}{r}$ y croissant de

$$\partial\frac{F^2}{r}=\left(x\frac{\partial\frac{F^2}{r}}{\partial x}+y\frac{\partial\frac{F^2}{r}}{\partial y}+z\frac{\partial\frac{F^2}{r}}{\partial z}\right)\frac{\partial r}{r},$$

notre équation (79) deviendra

$$\partial\frac{F^2}{r}+3\frac{F^2}{r^2}\partial r=0,$$

ou, multipliée par r^3,

$$\partial\left(\frac{F^2}{r}r^3\right)=0,\qquad \partial(F^2r^2)=0\qquad\text{et enfin}\qquad \partial(Fr)=0.$$

Comme notre symbole ∂ de différentiation implique la constance de la variable principale $t-t_0$, ou suppose que l'on passe d'un point (x, y, z) de l'espace à un autre tout en restant sur une même onde, suivie au besoin dans son mouvement, l'équation obtenue exprime que *les valeurs de la fonction* F, *sur chaque onde courbe se propageant, sont inversement proportionnelles à la distance r au centre d'ébranlement, le long de tout rayon rectiligne émané de ce centre.*

Cette fonction F peut donc varier arbitrairement d'un point à l'autre de l'onde, considérée dans une de ses positions, et, par exemple, ne différer de zéro qu'à l'intérieur d'un cône étroit quelconque ayant pour sommet l'origine; mais ses valeurs décroissent, à mesure que l'onde s'éloigne du sommet, de manière que le produit Fr se conserve.

25. Conservation, par toute onde, de sa force vive, dans chaque pinceau ou rayon de lumière émané d'un centre. — Les valeurs

de F réalisées les unes après les autres, à des intervalles dt égaux, sur une première surface d'onde $t_0 =$ const., se succéderont aussi, par suite, en chaque point d'un rayon r, à des intervalles dt tout pareils, mais réduites dans un même rapport inverse de r; de sorte que les déplacements δ, exprimés par $\frac{dF}{dt}$ ou F', et les vitesses vibratoires δ', exprimées par F'', y seront encore inverses de r.

Cela posé, considérons, pour la suivre dans son mouvement, une onde courbe infiniment mince, figure variable comprise sans cesse entre deux surfaces d'onde $t_0 =$ const., et dont chaque rayon émané de l'origine croîtra avec une vitesse constante. La tranche d'éther, sans cesse changeante, qui occupera ou remplira l'espace de cette figure aura donc toujours même forme (superficielle), et sa direction, ainsi que son épaisseur, seront invariables à l'intérieur d'un cône quelconque infiniment aigu ayant le centre d'ébranlement pour sommet. Si $d\sigma$ désigne l'aire d'une de ses deux faces comprise dans un tel cône à la distance r du sommet, le volume et la masse de la tranche d'éther y seront représentés *proportionnellement* par $d\sigma$, tandis que la demi-force vive vibratoire le sera par $\frac{1}{2} d\sigma\, \delta'^2$ ou $\frac{1}{2} d\sigma F''^2$. Or le facteur F''^2 est, d'après (79), en raison inverse de r^2; mais le facteur $d\sigma$, par contre, est en raison directe de r^2. Donc le produit $\frac{1}{2} d\sigma F''^2$ reste constant; et *chaque onde élémentaire, tout en s'étendant ou se disséminant de plus en plus autour du centre qui l'émet, conserve intégralement,* comme nous l'avions annoncé (p. 287), *sa demi-force vive, le long de chaque rayon émané de ce centre, c'est-à-dire à l'intérieur de tout cône décrit du centre comme sommet.*

26. **Léger écart de la forme rectiligne, imposé aux déplacements par leur variation d'amplitude d'un point à l'autre d'une même onde et par la courbure des ondes.** — Grâce à la relation (79), régissant F et qui exprime, comme on a vu, la compatibilité de l'équation (78) et des deux autres analogues, ces trois équations linéaires en φ, χ, ψ n'en constituent que deux distinctes. En les joignant à (75), on aura donc le système du premier degré en φ, χ, ψ nécessaire et suffisant pour déterminer ces trois composantes du léger écart ou déplacement *correctif,* en fonction linéaire des petites dérivées $\frac{\partial}{\partial(x, y, z)}$, figurant aux seconds membres, des produits $l'F$, $m'F$, $n'F$, $(l, m, n)(l', m', n')F$. Ces produits, où l, m, n, l', m', n' ont leurs valeurs, invariables le long d'un même rayon r, déjà connues en x, y, z, se trouveront entièrement connus eux-mêmes, dès que l'on donnera F sur chaque onde, en ses différents points, à l'in-

stant où elle coïncide avec une surface unique $t_0 =$ const., choisie à volonté, puisque F, inverse de r sur chaque rayon, sera dès lors déterminé dans toutes les autres positions des diverses ondes.

Il y a lieu de remarquer que, si l'on suit chaque onde dans son expansion, le long d'un même rayon r, toutes les dérivées $\frac{\partial}{\partial(x, y, z)}$, figurant aux seconds membres de (78) et des équations adjointes, seront inverses de r^2. Elles s'expriment, en effet, linéairement, au moyen des trois dérivées analogues des mêmes produits prises, par exemple, suivant le prolongement du rayon r, à cosinus directeurs $\frac{(x, y, z)}{r}$, suivant la vibration δ perpendiculaire à ce rayon, ou ayant comme cosinus directeurs (l', m', n'), enfin, suivant l'élément ∂s de la direction (λ, μ, ν) rectangulaire aux deux précédentes. Or, dans le sens de r, où tous les produits en question sont inverses de r, leur dérivée sera comme celle de $\frac{1}{r}$, c'est-à-dire comme $\frac{1}{r^2}$. Et, suivant les deux autres directions, où le facteur $\frac{1}{r}$ sera constant, celle de ∂s, par exemple, l'autre facteur du produit considéré, invariable le long de chaque rayon r, aura sa dérivée inverse de r; car on pourra prendre celle-ci, quel que soit r, entre deux mêmes rayons voisins, de manière à obtenir une variation ∂ de ce facteur constante, mais divisée par un dénominateur ∂s, écart des deux rayons à la distance r du centre, proportionnel à r. La dérivée contiendra donc encore deux facteurs, inverses, chacun, de r.

Les petites perturbations φ, χ, ψ, éprouvées par le mouvement vibratoire hors de ses trajectoires rectilignes d'orientation (l', m', n'), décroîtront donc, aux grandes distances r du centre, beaucoup plus vite que le déplacement principal ou polarisé δ, savoir, comme le carré de celui-ci, puisque δ, ou F', est inversement proportionnel à r, alors que φ, χ, ψ le sont à r^2 (¹).

(¹) **Cas particulier d'un milieu isotrope.** — Les formules de ξ, η, ζ, qu'on n'a plus alors besoin d'exprimer en fonction de δ et de φ, χ, ψ, deviennent très simples quand le milieu transparent est *isotrope*, cas où, grâce à la relation $\theta = 0$, ces déplacements ξ, η, ζ sont *séparés*, dans les équations du mouvement devenues $\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} - \omega^2 \Delta_2(\xi, \eta, \zeta) = 0$.

L'équation en ξ, par exemple, se réduit immédiatement à

$$0 = \frac{\partial . l\xi'}{\partial x} + l\frac{\partial \xi'}{\partial x} + \frac{\partial . m\xi'}{\partial y} + m\frac{\partial \xi'}{\partial y} + \frac{\partial . n\xi'}{\partial z} + n\frac{\partial \xi'}{\partial z},$$

Supposons le mouvement, en chaque point (x, y, z), de brève durée et, en outre, *purement vibratoire* (p. 308), ou tel que la valeur moyenne générale du déplacement y ait été nulle, une fois le point (x, y, z) franchi par les ondes. On aura donc, *si t excède*

---

ou bien, en multipliant par dt et intégrant *sur place* à partir de l'époque $t = t_0$,

$$0 = \frac{\partial . l\xi}{\partial x} + l\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial . m\xi}{\partial y} + m\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial . n\xi}{\partial z} + n\frac{\partial \xi}{\partial z}.$$

Or celle-ci, multipliée elle-même par ξ, devient identiquement

$$\frac{\partial . l\xi^2}{\partial x} + \frac{\partial . m\xi^2}{\partial y} + \frac{\partial . n\xi^2}{\partial z} = 0,$$

c'est-à-dire, vu qu'ici $t_0 = \frac{r}{\omega}$ et $(l, m, n) = \frac{(x, y, z)}{\omega r}$,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\xi^2}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\xi^2}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\xi^2}{r}\right) = 0.$$

Traitée à la manière de (79) (p. 323), elle donne, comme valeur du produit ξr, une fonction arbitraire de $t - t_0$ (nulle pour $t < t_0$), mais *lentement* variable, en outre, avec les cosinus directeurs $\frac{(x, y, z)}{r}$ du rayon r.

On aurait des valeurs analogues pour les produits ηr, ζr.

Appelons respectivement F, F_1, F_2 les fonctions primitives, par rapport à $t - t_0$, de ces valeurs de ξr, ηr, ζr, c'est-à-dire les intégrales $\int_{-\infty}^{t}(\xi r, \eta r, \zeta r)\,dt$, nulles pour $t < t_0$. Nous aurons donc, en nous rappelant que les dérivées par rapport à la variable principale $t - t_0$ s'indiquent au moyen d'un accent $'$,

$$\xi = \left(\frac{F}{r}\right)', \qquad \eta = \left(\frac{F_1}{r}\right)', \qquad \zeta = \left(\frac{F_2}{r}\right)'.$$

Il en résulte, par exemple, pour $\frac{d\xi}{dx}$ (premier terme de θ), la valeur $-l\xi' + \frac{\partial \xi}{\partial x}$ ou $\left(-l\xi + \frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{r}\right)'$; et l'équation $\theta = 0$ devient

$$\left(-l\xi - m\eta - n\zeta + \frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{F_1}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{F_2}{r}\right)' = 0.$$

Enfin, cette relation, multipliée par $\omega\,dt$ et intégrée sur place à partir de l'instant $t = t_0$ où le repos régnait encore en (x, y, z), conduit, vu les valeurs ci-dessus de l, m, n, à l'expression de la *petite composante longitudinale* ou *radiale*, $\frac{x}{r}\xi + \frac{y}{r}\eta + \frac{z}{r}\zeta$, des déplacements :

$$\frac{x}{r}\xi + \frac{y}{r}\eta + \frac{z}{r}\zeta = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{F}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{F_1}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{F_2}{r}\right).$$

assez t_0 pour que le repos soit rétabli en (x, y, z), $\int_{t_0}^{t} \delta . dt = 0$, c'est-à-dire, vu (77), $F = 0$, et, par suite,

$$F' = \frac{dF}{dt} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial (x, y, z)} = 0.$$

Les valeurs non seulement de δ, mais aussi, d'après (75) et (78), de φ, χ, ψ, seront donc nulles en (x, y, z), une fois l'onde passée.

On voit que, dans de telles conditions, les formules (74) donneront à ξ, η, ζ, dès que t excédera sensiblement zéro, des valeurs nulles aux petites distances de l'origine et, en particulier, dans la région où s'étaient produits les ébranlements à l'instant $t = 0$. Admettons que notre corps transparent hétérotrope existe même dans cette région, ou que les ébranlements y aient eu pour cause, par exemple, les transformations d'une petite quantité de matière, insignifiante une fois son équilibre chimique atteint. Rien alors n'empêchera, si l'on veut, de considérer, pour les valeurs positives et sensibles de t, les expressions (74) de ξ, η, ζ, où δ, φ, χ, ψ auront les valeurs en F obtenues, comme des intégrales particulières des équations indéfinies du mouvement, c'est-à-dire de (76) et de ses analogues, étendues à tout l'espace, intégrales valables même dans la région centrale pour laquelle elles n'avaient pas été démontrées, puisqu'elles s'y réduiront à zéro [1].

---

[1] **Justification de la méthode de Fresnel pour le calcul approché des phénomènes de diffraction.** — Quand, au contraire, le repos ne se rétablit pas au centre, comme, par exemple, quand les ébranlements sont périodiques et ξ, η, ζ partout *pendulaires*, relativement à la variable $t - t_0$, nos intégrales (74), infinies pour $r = 0$, restent évidemment inapplicables aux distances, r, du centre, comprenant trop peu de longueurs d'onde pour motiver les raisonnements qui nous les ont fournies. Mais rien n'empêchera de se servir de ces intégrales et même, pour obtenir des intégrales approchées plus générales, d'en superposer une infinité, à centres des distances r coïncidants ou différents à volonté, *pourvu que l'on situe tous ces centres assez en dehors des régions de l'éther où l'on aura à étudier le mouvement vibratoire*, par exemple, *sur une surface construite à une dizaine de longueurs d'onde, en arrière de la limite des régions dont il s'agit,* limite qui sera une *onde excitatrice* ou, plus généralement, une surface choisie comme lieu de petits déplacements ξ, η, ζ donnés, à suivre dans leur propagation ultérieure. En prenant les déplacements fictifs δ, dans chacune de ces intégrales particulières et sur la surface correspondante d'onde qui touche l'onde excitatrice, proportionnels aux déplacements effectifs donnés devant se produire, *un quart de période après,* sur l'onde excitatrice elle-même, à son point de contact avec cette surface, et en admettant d'ailleurs, sur celle-ci, un évanouissement gradue de la fonction δ aux distances sensibles du même point de contact, la superposi-

27. Du mouvement de l'éther dans les régions d'ébranlement : tentative pour l'exprimer à l'intérieur d'un corps isotrope. — Nous n'avons considéré que la *propagation* du mouvement de l'éther autour des régions d'ébranlement, et non sa naissance ou *émission* dans ces régions mêmes, au contact des molécules pondérables *lumineuses* que font vibrer, par exemple, des attractions et répulsions chimiques en train d'y modifier les groupements d'atomes. Il est clair, en effet, que nos équations aux dérivées partielles, établies dans l'hypothèse de molécules à très peu près *immobiles,* ne peuvent, en général, s'appliquer à une telle production du mouvement par la matière pondérable même.

Toutefois, une certaine manière de procéder, familière aux géomètres, permet d'en aborder le problème avec ces équations, mais non, il est vrai, sans l'altérer profondément. Elle consiste à admettre, par exemple, dans un corps contenant en quantité minime une substance chimiquement altérable, l'*instantanéité* de transformation de celle-ci, qui, à un moment donné pris comme origine, communique-

---

tion de toutes les intégrales particulières analogues reproduit, sur l'onde excitatrice, les déplacements effectifs et constitue, par suite, l'intégrale approchée du problème des mouvements issus de cette onde excitatrice. Telle est, au fond, la marche qu'a suivie Fresnel (par l'application du principe d'Huygens), dans sa *Théorie de la diffraction,* que donnent les Traités de Physique : il a seulement négligé de placer un peu en arrière de l'onde excitatrice les centres des ondes secondaires ou fictives et de mettre les mouvements, sur ces ondes, en avance d'un quart de période sur les mouvements effectifs; ce qui entraîne, dans les calculs de *phases,* un retard constant d'un quart d'onde, dont les physiciens sont d'ailleurs convenus de faire abstraction.

Dans les phénomènes de diffraction offerts par les ondes liquides périodiques dues à la pesanteur, dans ceux, par exemple, d'une houle circulaire qu'un écran vertical intercepte à moitié, la même méthode s'applique. Mais, la propagation ne se faisant que suivant les deux sens horizontaux, l'avance à attribuer aux ondes fictives ou partielles, sur l'onde vraie, est seulement d'un huitième de période, au lieu du quart. On peut voir, à ce sujet, les paragraphes VIII et IX de ma *Théorie des ondes liquides périodiques* (*Recueil des Savants étrangers* de l'Académie des Sciences de Paris, t. XX, 1872).

Toutefois, dans les phénomènes dont il s'agit, le mouvement, fût-il devenu exactement périodique (comme on l'admet d'ordinaire), ne l'aura pas toujours été; car le milieu transparent, indéfiniment étendu, par hypothèse, au delà de la surface d'ébranlement, est supposé s'être trouvé d'abord en repos. Vu l'absence admise de toute source d'énergie vibratoire dans son intérieur, les déplacements y sont même nuls encore, tant aux distances infinies de l'origine, sur une sphère d'un rayon assez grand, censée (pour bien définir la question) le limiter au moins d'un côté, que sur la partie de la surface d'ébranlement rejoignant cette sphère, où l'on *se donnera* des amplitudes sans cesse nulles, lorsque cette surface

rait à l'éther une certaine force vive et puis, son équilibre intérieur atteint, rentrerait en repos et serait désormais perdue dans la masse. Des *secousses* analogues, imprimées à l'éther, pourraient d'ailleurs se succéder à d'assez brefs intervalles, chacune survenant dès que la force vive due à la précédente se serait presque dissipée tout autour.

L'action des particules lumineuses, ou, ce qui revient au même, la *communication* à l'éther *de leur énergie vibratoire*, se trouve ainsi *confinée*, en quelque sorte, dans des conditions d'*état initial* exprimant que, pour $t = 0$, les déplacements ξ, η, ζ de l'éther sont nuls, mais ses vitesses, $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$, égales à trois fonctions *censées connues* de x, y, z; et les équations indéfinies ordinaires s'appliquent *aux époques ultérieures*, où il ne reste d'agissantes que les forces élastiques de l'éther, avec les *résistances* des molécules interposées du corps transparent. C'est, au fond, ou à proprement parler, traduire très infidèlement le rôle de la substance lumineuse et soustraire à l'Analyse, artificiellement, faute de savoir l'y soumettre, l'*introduction* de l'énergie vibratoire dans l'éther, pour ne garder que l'étude de sa *diffusion;* car,

---

ne sera pas fermée et comprendra une telle partie, d'étendue indéfinie, achevant de limiter le milieu.

Il y a donc, implicitement, pour compléter la détermination du problème, une condition définie, en partie d'*état initial* et, en partie, relative aux points très distants de l'origine, qui oblige à n'admettre, à toute époque t, qu'une demi-force vive *totale* négligeable aux distances infinies de l'origine. Or, avec des déplacements ξ, η, ζ, sur la surface d'ébranlement donnée, périodiques *depuis un temps infini*, cette condition ne saurait être satisfaite, surtout par la solution obtenue; car, outre la contradiction de tels déplacements avec l'hypothèse du repos primitif, une énergie notable ne peut que s'y trouver déjà propagée, et qu'être disséminée par unité de temps, jusqu'aux plus grandes distances assignables de l'origine.

Mais on vérifiera la condition en question, en introduisant dans les formules, censées données, de ξ, η, ζ sur la surface d'ébranlement, un facteur commun du genre de $e^{\epsilon t}$, avec ϵ positif et très petit, facteur lentement évanouissant pour les valeurs négatives très grandes de sa variable, mais pouvant d'ailleurs s'écarter peu à peu de la forme exponentielle, pour devenir, par exemple, constant dès que sa variable approchera d'une valeur finie désignée. La présence de ce facteur ne complique en rien les raisonnements classiques qui légitiment la décomposition du mouvement en une infinité de systèmes d'ondes élémentaires ayant, chacun, un centre distinct; et elle assure évidemment le repos dans tout le milieu pour $t = -\infty$, ainsi que l'annulation asymptotique, à toute époque t, de la demi-force vive totale disséminée aux distances infinies de la surface d'ébranlement, là où la variable $t - lx - my - nz$ est infinie négative dans tous les systèmes élémentaires d'ondes, et où s'évanouit le facteur $e^{\epsilon(t-lx-my-nz)}$, même après avoir été élevé à une puissance quelconque, multiplié par l'élément $dx\,dy\,dz$ de volume et intégré dans un champ infini.



dans la mise en mouvement de l'éther il y a, *ordinairement*, autant continuité d'action, sur chaque particule éthérée, de la part du corps lumineux, que de celle des particules éthérées voisines. Et l'on ne peut pas plus y reléguer dans les conditions d'état initial l'effet d'une de ces catégories de forces que l'effet de l'autre, tous deux se produisant en même temps et devant dès lors figurer *ensemble* dans les équations *indéfinies*.

Ce sera donc, tout au plus, dans le cas d'une simple *explosion* que l'on pourra accepter l'hypothèse de l'instantanéité d'action de la substance lumineuse; et nous devrons nous y borner. Nous supposerons aussi homogène et isotrope notre corps transparent; et nous admettrons même que les vitesses initiales imprimées à l'éther vérifient la condition

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{d^2\xi}{dx\,dt} + \frac{d^2\eta}{dy\,dt} + \frac{d^2\zeta}{dz\,dt} = 0,$$

sans laquelle interviendraient, pour limiter les déplacements (t. I, p. 51 et 52), des forces jusqu'à présent inconnues, autres que celles en jeu dans les très petits mouvements vibratoires, seuls régis par nos équations [1].

---

[1] Supposons que l'on ait, par exemple, *initialement*,

$$\frac{d^2\xi}{dx\,dt} + \frac{d^2\eta}{dy\,dt} + \frac{d^2\zeta}{dz\,dt} = 4\pi\chi(x, y, z),$$

où χ désignera dès lors une fonction donnée, nulle hors de la région des ébran lements. Nous calculerons, pour tous les points (x, y, z) de l'espace, le potentiel newtonien U relatif à une masse fictive concentrée dans la région d'ébranlement et dont, en chaque point (x_1, y_1, z_1) de celle-ci, la densité serait $\chi(x_1, y_1, z_1)$, de manière à avoir une fonction U de x, y, z nulle pour x, y ou z infinis et vérifiant partout, d'après la formule de Poisson, l'équation $\Delta_2 U = -4\pi\chi(x, y, z)$. Alors, si nous posons

$$\xi = -t\frac{dU}{dx} + \xi', \qquad \eta = -t\frac{dU}{dy} + \eta', \qquad \zeta = -t\frac{dU}{dz} + \zeta',$$

et

$$\frac{d\xi'}{dx} + \frac{d\eta'}{dy} + \frac{d\zeta'}{dz} = \theta',$$

il viendra

$$\theta = -t\Delta_2 U + \theta' = 4\pi t\chi(x, y, z) + \theta';$$

et les équations régissant θ, savoir,

$$(\text{pour } t > 0) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0, \qquad (\text{pour } t = 0) \quad \theta = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\theta}{dt} = 4\pi\chi(x, y, z).$$

Enfin, pour simplifier les formules autant que possible, adoptons comme unité de longueur l'espace ω que les ondes planes franchissent par unité de temps dans le milieu étudié, de manière que les équations indéfinies du problème soient simplement

$$\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} = \Delta_2(\xi, \eta, \zeta). \tag{80}$$

Les trois fonctions ξ, η, ζ étant séparées, chacune se déterminera indépendamment des deux autres; et, par exemple, le déplacement ξ suivant les x s'obtiendra par l'intégration de l'*équation du son,*

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Delta_2\xi,$$

dans un espace indéfini, sous les deux conditions, d'*état initial*, que, pour $t = 0$, ses valeurs ξ_0 soient nulles, mais les vitesses correspondantes $\frac{d\xi}{dt}$, exprimées par une fonction $f(x_1, y_1, z_1)$ donnée en tous

---

deviendront

$$(\text{pour } t > 0) \quad \frac{d^2\theta'}{dt^2} = 0, \qquad (\text{pour } t = 0) \quad \theta' = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\theta'}{dt} = 0.$$

Ainsi, θ' sera nul à toute époque t positive.

D'autre part, les équations indéfinies en ξ, η, ζ,

$$\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} = \omega^2\left[\Delta_2(\xi, \eta, \zeta) - \frac{d\theta}{d(x, y, z)}\right],$$

deviendront, de leur côté,

$$\frac{d^2(\xi', \eta', \zeta')}{dt^2} = \omega^2\left[-t\frac{d\Delta_2 U}{d(x, y, z)} + \Delta_2(\xi', \eta', \zeta') + t\frac{d\Delta_2 U}{d(x, y, z)}\right],$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2(\xi', \eta', \zeta')}{dt^2} = \omega^2\Delta_2(\xi', \eta', \zeta');$$

et les valeurs initiales de ξ', η', ζ' seront nulles comme celles de ξ, η, ζ, tandis que leurs dérivées premières en t, sommes de $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ et de $\frac{dU}{d(x, y, z)}$, seront connues en fonction de x, y, z. Donc, si l'on admet que les parties de ξ, η, ζ proportionnelles à t, c'est-à-dire $-t\frac{dU}{d(x, y, z)}$, étant *indéfiniment croissantes* et *non vibratoires*, sont détruites par des résistances spéciales (quoique encore inconnues) se développant dans l'éther lors des grandes déformations, il ne restera que les déplacements appelés ξ', η', ζ' : or ceux-ci correspondent à une dilatation cubique θ' nulle ou n'entraînent aucun changement de densité.

les points (x_1, y_1, z_1) de la région d'ébranlement. Il résulte immédiatement de l'intégrale classique de Poisson ([1]), pour le déplacement ξ à l'époque t et au point quelconque (x, y, z) soit intérieur, soit extérieur à la région d'ébranlement, la formule très simple

$$(81) \qquad \xi = \frac{1}{4\pi t}\int_\sigma f(x_1, y_1, z_1)\,d\sigma = t\int_\sigma f(x_1, y_1, z_1)\frac{d\sigma}{\sigma},$$

où σ désigne l'aire $4\pi t^2$ d'une sphère de rayon t décrite autour du centre (x, y, z), et où l'intégration $\int_\sigma$ s'étend à tous les éléments de cette aire, $d\sigma$, dont (x_1, y_1, z_1) sont les coordonnées.

Chaque vitesse initiale $f(x_1, y_1, z_1)$ influe donc, au bout d'un temps t quelconque, sur les petits déplacements ξ des points (x, y, z) dont la distance au *siège* (x_1, y_1, z_1) où elle s'était produite égale justement t; ce qui montre que l'influence de tout ébranlement élémentaire se propage autour de son siège avec la vitesse *un* (c'est-à-dire avec celle même ω des ondes planes, prise pour unité), mais en ne se faisant sentir, dans notre milieu à *trois* dimensions, qu'à cette distance précise, ou pas plus en deçà qu'au delà. Enfin, on voit, sur le troisième membre de (81), que le déplacement ξ, en un point (x, y, z) quelconque, est le produit, par le temps écoulé t, de la *moyenne* des vitesses initiales correspondantes $f(x_1, y_1, z_1)$ y exerçant *actuellement* leur influence, ou dont les sièges sont les divers éléments $d\sigma$ de la sphère de rayon t décrite autour de (x, y, z) comme centre, ceux d'entre eux qui seraient hors de la région d'ébranlement (et où $f = 0$) devant *faire nombre* comme les autres.

Il est clair que l'état primitif de repos se trouvera rétabli au centre (de gravité) de la région d'ébranlement, au bout du temps qu'emploierait une onde plane à franchir perpendiculairement son plus grand rayon; et qu'il le sera sur tout le contour de la même région, non moins que dans l'intérieur, au bout du temps nécessaire pour le parcours analogue de son plus grand diamètre par une telle onde.

28. Lois du mouvement aux grandes distances de la région d'ébranlement. — Mais n'insistons pas sur les conséquences qu'on pourrait tirer de la formule (81) pour ce qui concerne la région d'ébranlement. Tâchons plutôt d'en déduire les lois du mouvement,

---

([1]) *Voir*, par exemple, mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, *Compléments*, p. 445*).

aux *grandes* distances r du centre de cette région, sur un même rayon *fixe* en émanant prolongé à l'infini, afin de contrôler, du moins dans le cas étudié ici d'un milieu isotrope, les résultats de notre méthode d'intégration par approximations successives exposée précédemment.

Il faudra donc, après avoir pris comme centre le point de ce rayon situé à la *grande* distance r, d'ailleurs quelconque, de l'origine, mener des sphères d'un rayon, t, *assez peu différent de* r pour qu'elles intersectent la région d'ébranlement, et évaluer, sur chaque *coupe* ainsi obtenue, l'intégrale $\int_\sigma f(x_1, y_1, z_1)\,d\sigma$. Mais r et, par suite, t étant très grands *à côté des dimensions de la région d'ébranlement* (car c'est justement ce que l'on suppose en admettant la grandeur de r), la coupe en question se confondra sensiblement avec une *section plane* perpendiculaire au rayon r. Appelons X une *abscisse* comptée positivement suivant le prolongement du rayon r en deçà de l'origine et mesurant la distance de la section à cette origine. On aura $t = r + X$; et l'intégrale correspondante $\int_\sigma f(x_1, y_1, z_1)\,d\sigma$ sera une certaine fonction de cette abscisse X, $\varphi(X)$, produit de l'aire de la section plane par la valeur moyenne qu'y a reçue la vitesse initiale $f(x_1, y_1, z_1)$. Le second membre de (81) donnera donc $\xi = \frac{\varphi(X)}{4\pi t}$, ou bien, en n'altérant que dans un très petit rapport le dénominateur t,

$$\xi = \frac{\varphi(X)}{4\pi r} = \frac{\varphi(t-r)}{4\pi r}. \tag{82}$$

Ce déplacement ξ sera évidemment nul en dehors des limites $t - r = X_0$ et $t - r = X_1$, valeurs des abscisses X, la première, négative, la seconde, positive, des deux sections extrêmes faites par les plans menés, perpendiculairement au rayon r, tangents à la région d'ébranlement. Mais on voit qu'entre ces limites, si l'on suit une *même* onde le long d'un rayon r, ou que, cheminant avec la vitesse 1, on y maintienne invariable la différence $t - r = X$, ξ sera bien inverse de r, conformément à la loi établie plus haut (p. 324) [1].

[1] Dans la question, plus générale, où l'on considérerait non pas seulement l'effet d'une explosion instantanée, mais le mouvement consécutif à un état initial quelconque, il y aurait, outre les *vitesses initiales* $f(x_1, y_1, z_1)$, des déplacements ξ *initiaux*, exprimés par une fonction donnée $\xi_0(x_1, y_1, z_1)$, nulle



Prenons, pour une même particule d'éther, située en (x, y, z) sur notre rayon donné et à la distance r de l'origine, l'intégrale $\int \xi\, dt$, ou $\int \xi\, dX$, entre les deux limites X_0 et X_1, où ξ y diffère de zéro. Nous aurons

$$(83) \qquad \int \xi\, dt = \frac{1}{4\pi r}\int_{X_0}^{X_1} \varphi(X)\, dX = \frac{1}{4\pi r}\int_{X_0}^{X_1} dX \int_\sigma f(x_1, y_1, z_1)\, d\sigma.$$

Or, ici, l'élément $f(x_1, y_1, z_1)\, d\sigma\, dX$ de l'intégrale du dernier membre est le produit de chaque élément $d\sigma\, dX$, ou $d\varpi$, de la région d'ébranlement, par la vitesse initiale $f(x_1, y_1, z_1)$ qui s'y observait dans le sens des x aux premiers instants du phénomène étudié : et, à un facteur constant près, il mesure la quantité de mouvement, suivant les x, créée à l'époque $t = 0$ dans cet élément $d\varpi$ d'espace. En effet, la quantité de mouvement, suivant chaque axe, de la matière pondérable a, dans un corps isotrope transparent vibrant lumineusement, un rapport constant, par unité de volume, à celle de l'éther (t. I, p. 73); d'où il suit que la quantité totale de mouvement suivant

---

(comme f) en dehors d'une étendue limitée analogue à notre région d'ébranlement. Et l'on sait que le second membre de (81) s'accroîtrait alors du terme

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{4\pi t}\int_\sigma \xi_0(x_1, y_1, z_1)\, d\sigma.$$

Or il est clair que l'intégrale $\int_\sigma \xi_0(x_1, y_1, z_1)\, d\sigma$ y serait, sur les coupes sensiblement planes faites, perpendiculairement à un *grand* rayon r, dans cette étendue, une certaine fonction $\psi(X)$ de leur distance X à l'origine; en sorte que l'on aurait alors, à très peu près,

$$\frac{1}{4\pi t}\int_\sigma \xi_0(x_1, y_1, z_1)\, d\sigma = \frac{\psi(X)}{4\pi r} = \frac{\psi(t-r)}{4\pi r}.$$

L'expression de ξ, encore inverse de r dans la *même* onde suivie le long d'un *même* rayon émané de l'origine, serait donc, au lieu de (82),

$$(82\ bis) \qquad \xi = \frac{\varphi(t-r) + \psi'(t-r)}{4\pi r} = \frac{\Phi(X) - \psi'(X)}{4\pi r}.$$

Il est clair que cette intégrale plus complète s'appliquerait au calcul des mouvements *consécutifs* non pas à une simple explosion, mais à une action chimique *d'une certaine durée*, pourvu que les produits qu'elle aurait donnés ne troublassent pas sensiblement, d'une manière durable, la transparence, l'homogénéité et l'isotropie du milieu, ou ne fussent pas un obstacle à l'emploi exclusif des équations de mouvement (80).

les x, en jeu *dans l'unité de volume*, est bien proportionnelle à la vitesse $\frac{d\xi}{dt}$ de l'éther. Si donc on appelle, d'une part, Q_x, au même facteur constant près, la quantité *totale* de mouvement suivant les x introduite initialement dans le milieu, d'autre part, T la durée du mouvement en (x, y, z) et ξ_m la valeur *moyenne* que le déplacement ξ y reçoit pendant ce temps T, la formule (83) deviendra

$$(84) \qquad \int \xi \, dt \quad \text{ou} \quad \xi_m T = \frac{Q_x}{4\pi r}.$$

Or le phénomène étudié ici est dû à une *explosion*, c'est-à-dire à des actions de très courte durée *essentiellement intérieures*, ou incapables d'imprimer aucun mouvement au centre de gravité général de la matière ébranlée.

La quantité totale Q_x de mouvement suivant les x est donc nulle ([1]); et l'équation (84) donne simplement

$$(85) \qquad \xi_m = 0.$$

Ainsi *le mouvement produit par l'explosion est purement oscillatoire* ou *vibratoire;* et, supposé qu'on le calcule par notre méthode d'intégration à approximations successives, il n'y donnera pas de ces petits déplacements *résiduels,* lents à s'évanouir, qui, prolongeant le phénomène après la disparition des déplacements principaux, mettaient en défaut la méthode ([2]).

([1]) Nous admettons, comme on voit, que ses éléments, les uns, positifs, les autres, négatifs, s'emploient tout entiers en petites vitesses régies par nos équations ou, s'il s'en produit d'espèce différente, que celles-ci s'éteignent à peu près sur place et correspondent ainsi, séparément, à une quantité algébrique de mouvement égale à zéro.

([2]) Quand on étudie les mouvements de l'éther consécutifs à une action chimique de quelque durée, ou que la formule (82) fait place à (82 *bis*), le terme $\frac{1}{4\pi r}\int_{X_0}^{X_1} \psi'(X)\,dX$ s'ajoute au second membre de (83). Mais il a pour valeur $\frac{\psi(X_1) - \psi(X_0)}{4\pi r}$, c'est-à-dire zéro, vu que ξ_0 et, à plus forte raison, ψ s'annulent à chacune des deux limites X_0, X_1 de la région totale ébranlée à la fin des phénomènes chimiques. Ainsi, la formule (84) reste applicable. Par suite, la quantité Q_x de mouvement étant encore nulle (toujours comme due uniquement à des actions intérieures), rien n'est changé à nos conclusions; et le *mouvement,* en chaque point, *est purement oscillatoire.*



On voit par la formule (84) que si, au contraire, la cause du phénomène avait pu donner une quantité Q_x de mouvement différente de zéro, la durée T des déplacements ξ de chaque particule d'éther aurait été en raison inverse de leur grandeur moyenne ξ_m, ou aurait rendu les déplacements d'autant plus lents à se produire et à disparaître qu'ils auraient été, en somme, plus faibles. C'est bien conforme à la prévision suggérée plus haut (p. 308) par notre méthode approchée d'intégration.

29. Distribution arbitraire de l'énergie des ondes dans les diverses directions, ou possibilité de pinceaux lumineux latéralement limités. — Examinons enfin comment la formule (82) permettra de faire varier *arbitrairement*, quoique graduellement, le déplacement ξ sur une même onde, avec l'orientation du rayon r où on l'observe. Il nous suffira d'imaginer pour la région d'ébranlement et pour la fonction $f(x_1, y_1, z_1)$ des formes respectives telles que l'énergie vibratoire se concentre dans un cône aigu de rayons ayant son sommet à l'origine; car, la solution correspondante une fois exprimée, la superposition de solutions analogues, où le cône dont il s'agit prendrait successivement toutes les orientations, fournira l'intégrale plus complexe demandée des équations (80) du mouvement.

Or l'énergie vibratoire se trouve concentrée, dans l'onde, autour d'un rayon unique r, quand on donne, d'une part, à la région d'ébranlement la forme d'un *disque* ou plutôt d'un cylindre aplati, ayant ses bases B perpendiculaires à ce rayon, et, d'autre part, à la fonction $f(x_1, y_1, z_1)$, des valeurs variables seulement avec la distance D (négative sur le rayon r, positive en deçà) à la grande section diamétrale du disque, ou uniformes sur toute section faite dans le disque parallèlement aux bases, sauf l'évanouissement plus ou moins rapide que leur impose, à l'approche du contour, la continuité admise dans les conditions du mouvement.

En effet, si l'on prend alors comme centre des sphères de rayon t coupant le disque tout point (suffisamment éloigné) du rayon r normal aux bases B, les intégrales $\int f(x_1, y_1, z_1)\, d\sigma$ seront le produit de la valeur, que j'écrirai F(D), de $f(x_1, y_1, z_1)$ sur la section plane d'abscisse $D = t - r$, par l'aire même B de cette section, ou plutôt par une aire légèrement inférieure; et la formule (82) donnera sensiblement

$$\text{(86)} \qquad \text{(sur l'axe)} \quad \xi = \frac{BF(D)}{4\pi r} = \frac{BF(t-r)}{4\pi r},$$

expression nulle en dehors des limites $t - r = \mp h$, h désignant la demi-hauteur du disque.

Or, quand on se place, au contraire, sur un rayon r incliné d'un angle notable par rapport au précédent, ou sensiblement oblique sur les bases du disque, les sections faites dans celui-ci normalement à ce nouveau rayon, étroites bandes comprises entre les deux bases, ont une dimension de l'ordre seulement de la hauteur $2h$ et sont beaucoup plus petites que B. Mais, surtout, elles découpent des aires à peu près pareilles dans tous les *feuillets* superposés d'éther, où $f(x_1, y_1, z_1)$ reçoit ses diverses valeurs $F(D)$, *dont la moyenne est nulle*. Pour ces deux raisons, l'intégrale $\int_\sigma f(x_1, y_1, z_1)\, d\sigma$ s'y trouve annihilée, comparativement à sa valeur $BF(D)$ dans (86); et l'on a bien, très sensiblement, $\xi = 0$, en dehors d'un cône aigu ayant son axe normal aux bases du disque.

Si la moyenne des vitesses initiales $\frac{d\xi}{dt}$ pouvait différer de zéro et que, par exemple, $F(D)$ fût constant dans une région *discoïde* d'ébranlement à bases circulaires de rayon R, le mouvement ne serait plus à beaucoup près, comme on voit, aussi concentré, dans l'onde, suivant l'axe prolongé du disque. On aurait, d'après (86),

$$\xi = \frac{FB}{4\pi r} = \frac{FR^2}{4r}, \tag{87}$$

sur cet axe, à la distance r du centre. Mais, les sections planes faites dans le disque normalement à un axe perpendiculaire, ou pour un point du *plan équatorial* du disque, étant des rectangles de hauteur $2h$, de base $2\sqrt{R^2 - (t-r)^2}$, et de surface $4h\sqrt{R^2 - (t-r)^2}$, on aurait, pour ces points du plan équatorial, à la même distance r du centre,

$$\xi = \frac{Fh\sqrt{R^2 - (t-r)^2}}{\pi r}, \tag{88}$$

valeur dont le rapport à la précédente (87), $\frac{4}{\pi}\frac{h}{R}\sqrt{1 - \left(\frac{t-r}{R}\right)^2}$, peut atteindre $\frac{4}{\pi}\frac{h}{R}$ ou est seulement de l'ordre de petitesse du rapport même de la hauteur $2h$ du disque à son diamètre $2R$. Cette valeur existe d'ailleurs, ou diffère de zéro, entre les limites $t - r = \pm R$, tandis que la précédente (87) n'existe qu'entre les limites beaucoup plus rapprochées $t - r = \pm h$. Autrement dit, les déplacements les plus petits durent le plus longtemps, comme la formule (84) nous l'avait indiqué.

TROISIÈME PARTIE.

RÉFLEXION ET RÉFRACTION.

---

30. **Recherche de conditions spéciales à la limite des corps : impossibilité d'admettre celles de la théorie de l'élasticité, dans un éther indifférent aux mouvements longitudinaux.** — Nos équations du mouvement de l'éther paraissant propres à représenter la propagation de la lumière dans un corps homogène, il y a lieu de voir si elles réussiront aussi bien à exprimer ce qui se passe à la surface de séparation de deux corps homogènes distincts. Cherchons donc à traiter ce nouveau problème.

Pourvu que l'épaisseur de la *couche de transition,* ou *hétérogène,* située à la limite commune des deux corps, ne soit qu'une fraction insensible de la longueur d'onde, on sait qu'il suffira de mettre en œuvre les équations de mouvement, *à coefficients constants,* des deux milieux homogènes contigus, à la condition, toutefois, de connaître six relations distinctes, entre ce que deviendront dans les deux milieux respectifs, à leur limite commune, les trois petits déplacements ξ, η, ζ, bien continus dans chacune, et leurs dérivées partielles premières en x, y, z. En effet, ces sortes d'équations, dites *relations définies* ou *conditions à la surface séparative,* dont l'adjonction aux équations indéfinies propres aux deux milieux est nécessaire pour déterminer les problèmes, sont au nombre de *deux* pour chaque fonction inconnue comme ξ, ou η, ou ζ, quand les équations indéfinies sont du second ordre en x, y, z.

Si l'éther agissait lors du rapprochement de ses couches parallèles, ou que la vitesse de propagation des ondes longitudinales n'y eût pas son carré nul, ces relations définies se baseraient, comme dans les autres problèmes de la théorie de l'élasticité, sur l'égalité des pressions supportées par les deux faces de la couche de transition. Mais, à raison de la nullité de la pression normale, sur chaque face d'une couche, quand cette couche varie légèrement d'épaisseur, les trois dérivées secondes directes $\frac{d^2\xi}{dx^2}$, $\frac{d^2\eta}{dy^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dz^2}$ disparaissent des équations indéfinies du mouvement, comme on le voit dans (6) (p. 272), en

développant les seconds membres. Ces équations, divisées par μ, sont effectivement

$$(89)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\rho(1+A)}{\mu}\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{\rho F}{\mu}\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{\rho E'}{\mu}\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{d\xi}{dy}-\frac{d\eta}{dx}\right)-\frac{d}{dz}\left(\frac{d\zeta}{dx}-\frac{d\xi}{dz}\right),\\ &\frac{\rho F'}{\mu}\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{\rho(1+B)}{\mu}\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{\rho D}{\mu}\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{d\eta}{dz}-\frac{d\zeta}{dy}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{d\xi}{dy}-\frac{d\eta}{dx}\right),\\ &\frac{\rho E}{\mu}\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{\rho D'}{\mu}\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{\rho(1+C)}{\mu}\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\zeta}{dx}-\frac{d\xi}{dz}\right)-\frac{d}{dy}\left(\frac{d\eta}{dz}-\frac{d\zeta}{dy}\right); \end{aligned}\right.$$

et les trois dérivées secondes directes de ξ, η, ζ en x, y, z n'y figurent pas. Il résulte de là que, dans le cas où l'état physique varie très rapidement, pour ne pas dire sans continuité, avec x (par exemple), comme il arrive à la traversée d'une couche de transition, normalement à laquelle nous admettrons qu'on ait choisi l'axe des x, la dérivée seconde $\frac{d^2\xi}{dx^2}$ peut devenir relativement très grande sans que l'accélération correspondante $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ cesse d'être finie. Or les lois naturelles paraissent ne garantir ici de valeur finie ou modérée qu'aux déplacements *vibratoires* ξ, η, ζ (vu la facilité de translation de l'éther) et, en outre, comme dans toutes les autres questions de Mécanique physique, qu'aux vitesses et aux accélérations; car les vitesses varient graduellement, sauf, parfois, à des moments très exceptionnels. Donc la dérivée $\frac{d^2\xi}{dx^2}$ pourra devenir très grande sans contredire ces principes; et, si elle le devient assez, sur presque toute l'épaisseur de la couche (supposée tant soit peu comparable à la longueur d'onde), rien n'empêchera la dérivée première $\frac{d\xi}{dx}$ d'y devenir grande elle-même, quoique ξ, alors très vite changeant avec x, reste modéré ou, plutôt, petit comme le sont d'ordinaire ξ, η, ζ. Dès lors, il y aura, dans la couche de transition, des pressions relativement très fortes suivant les y et les z [1], à côté d'autres, de mêmes sens, très rapidement variables avec x [2]; et les plus fortes, figurant dans deux équa-

---

[1] Savoir, sur les éléments plans normaux aux y et aux z, les tractions

$$N_y = -2\mu\left(\frac{d\zeta}{dz}+\frac{d\xi}{dx}\right) \qquad \text{et} \qquad N_z = -2\mu\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}\right).$$

[2] Celles qui s'exerceront suivant les y et les z sur les éléments plans normaux

tions du mouvement par leurs dérivées en y ou en z, à côté des pressions rapidement variables qui figureront par leurs dérivées en x, neutraliseront en majeure partie les effets de celles-ci, de manière à permettre de notables variations, entre les deux faces de la couche, à ces dernières pressions considérées à part ([1]).

L'égalité de ces pressions dans les deux milieux sera donc en défaut et ne pourra pas servir de base aux conditions définies cherchées.

31. Formation des conditions aux limites, dans l'hypothèse d'une épaisseur suffisante de la couche de transition. — Ce qui rend plausible l'objection précédente à l'hypothèse de l'égalité des pressions de l'éther, dans deux milieux homogènes contigus, sur leur surface commune, c'est que la couche *hétérogène* de transition les séparant ne paraît pas être *infiniment mince,* en quelque sorte, par rapport à une longueur d'onde lumineuse. Certains phénomènes ont permis de l'apprécier : ceux, par exemple, de réflexion sur une lame vitreuse, recouverte d'un léger dépôt d'argent dont on accroît peu à peu l'épaisseur, jusqu'à ce que le rayon réfléchi observé en devienne indépendant.

Il est, dès lors, naturel de chercher *dans le fait même d'une épaisseur sensible de la couche de passage,* qui, avec celui de non-résistance de l'éther aux petits rapprochements de ses feuillets parallèles,

---

aux x, savoir $T_z = \mu\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)$, $T_y = \mu\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right)$, dont les dérivées en x contiendront $\frac{d\xi}{dx}$ différentié.

([1]) On sait, en effet, que les seconds membres des deuxième et troisième équations (6) (p. 272) sont respectivement

$$\frac{dT_z}{dx} + \frac{dN_y}{dy} + \frac{dT_x}{dz}, \qquad \frac{dT_y}{dx} + \frac{dT_x}{dy} + \frac{dN_z}{dz}.$$

Or, il y aura, dans ces seconds membres, tout à la fois les termes en T_z et en N_y, en T_y et en N_z, susceptibles d'être très grands : et l'on ne pourra pas, malgré la valeur finie de leur somme, qui est de l'ordre des premiers membres ou des inerties de l'unité de volume suivant les y et les z, conclure à une valeur *finie* des dérivées $\frac{dT_z}{dx}$, $\frac{dT_y}{dx}$; d'où se déduiraient les quasi-égalités soit de T_z, soit de T_y, sur les deux faces de la couche de transition.

On voit que ce qui rend ces égalités admissibles dans la théorie de l'élasticité, c'est l'impossibilité, pour des dilatations comme $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\eta}{dy}$, $\frac{d\zeta}{dz}$, d'y devenir très grandes, les corps réagissant avec une énergie croissante *contre toute déformation qui s'exagère.*

met ainsi en défaut les habituelles conditions *définies* ou relatives aux limites, *notre point de départ pour établir celles qui doivent les remplacer*. Et, en effet, si l'on admet que la couche de transition comprend, dans son épaisseur (cependant petite à côté d'une longueur d'onde), un grand nombre de parallélépipèdes élémentaires juxtaposés, permettant d'appliquer dans tout son intérieur les équations générales (89) du mouvement (déduites de l'équilibre dynamique de pareils parallélépipèdes), avec coefficients A, B, C, D, E, F, D', E', F' fonctions rapidement variables sans doute, mais pourtant continues, de x, ces équations (89) conduiront facilement aux relations définies cherchées. C'est ce qu'avait entrevu ou même exprimé, dans une foule de travaux basés sur des hypothèses diverses, Cauchy, qui, sans arriver cependant à une clarté suffisante, a donné aux relations dont il s'agit le nom de *conditions de continuité;* et c'est ce qu'a heureusement dégagé M. Henri Poincaré, aux pages 336 à 340 de son *Cours sur la théorie de la lumière*, professé à la Sorbonne dans le premier semestre de l'année scolaire 1887-1888 [1].

---

[1] En 1889, année même où M. Poincaré publiait le Volume cité ici, M. Potier distribuait aux membres de l'Académie des Sciences, pour sa candidature dans la Section de Physique, une Notice sur ses travaux, dans laquelle se trouve indiquée avec détails la même manière de traiter le problème de la réflexion et de la réfraction. D'après cette Notice, M. Potier, ayant, dès 1876 (*Journal de Physique*, t. V, p. 105), jugé acceptables et très naturelles mes idées, sur l'*identité réelle* de l'éther des corps à l'éther du vide et sur l'accroissement *apparent* de sa densité par la résistance des molécules, qu'avait fait connaître dès 1872 aux physiciens l'exposé synthétique de Barré de Saint-Venant (*Annales de Chimie et de Physique*, 4e série, t. XXV), avait vu parfaitement qu'il convenait d'appliquer jusque dans l'intérieur des couches de transition les équations indéfinies du mouvement, et qu'il en résultait les lois approchées de Fresnel sur la réflexion et la réfraction vitreuses, à la condition d'annuler la vitesse de propagation, dans l'éther, des ondes longitudinales. Or cela revenait à poser les conditions définies (90) ci-après, qu'il donne d'ailleurs explicitement dans la Notice citée.

Même les petites anomalies qui échappent aux lois de Fresnel, ou relatives à l'*imparfaite* extinction des rayons réfléchis sous l'angle de polarisation et à vibrations orientées dans le plan d'incidence, avaient été, en 1872, notamment dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. LXXV, p. 617 et 674), déduites par M. Potier de principes analytiquement équivalents, en tenant compte du fait que la couche de transition a son épaisseur un peu comparable à la longueur d'onde, et expliquées ainsi de manière à éviter une grave contradiction, avec ce que semble indiquer l'expérience, où tombe la théorie donnée anciennement par Cauchy, dans l'hypothèse, exposée plus loin ici même (n° 40), d'un éther où ne s'annulerait qu'à peu près le carré de la vitesse de propagation des ondes longitudinales. En effet, cette explication de M. Potier, où figure l'épaisseur, dès lors non négligeable, des couches superficielles, *comparée à la lon-*

Pour les obtenir de la manière la plus simple, intégrons, successivement, deux fois par rapport à x les deux dernières équations (89), sur une très petite longueur $\int dx$, comprise depuis le feuillet limite du premier milieu homogène jusqu'à un feuillet quelconque de la couche de transition, défini par son abscisse x. Comme les deux dernières équations (89), résolues par rapport à $\frac{d}{dx}\left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}\right)$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz}\right)$, donnent ces deux dérivées en fonction de termes où entrent soit des accélérations toujours finies, soit des dérivées secondes de déplacements en y, z, finies aussi, les produits de leurs valeurs par dx, intégrés le long du petit chemin $\int dx$ normal aux feuillets, ne produiront que des variations insignifiantes pour les deux binomes différentiels $\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}$, $\frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz}$, dont les moitiés sont, au signe près, ce qu'on appelle des *rotations moyennes*. Autrement dit, les deux dernières équations (89) reviennent très sensiblement, dans la couche de transition, à admettre l'invariabilité de ces rotations moyennes sur toute l'épaisseur. On aura donc déjà deux des conditions cherchées, en égalant les valeurs respectives des deux binomes différentiels dans les deux milieux, à leur limite commune.

Mais ces binomes eux-mêmes, considérés ainsi sur le feuillet quelconque intermédiaire d'abscisse x et égalés à leurs valeurs finies sur le premier feuillet, peuvent être encore multipliés par dx, après résolution par rapport aux termes $\frac{d\eta}{dx}$, $\frac{d\zeta}{dx}$; et ils donnent, pour les différentielles en x de η et ζ, des valeurs où dx a comme facteur soit une quantité indépendante de x et finie, soit une dérivée finie, en y ou z, du déplacement ξ.

Par suite, de même que l'intégrale première des deux dernières équations (89), appliquées à la mince couche de transition, signifiait à très peu près l'invariabilité des rotations moyennes précédentes le long du chemin $\int dx$, de même aussi leur intégrale seconde signifie l'invariabilité analogue de η et de ζ.

---

gueur d'onde, attribue naturellement à celle-ci un rôle capital, d'autant plus grand qu'elle est plus petite, dans l'amplitude des anomalies en question. Or ce rôle de la longueur d'onde, que l'observation paraît avoir confirmé depuis, échappait entièrement à la théorie de Cauchy.

Si l'on affecte d'un indice 1 les quantités prises sur la seconde face de la couche de transition, pour les distinguer de celles qui le seront sur la première face et qu'on écrira sans indice, les deux dernières équations (89) équivaudront donc très sensiblement, en ce qui concerne la limite des deux milieux homogènes ou les deux feuillets extrêmes de la couche de transition, aux quatre relations définies

$$(90) \quad \begin{cases} \eta = \eta_1, \qquad \zeta = \zeta_1, \\ \dfrac{d\xi}{dy} - \dfrac{d\eta}{dx} = \left(\dfrac{d\xi}{dy} - \dfrac{d\eta}{dx}\right)_1, \qquad \dfrac{d\zeta}{dx} - \dfrac{d\xi}{dz} = \left(\dfrac{d\zeta}{dx} - \dfrac{d\xi}{dz}\right)_1 \end{cases}$$ (1).

Mais alors les dérivées en y et z des deux rotations moyennes considérées sont constantes, comme ces rotations, le long de tout petit chemin $\int dx$ normal aux faces de la couche de transition; et la première équation (89), interrogée à son tour, montre que son second membre n'y dépend pas sensiblement de x. Donc cette équation y prend la forme

$$(91) \quad \frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\rho(1+A)}{\mu}\xi + \frac{\rho F}{\mu}\eta + \frac{\rho E'}{\mu}\zeta\right] = \text{fonction indépendante de } x.$$

Intégrons-la *sur place* deux fois par rapport à t, soit à partir d'un instant où le mouvement n'avait pas encore atteint la couche de transition, soit en déterminant les constantes d'intégration de manière que la fonction linéaire de ξ, η, ζ entre crochets ait, en chaque point, sa dérivée par rapport à t, et aussi sa propre valeur, *moyennement* nulles, vu la nature vibratoire des mouvements à considérer.

---

(1) Il suit de l'égalité de η, ζ en tous les points correspondants (y, z) des faces de la couche, que les dérivées en y, z de η, ζ y ont mêmes valeurs, et que, par suite, la troisième rotation moyenne, $-\frac{1}{2}\left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}\right)$, y est aussi pareille; de sorte que l'on a encore

$$\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} = \left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}\right)_1.$$

Dès lors, si l'on change les axes coordonnés, les rotations moyennes relatives aux nouveaux axes, et qui s'expriment linéairement au moyen des précédentes, seront encore égales chacune à chacune, sur les deux faces de la couche de transition. Ainsi, les conditions de continuité (90) signifient, quel que soit le système de coordonnées choisi, que *la rotation moyenne des particules et leur déplacement tangentiel sont les mêmes* (*pour la grandeur et la direction*) *dans deux milieux contigus, en tous les points de leur surface limite.*

Le résultat exprimera que le trinome $\frac{\rho(1+A)}{\mu}\xi+\frac{\rho F}{\mu}\eta+\frac{\rho E'}{\mu}\zeta$ a, très sensiblement, la même valeur tout le long du chemin $\int dx$, notamment sur les deux faces de la couche de transition. Ainsi, une cinquième relation définie sera

$$(92)\qquad \frac{\rho(1+A)}{\mu}\xi+\frac{\rho F}{\mu}\eta+\frac{\rho E'}{\mu}\zeta=\left(\frac{\rho(1+A)}{\mu}\xi+\frac{\rho F}{\mu}\eta+\frac{\rho E'}{\mu}\zeta\right)_1.$$

Cette relation, où η et ζ sont respectivement égaux dans les deux membres, montre que ξ y diffère, comme les coefficients F, E′ et surtout A. Ce n'est donc pas seulement l'égalité habituelle des pressions, sur les deux faces de la couche séparative, qui est ici en défaut, mais aussi l'*égalité des déplacements* dans le sens normal : singulier paradoxe, à première vue, mais expliqué par le double fait d'une épaisseur *un peu sensible* de cette couche et de la *mollesse* infinie qu'on lui attribue, c'est-à-dire de sa non-résistance aux déplacements normaux très petits, qui ne provoquent pas chez elle une réaction atteignant, comparativement, leur ordre même de grandeur et qui, par suite, ne se transmettent pas d'une face à l'autre.

Enfin, les équations (89) entraînent, comme on a vu, l'intégrale (8) (p. 272), qui, sur les deux feuillets extrêmes de la couche, là où A, B, ..., F′ sont constants, devient une relation linéaire entre les dérivées premières de ξ, η, ζ en x, y, z. Or, les deux premières relations (90) et l'équation (92) relient directement, sur les deux faces de la couche de transition, η, ζ, ξ, et, par suite, leurs dérivées en y, z, tandis que les deux dernières (90) y relient de même les dérivées de η et ζ en x. Donc, par l'intermédiaire des deux relations linéaires dont il vient d'être parlé, les deux valeurs de $\frac{d\xi}{dx}$ à la limite des deux milieux se trouveront rattachées l'une à l'autre : ce qui constituera la sixième condition définie cherchée. Par exemple, si les deux corps sont isotropes, la relation (8) donnera, dans chacun, pour $\frac{d\xi}{dx}$, la valeur $-\left(\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right)$, qui est, comme on voit, la même des deux côtés. On aura donc la *sixième* relation définie

$$(93)\qquad \frac{d\xi}{dx}=\left(\frac{d\xi}{dx}\right)_1 \quad \text{(à la limite de deux corps isotropes).}$$

Comme l'équation (8) rattache directement, en chaque point (x, y, z)

de l'espace, une des trois fonctions ξ, η, ζ aux deux autres, le problème ne comporte, en réalité, que deux inconnues distinctes; et l'on doit s'attendre à ne trouver que *quatre* conditions définies essentielles, par exemple les quatre (90), si l'on tient compte, comme il le faut bien, des équations indéfinies (89) considérées dans chacun des deux milieux homogènes contigus. Et, en effet, il est d'abord évident que la sixième condition, savoir (93) pour des milieux isotropes, résulte des autres conditions définies et des équations indéfinies (89) appliquées seulement aux deux milieux homogènes, puisque celles-ci impliquent la relation linéaire en $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{d(x, y, z)}$ qui a servi à poser cette condition. Mais on peut en dire autant de (92). Car la première équation indéfinie (89), dans chacun des deux milieux homogènes contigus, aura, en vertu des deux dernières (90), même second membre à la limite des deux corps; ce qui y rendra identiques les premiers membres, et, par suite, en raisonnant comme on a fait après (91), les deux membres de (92).

Donc, les quatre relations définies (90) suffiront [1].

En résumé, les conditions aux limites ou définies ne sont, dans l'étude des mouvements vibratoires de l'éther, qu'un extrait ou une simplification des équations indéfinies de ces mouvements, considérées à l'intérieur des couches de transition; et l'éther s'y présente, au

---

[1] Les deux premières, consistant dans l'égalité du déplacement tangentiel, ont été posées, comme on sait, sous le nom de *conditions de continuité*, par Fresnel lui-même : il suppléa à la connaissance qui lui manquait des deux autres, c'est-à-dire, en définitive, de l'égalité de la rotation moyenne, par le principe de la conservation de la force vive totale de chaque onde (p. 287) dans sa division en une onde réfléchie et une onde réfractée.

Quant à cette égalité de la rotation moyenne, elle fut aperçue en entier, du moins pour les milieux isotropes, sinon motivée, par Cauchy, dès son Mémoire de Prague *Sur la dispersion de la lumière* (*Nouveaux Exercices de Mathématiques*, 1836; § X. — *Œuvres*, 2e série, t. X, p. 425), ainsi que l'égalité de la dilatation linéaire suivant le sens normal que nous écrivons ici $\frac{d\xi}{dx} = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)_1$. Comme, vu l'équation $\theta = 0$, cette dernière égalité implique celle de la somme $\frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$, et que, en outre, une des rotations moyennes s'exprime au moyen du binome différentiel $\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}$, il avait ainsi, entre les dérivées des déplacements tangentiels η et ζ en y et z de part et d'autre (s'il admettait effectivement, à cette époque, la formule $\theta = 0$), deux relations, qui, pour des mouvements périodiques, devaient lui tenir lieu des deux conditions de continuité de Fresnel, dont il ne parle pas.

fond, comme un milieu unique, homogène, illimité, dont les mouvements ne se diversifient dans leurs lois qu'à raison de la matière pondérable l'entrecoupant çà et là.

Les conditions spéciales (90), (92), (93) y facilitent simplement les calculs, en dispensant de mettre en œuvre les équations indéfinies (89) pour les cas d'une hétérogénéité très accentuée, mais localisée à de minces espaces entre deux régions plus larges où leurs coefficients sont constants ou très graduellement variables [1].

---

[1] **Expression générale de ces relations définies et formes en résultant pour les équations des forces vives et du viriel : détermination complète du problème de la réflexion et de la réfraction.** — Exprimons l'égalité des composantes tangentielles du déplacement, de part et d'autre, pour tout point (x, y, z) d'une surface séparative d'orientation quelconque. Soient α, β, γ les trois angles faits avec les x, y, z positifs par sa normale, tirée hors du milieu où les déplacements de l'éther suivant les axes sont ξ, η, ζ; et appelons ξ_1, η_1, ζ_1 les déplacements de l'éther dans le milieu voisin. On peut se représenter les deux déplacements effectifs, sur les deux faces, décomposés d'abord suivant la normale et suivant deux tangentes, puis, les composantes ainsi obtenues, projetées elles-mêmes sur les x, ou les y, ou les z, et ajoutées enfin pour donner les projections respectives ξ et ξ_1, ou η et η_1, ou ζ et ζ_1. Or il faut et il suffit évidemment, pour l'égalité des composantes tangentielles chacune à chacune, que les différences $\xi - \xi_1$, $\eta - \eta_1$, $\zeta - \zeta_1$ proviennent uniquement de la différence offerte par les deux composantes normales, différence dont les projections sont dès lors $\xi - \xi_1$, $\eta - \eta_1$, $\zeta - \zeta_1$ et valent ses trois produits respectifs par $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$. On a donc les trois rapports égaux

$$\frac{\xi - \xi_1}{\cos\alpha} = \frac{\eta - \eta_1}{\cos\beta} = \frac{\zeta - \zeta_1}{\cos\gamma}.$$

Comparons deux quelconques d'entre eux, le deuxième et le troisième, par exemple. Il viendra

$$(\eta - \eta_1)\cos\gamma - (\zeta - \zeta_1)\cos\beta = 0,$$

ou bien, en effectuant les produits partiels et appelant $\cos(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ les trois cosinus directeurs de la normale, mais tirée hors du second milieu, puis marquant par l'indice 1 toute expression qui se rapporte au second milieu,

$$(a) \qquad (\eta\cos\gamma - \zeta\cos\beta) + (\eta\cos\gamma - \zeta\cos\beta)_1 = 0.$$

Les quatre conditions obtenues (90) *reviendront,* en résumé, *pour une surface séparative d'orientation quelconque,* à égaler respectivement, de part et d'autre, les *trois binomes différentiels*

$$\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}, \quad \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz}, \quad \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx},$$

que nous appellerons $-2\omega_x$, $-2\omega_y$, $-2\omega_z$, *et aussi,* mais seulement en valeur

S'il devenait nécessaire, dans certains cas, pour y compléter la détermination des problèmes, d'adjoindre, aux équations indéfinies, des

---

absolue, ou avec signes *contraires, les trois binomes purement algébriques*

$$\eta \cos\gamma - \zeta \cos\beta, \quad \zeta \cos\alpha - \xi \cos\gamma, \quad \xi \cos\beta - \eta \cos\alpha.$$

Dans les équations (γ) et (ε'') des forces vives et du viriel (p. 280 et 286), l'énergie potentielle élastique $\int \mu \Phi \, d\varpi$ prend alors une forme très simple, pour l'éther d'un ensemble quelconque de milieux transparents, si on les suppose juxtaposés *sans couches de transition,* mais astreints à vérifier, à leurs surfaces séparatives, ces conditions définies.

Par exemple, les seconds membres des équations indéfinies (6) (p. 272), multipliés par l'élément de volume $d\varpi$, s'écriront, en leur donnant la forme des seconds membres de (89),

$$2\mu\left(\frac{d\omega_y}{dz} - \frac{d\omega_z}{dy}\right) d\varpi, \quad 2\mu\left(\frac{d\omega_z}{dx} - \frac{d\omega_x}{dz}\right) d\varpi, \quad 2\mu\left(\frac{d\omega_x}{dy} - \frac{d\omega_y}{dx}\right) d\varpi.$$

Le travail des forces élastiques par unité de temps, somme des produits respectifs de ces expressions par les vitesses correspondantes $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$, intégrée dans toute l'étendue ϖ de chaque milieu, deviendra immédiatement, grâce à la méthode de transformation des intégrales de volume qui nous est familière, et en appelant σ la surface limite du milieu considéré,

$$-\int_\sigma 2\mu\left(\omega_x \frac{d.\eta\cos\gamma - \zeta\cos\beta}{dt} + \omega_y \frac{d.\zeta\cos\alpha - \xi\cos\gamma}{dt} + \omega_z \frac{d.\xi\cos\beta - \eta\cos\alpha}{dt}\right) d\sigma$$

$$-\int_\varpi 2\mu\left[\omega_x \frac{d\left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right)}{dt} + \omega_y \frac{d\left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right)}{dt} + \omega_z \frac{d\left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right)}{dt}\right] d\varpi.$$

Or, quand on fera la somme de toutes les expressions pareilles, les éléments des intégrales $\int_\sigma$ relatifs aux deux faces d'un même élément $d\sigma$ de surface limite, seront égaux et de signes contraires; car les facteurs ω_x, ω_y, ω_z, *communs* en vertu des premières conditions définies, y multiplieront des binomes en $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ égaux en valeur absolue, mais opposés de signe, en vertu des dernières.

Admettons d'ailleurs qu'on étudie les transformations d'un mouvement vibratoire limité dans l'espace, c'est-à-dire laissant en repos les points de notre système matériel situés à des distances infinies de l'origine; en sorte que les éléments d'intégrale se rapportant à de tels points soient négligeables. Il ne restera, dans l'expression précédente du travail, par unité de temps, des forces élastiques, que la partie en $\int_\varpi$, étendue à tout le volume du système, savoir

$$-\int_\varpi 4\mu\left(\omega_x \frac{d\omega_x}{dt} + \omega_y \frac{d\omega_y}{dt} + \omega_z \frac{d\omega_z}{dt}\right) d\varpi \quad \text{ou} \quad -\frac{d}{dt}\int_\varpi 2\mu(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)\, d\varpi.$$

L'*énergie potentielle* fournissant ce travail, ou *seule en jeu* dans la question

comme énergie potentielle *élastique*, aura donc la forme simple, essentiellement positive,

$$(b) \qquad \int_{\varpi} 2\mu(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)\, d\varpi.$$

De même, dans le théorème du *viriel*, où les seconds membres, déjà multipliés par $d\varpi$, des équations indéfinies (6), doivent être multipliés encore, respectivement, par $\frac{1}{2}(\xi, \eta, \zeta)$, puis ajoutés et intégrés, il y a à évaluer, d'abord pour chaque milieu, l'intégrale

$$\int_{\varpi} \mu \left[\xi\left(\frac{d\omega_y}{dz} - \frac{d\omega_z}{dy}\right) + \eta\left(\frac{d\omega_z}{dx} - \frac{d\omega_x}{dz}\right) + \zeta\left(\frac{d\omega_x}{dy} - \frac{d\omega_y}{dx}\right)\right] d\varpi,$$

qui donne

$$-\int_{\sigma} \mu[\omega_x(\eta\cos\gamma - \zeta\cos\beta) + \omega_y(\zeta\cos\alpha - \xi\cos\gamma) + \omega_z(\xi\cos\beta - \eta\cos\alpha)]\, d\sigma$$
$$-\int_{\varpi} 2\mu(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)\, d\varpi.$$

L'addition des résultats relatifs aux milieux contigus fait encore disparaître, comme on voit, les éléments de l'intégrale $\int_{\sigma}$ relatifs à leur surface séparative ; et, si le repos règne aux distances infinies de l'origine, l'*énergie potentielle* que cette équation du viriel introduit comme *valeur moyenne* de la demi-force vive *totale*, aura encore l'expression simple ci-dessus, $\int_{\varpi} 2\mu(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)\, d\varpi$.

La forme ainsi obtenue (b) a l'avantage de ne contenir, comme facteur variable, pour chaque élément $d\varpi$ de volume et par unité de cet élément, que le carré $\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2$ de sa *rotation moyenne totale*, c'est-à-dire une quantité que nous savons être, partout, non seulement variable graduellement, mais aussi de grandeur modérée et, par suite, *négligeable dans les couches de transition*, comme l'est leur volume.

Il n'en serait pas de même avec la forme $\int \mu\Phi\, d\varpi$ (p. 280), suggérée par la théorie de l'élasticité, ou appropriée, par conséquent, au cas de couches séparatives subissant, sur leurs deux faces, mêmes déplacements et, au sens près, mêmes pressions. L'expression (β) de Φ (p. 280) contient, en effet, tous les éléments de la déformation des particules, éléments susceptibles de devenir, avec la dilatation linéaire suivant le sens normal, très grands dans les couches de transition, dont on ne pourra plus dès lors faire abstraction comme on le désire. Cette expression (β) de Φ est donc à rejeter ici, *en tant que manquant de continuité, et même analytiquement infinie, à la traversée des surfaces séparatives*. Elle excède notre expression actuelle, $2(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)$, de

$$2\left(\frac{d\eta}{dz}\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dy}\frac{d\zeta}{dz}\right) + 2\left(\frac{d\zeta}{dx}\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dz}\frac{d\xi}{dx}\right) + 2\left(\frac{d\xi}{dy}\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dx}\frac{d\eta}{dy}\right).$$

infinies, on s'y donnerait, par exemple, l'immobilité, c'est-à-dire $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$. Car l'obscurité, le froid, l'absence ou l'extrême

---

Or cet excès s'écrit, par exemple, identiquement,

$$2\left[\frac{d}{dz}\left(\eta\frac{d\zeta}{dy}\right) - \frac{d}{dy}\left(\eta\frac{d\zeta}{dz}\right)\right] + \ldots.$$

Multiplié par $d\varpi$ et intégré dans l'étendue ϖ de chaque corps du système, il donne

$$2\int_\sigma \eta\left(\frac{d\zeta}{dy}\cos\gamma - \frac{d\zeta}{dz}\cos\beta\right)d\sigma + \ldots,$$

expression dont rien ne garantit la neutralisation par les expressions analogues relatives aux corps voisins; car ξ, η, ζ et leurs dérivées en x, y, z ont des valeurs généralement différentes sur les deux faces de chaque surface σ. Il faudrait donc rétablir les couches de transition, c'est-à-dire supposer ξ, η, ζ et leurs dérivées premières en x, y, z continues partout, pour rendre l'expression (β) de Φ, dont il s'agit, équivalente à $2(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)$, toujours, d'ailleurs, sous la condition de l'annulation de ξ, η, ζ aux distances infinies.

Appelons, pour abréger, V ce que devient le polynome homogène et du second degré, essentiellement positif, U, défini par la formule (α) (p. 277), quand on y remplace les vitesses $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ par les déplacements correspondants ξ, η, ζ; et, si l'on observe que les travaux extérieurs sont ici nuls, les deux formules (γ) et (ε'') des forces vives et du viriel (p. 280 et 286) deviendront

$$(c)\quad \int_\varpi \frac{\rho}{2}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2} + \mathrm{U}\right)d\varpi + \int_\varpi 2\mu(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)\,d\varpi = \text{const.},$$

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2}\int_\varpi \frac{\rho}{4}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \mathrm{V})\,d\varpi \\ &\quad = \int_\varpi 2\mu(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)\,d\varpi - \int_\varpi \frac{\rho}{2}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2} + \frac{d\eta^2}{dt^2} + \frac{d\zeta^2}{dt^2} + \mathrm{U}\right)d\varpi. \end{aligned}\right.$$

Chacune d'elles, utilisable sans tenir compte des couches de transition autrement que par les *quatre* conditions définies admises pour l'établir, permet de démontrer la détermination complète du problème de la réflexion et de la réfraction, supposé traité au moyen des trois équations *indéfinies* de mouvement propres aux divers milieux et des quatre conditions *spéciales* dont il s'agit. En d'autres termes, *ce système* de relations *n'admet qu'une solution,* un seul système de fonctions ξ, η, ζ de x, y, z, t ayant, à une époque initiale assignée t_0, des valeurs ξ, η, ζ données et des dérivées premières en t données également; de sorte qu'il détermine toute la suite des mouvements *réfléchis* et *réfractés* consécutifs à un mouvement *incident* défini.

En effet, s'il y avait deux solutions distinctes pour ξ, η, ζ, leurs différences respectives, que j'appellerai ξ', η', ζ', en exprimeraient, vu la forme linéaire des équations, une nouvelle, pour le cas de mouvements incidents nuls où se réduiraient à zéro dans tout le système, à l'époque $t = t_0$, les déplacements (ξ', η', ζ'), les vitesses $\frac{d(\xi', \eta', \zeta')}{dt}$, et, par suite, l'énergie totale du système, second membre

affaiblissement du mouvement lumineux et calorifique, paraissent être le fait dominant ou général dans l'Univers, la lumière et la chaleur ne s'y trouvant sensibles qu'au voisinage, pour ainsi dire, des soleils ou des groupes stellaires.

32. Réflexion et réfraction de la lumière par les corps transparents isotropes : formules générales. — Considérons un pinceau ou rayon de lumière qui, après avoir cheminé dans la région des x négatifs, c'est-à-dire dans notre premier corps, parallèlement au plan choisi pour celui des xy, atteint, à l'origine des coordonnées et tout autour, la couche de transition des deux milieux.

Attribuons-lui un centre d'émanation assez éloigné de la surface séparative pour que les ondes incidentes puissent, à leur arrivée sur cette surface, être supposées sensiblement planes et d'amplitude uniforme, sur des étendues de dimensions comparables à une longueur d'onde, de même que sera supposée plane aussi, au même degré d'approximation, et confondue avec son plan tangent $x = 0$ mené à l'origine des coordonnées, la surface séparative.

Admettons d'abord l'isotropie des deux milieux, y compris le second, occupant la région des x positifs; et soient i, $\frac{\pi}{2} - i$ les deux angles, aigus et positifs pour fixer les idées, du rayon incident (fictivement prolongé) avec les x et les y positifs; de sorte que les coefficients l, m, n, dans la variable *principale* $t - lx - my - nz$ des déplacements ξ, η, ζ, y aient les valeurs

$$(94) \qquad l = \frac{\cos i}{\omega}, \qquad m = \frac{\sin i}{\omega}, \qquad n = 0.$$

---

constant de l'équation (c). Les termes, tous incapables de recevoir des valeurs négatives, composant le premier membre de cette équation, seraient donc nuls à toute époque; et l'on aurait sans cesse $\xi' = 0$, $\eta' = 0$, $\zeta' = 0$.

Quant à l'équation (d), appliquée aux fonctions ξ', η', ζ', elle aurait son second membre réductible au dernier terme (essentiellement négatif), au moment où ξ', η', ζ' s'écarteraient de zéro. Car les rotations moyennes ω_x, ω_y, ω_z y seraient alors, *pour la petitesse*, au moins de l'ordre des déplacements ξ, η, ζ, dont les dérivées en x, y, z les forment et qui, seulement *naissants*, ou exprimés par les intégrales $\int \frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt} dt$ *prises durant un temps* $\int dt$ *infiniment court*, s'évanouiraient, comparativement aux dérivées mêmes $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$, *en train de s'écarter de zéro*. Donc le second membre de (d) ne pourrait cesser d'être nul qu'en s'abaissant au-dessous de zéro, tandis que le premier, alors essentiellement positif, ne le pourrait qu'en grandissant. Ils resteraient ainsi nuls tous les deux; et il viendrait nécessairement, quel que fût t, $\xi' = 0$, $\eta' = 0$, $\zeta = 0$.

Nous substituerons enfin à notre rayon incident ses deux composants rectilignement polarisés, dans l'un desquels le déplacement δ se fera perpendiculairement au plan d'incidence, ou se réduira à la composante ζ, tandis que, dans l'autre, il se fera dans le plan d'incidence et comprendra les deux composantes ξ, η.

Occupons-nous d'abord du premier rayon, où l'on aura ainsi $\zeta = \delta$, avec δ fonction rapidement changeante de la variable $t - lx - my$, mais à variations ∂ très lentes relativement aux autres variables x, y, z. Nous pourrons donc, dans des étendues de quelques longueurs d'onde en largeur, mais indéfinies (du côté des x négatifs) suivant le sens du rayon, prendre simplement δ de la forme $f(t - lx - my)$. Cela nous donnera, pour le rayon incident,

$$(95)\qquad \xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = f(t - lx - my).$$

Par une sorte de raison de symétrie, les rayons que fera naître la couche de transition à l'arrivée de ce rayon incident auront, comme lui, leur axe dans le plan des xy, et leurs vibrations normales à ce plan, ou réductibles à la composante ζ. Nous appellerons cette composante : d'une part, ζ' pour le *rayon réfléchi*, c'est-à-dire pour celui qui, faisant un angle obtus avec les x positifs (ou donnant $l < 0$), se dirigera vers l'intérieur du premier milieu et comprendra ainsi les mouvements dits *réfléchis;* d'autre part, ζ_1, pour le *rayon réfracté,* celui qui comprendra les mouvements produits dans le second milieu, où la vitesse de propagation recevra une valeur, ω_1, différente de ω. Soient, de même, l', m' les valeurs de l, m pour le rayon réfléchi [1], l_1, m_1 les valeurs analogues pour le rayon réfracté. Si P, P_1 sont deux coefficients d'amplitude à déterminer pour ces deux rayons, nous pourrons essayer de prendre, comme déplacements correspondants,

$$(96)\qquad \delta' = Pf(t - l'x - m'y), \qquad \delta_1 = P_1 f(t - l_1 x - m_1 y).$$

Alors nous aurons comme déplacements totaux : dans le premier milieu,

$$(97)\qquad \left\{\begin{array}{l} \xi = 0, \qquad \eta = 0, \\ \zeta = f(t - lx - my) + Pf(t - l'x - m'y), \\ \text{avec} \\ l'^2 + m'^2 = l^2 + m^2 = \dfrac{1}{\omega^2}; \end{array}\right.$$

(1) On remarquera que l', m', n' ne désignent plus, ici, les cosinus directeu de la droite suivant laquelle sc font les vibrations.

et, dans le second milieu, en y affectant ξ, η, ζ de l'indice 1,

$$(98)\quad \left\{\begin{array}{l} \xi_1 = 0, \qquad \eta_1 = 0, \qquad \zeta_1 = P_1 f(t - l_1 x - m_1 y), \\ \text{avec} \\ \qquad\qquad l_1^2 + m_1^2 = \dfrac{1}{\omega_1^2} = \dfrac{N^2}{\omega^2}, \end{array}\right.$$

où N désigne l'*indice de réfraction* relatif $\dfrac{\omega}{\omega_1}$.

Les équations indéfinies seront ainsi satisfaites dans les deux corps homogènes transparents; et, le problème étant déterminé, comme nous savons, il nous suffira de vérifier les conditions (90) (p. 343) à la limite commune $x = 0$, pour que la solution obtenue soit la vraie et unique.

Or les termes de ces relations (90) auront comme facteurs respectifs, dans les unes, les trois fonctions $f(t - my)$, $f(t - m'y)$, $f(t - m_1 y)$, et, dans les autres, leurs dérivées premières. Comme il faut y satisfaire quels que soient t et y, on devra d'abord réduire à un seul dans chaque équation, pour pouvoir ensuite le supprimer, les trois facteurs f ou f', et poser, par conséquent,

$$(99)\qquad m' = m, \qquad m_1 = m.$$

Les quotients respectifs, m', m_1, par les deux vitesses de propagation ω, ω_1, des cosinus des angles que font avec les y positifs le rayon réfléchi et le rayon réfracté, sont donc positifs; et ces deux rayons se trouvent situés du même côté de la normale à la surface séparative que le prolongement du rayon incident.

Soient : i' l'angle de réflexion, c'est-à-dire le supplément de l'angle obtus fait par le rayon réfléchi avec les x positifs, et r l'angle de réfraction (s'il y a un rayon réfracté proprement dit). On aura, pareillement à (94),

$$(100)\quad l' = -\frac{\cos i'}{\omega}, \qquad m' = \frac{\sin i'}{\omega}, \qquad l_1 = \frac{\cos r}{\omega_1}, \qquad m_1 = \frac{\sin r}{\omega_1};$$

et, les angles i', r étant aigus comme i, les deux formules (99) deviendront, avec adjonction de ce que donnent finalement les premières (94) et (100) comparées :

$$(101)\quad i' = i, \qquad l' = -l, \qquad \frac{\sin i}{\omega} = \frac{\sin r}{\omega_1} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\omega}{\omega_1} = N.$$

Ainsi se trouvent démontrées, notamment, l'antique loi de l'*égalité*

des deux angles de réflexion et d'incidence, et la loi de Descartes ou de Fermat sur la *proportion des sinus* d'incidence et de réfraction.

Enfin, les relations définies (90), réduites à la deuxième et à la quatrième, deviennent

$$1 + P = P_1, \qquad l(1 - P) = l_1 P_1;$$

et elles donnent successivement

$$(102) \qquad \frac{1+P}{1-P} = \frac{l}{l_1}, \qquad P = \frac{l - l_1}{l + l_1}, \qquad P_1 = \frac{2l}{l + l_1}.$$

Passons au second rayon, où les déplacements auront comme composantes ξ, η. Les réflexions qui nous ont conduit aux formules (99) et (101) s'y appliqueront sans changement et continueront à donner, en particulier, $l' = -l$, $m' = m$, $m_1 = m$.

La transversalité des vibrations imposera d'ailleurs pour les cosinus directeurs du déplacement, compté positivement suivant le sens qui fait un angle aigu avec les y positifs : 1° $-\sin i$, $\cos i$, zéro, ou $-m\omega$, $l\omega$, o, pour le rayon incident; 2° $\sin i$, $\cos i$, zéro, ou $m\omega$, $l\omega$, o, pour le rayon réfléchi; 3° $-\sin r$, $\cos r$, zéro, ou $-m\omega$, $l_1\omega$, o, pour le rayon réfracté. Soient, d'ailleurs, en appelant ici Q, Q_1 les coefficients d'amplitude de ces deux rayons,

$$(103) \qquad \begin{cases} \delta = f(t - lx - my), \\ \delta' = Qf(t - l'x - m'y) = Qf(t + lx - my), \\ \delta_1 = Q_1 f(t - l_1 x - my), \end{cases}$$

les trois déplacements *incident, réfléchi, réfracté* (¹). Nous aurons, pour leurs composantes respectives suivant les axes : $-m\omega\delta$, $l\omega\delta$, o; $m\omega\delta'$, $l\omega\delta'$, o; $-m\omega_1\delta_1$, $l_1\omega_1\delta_1$, o.

Les déplacements totaux seront donc : dans le premier milieu,

$$(104) \qquad \begin{cases} \xi = -m\omega f(t - lx - my) + m\omega Q f(t + lx - my), \\ \eta = l\omega f(t - lx - my) + l\omega Q f(t + lx - my), \\ \zeta = 0; \end{cases}$$

et, dans le second,

$$(105) \qquad \begin{cases} \xi_1 = -m\omega_1 Q_1 f(t - l_1 x - my), \\ \eta_1 = l_1\omega_1 Q_1 f(t - l_1 x - my), \\ \zeta_1 = 0. \end{cases}$$

(¹) Il va sans dire que la fonction arbitraire f figurant ici n'a aucun rapport nécessaire avec celle qui exprimait les déplacements ζ dans le premier azimut.

Les conditions (90) se réduisent à la première et à la troisième, qui, vu les dernières relations (97) et (98), deviennent, en divisant l'une par ω_1 et multipliant l'autre par ω,

$$Nl(1+Q) = l_1 Q_1, \qquad 1-Q = NQ_1 \text{ (1)}.$$

Or, de celles-ci il résulte successivement, au lieu de (102) :

$$(106) \qquad \frac{1+Q}{1-Q} = \frac{l_1}{N^2 l}, \qquad Q = \frac{l_1 - N^2 l}{l_1 + N^2 l}, \qquad Q_1 = \frac{2Nl}{l_1 + N^2 l}.$$

33. Lois de Fresnel pour la réflexion et la réfraction vitreuses. — Distiuguons maintenant les deux cas : 1° des réflexion et réfraction ordinaires; 2° de la réflexion totale.

Le premier est celui où la proportion des sinus donne une valeur réelle à l'angle r de réfraction et où, par suite, il existe un véritable rayon réfracté. Il se présente donc, d'après la dernière formule (101), quand le sinus de l'angle d'incidence n'excède pas l'indice N de réfraction. Alors on peut, dans les formules (102), (106), où $l = \frac{\cos i}{\omega}$, remplacer l_1 par $\frac{\cos r}{\omega_1} = \frac{N \cos r}{\omega}$ et N par $\frac{\sin i}{\sin r}$. Il vient les formules de Fresnel, bien connues et confirmées par l'observation (à de très petits écarts près, rarement accessibles même aux expériences soignées et explicables, comme on verra, par l'existence de couches de transition d'une épaisseur *un peu* sensible) :

$$(107) \qquad \left\{ \begin{aligned} P &= \frac{\cos i - N\cos r}{\cos i + N\cos r} = -\frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)}, \\ P_1 &= \frac{2\cos i}{\cos i + N\cos r} = \frac{2\cos i \sin r}{\sin(i+r)}, \\ Q &= \frac{\cos r - N\cos i}{\cos r + N\cos i} = -\frac{\tang(i-r)}{\tang(i+r)}, \\ Q_1 &= \frac{2\cos i}{\cos r + N\cos i} = \frac{2\cos i \sin r}{\sin(i+r)\cos(i-r)}. \end{aligned} \right.$$

(1) Observons que, multipliées *membre à membre*, ces deux relations, tout comme les deux analogues du cas précédent, $1+P = P_1$, $l(1-P) = l_1 P_1$, donnent, au changement près de P et P_1 en Q et Q_1,

$$l(1-Q^2) = l_1 Q_1^2 \qquad \text{ou} \qquad lQ^2 + l_1 Q_1^2 = l.$$

Celle-ci, ainsi commune aux deux cas, a été obtenue par Fresnel, en exprimant que les rayons réfléchi et réfracté contiennent toute la force vive du rayon incident; et elle lui a tenu lieu, comme nous avons dit (p. 345), de l'égalité des rotations moyennes.

Dans le second cas, où m_1, égal à $\frac{\sin i}{\omega}$, excède $\frac{N}{\omega}$, et où, par conséquent, la dernière relation (98) conduit pour l_1 à la double valeur imaginaire

$$(108) \qquad l_1 = \pm \frac{\sqrt{\sin^2 i - N^2}}{\omega} \sqrt{-1},$$

les expressions respectives (97) ou (104), (98) ou (105), de ζ, ξ, η et de ζ_1, ξ_1, η_1, deviennent imaginaires, savoir, celles de ξ, η, ζ, à raison des valeurs alors imaginaires (102) ou (106) de P ou de Q, et, celles de ξ_1, η_1, ζ_1, à raison, tout à la fois, des valeurs imaginaires (102) ou (106) de P_1 ou de Q_1, et de celle de la fonction $f(t - l_1 x - my)$. Les solutions obtenues, tout en satisfaisant analytiquement aux équations du problème, n'ont donc plus de signification physique.

Mais on pourra évidemment composer des solutions réelles et applicables, en superposant, vu la forme linéaire des équations du problème, les deux solutions analytiques *conjuguées* que donnera, pour une infinité d'expressions imaginaires de la fonction f, l'emploi successif des deux signes $\pm$ que comporte l'imaginaire $\sqrt{-1}$. Il faudra, toutefois, associer des solutions *conjuguées à la fois* pour les déplacements *incidents, réfléchis* et *réfractés*. Cela reviendra à mettre pour f une fonction analytique appropriée à la nature du mouvement vibratoire que l'on veut étudier, et à adopter ensuite pour ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1 les *parties réelles* respectives de leurs expressions *complexes*; car la suppression des parties imaginaires équivaut à faire la demi-somme de la solution analytique obtenue et de sa conjuguée.

Du reste, comme toutes les équations à vérifier, *indéfinies* ou *définies*, sont linéaires (à coefficients réels) et homogènes en ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1 ou leurs dérivées, la substitution, à ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1, d'expressions imaginaires, s'y effectue en ajoutant simplement ce qu'y donnent les parties réelles de ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1, et qui est réel, à ce qu'y donnent les parties imaginaires, et qui se trouvera affecté du facteur $\sqrt{-1}$. La vérification des équations par certaines expressions imaginaires des *déplacements* (dits alors *symboliques*), tant pour les mouvements incidents que pour les mouvements réfléchis et réfractés, entraîne donc leur vérification séparée *par les parties réelles* de ces expressions; et ces parties constituent par conséquent, à elles seules, un *système réel* d'intégrales des équations. Comme nous savons que le problème de la réflexion et de la réfraction défini par ces équations est entièrement déterminé (p. 349), il suffira que les mouvements incidents y soient ceux que l'on propose, pour que les mouvements

réfléchis et réfractés y soient également ceux qui se produiront en effet.

Cela posé, les déplacements à exprimer dans les phénomènes optiques devant être pendulaires, du moins à une première approximation, la fonction $f(t)$, la plus simple qui soit propre à les représenter par sa partie réelle, dans le rayon incident et à l'origine des coordonnées, sera (sauf un facteur constant) l'exponentielle imaginaire $e^{kt\sqrt{-1}}$, avec k, *réel*, positif et inversement proportionnel à la période. D'ailleurs, l'absence de rayon réfracté confirme bien un tel choix de $e^{kt\sqrt{-1}}$ pour $f(t)$. Car ce choix fait très simplement exprimer par nos formules (98), (105) l'extinction asymptotique du mouvement à une distance de quelques longueurs d'onde de la surface $x = 0$, pour les valeurs positives de x. En effet, $f(t - l_1 x - my)$ et, par suite, ξ_1, η_1, ζ_1, ne contiendront x que par le facteur *réel* $e^{-kl_1 x\sqrt{-1}}$, évanouissant aux distances x croissantes *pourvu que la valeur* (108) *de* l_1 *soit prise avec son signe inférieur* (ou l_1 avec signe contraire à celui de $\sqrt{-1}$). Il serait impossible de la prendre avec l'autre signe, qui rendrait indéfiniment croissants avec x ce facteur exponentiel et, par suite, les déplacements de l'éther dans le second milieu : circonstance incompatible avec l'hypothèse du repos initial de ce milieu [1].

---

[1] Il ne faut pas oublier que le coefficient d'amplitude des mouvements incidents, réduit ici à 1 pour plus de simplicité, mais généralement variable (avec une lenteur relative) d'un point à l'autre d'une même onde, c'est-à-dire d'un rayon incident *élémentaire* aux rayons voisins, multipliera aussi les parties réelles de ξ_1, η_1, ζ_1 et sera, par conséquent, dans les mouvements réfractés, variable, près d'une même onde incidente suivie sur la surface de séparation, comme il l'est quand on se transporte sans cesse aux parties toujours nouvelles de cette onde qui atteignent successivement la surface séparative. Il n'y a donc, pour une onde incidente *de petite étendue*, qu'un *rudiment* d'onde réfractée : d'où il suit que les rayons incidents n'ont vraiment pas de continuation dans le second milieu.

Sans cette remarque, on serait tenté de regarder les mouvements produits dans la couche superficielle du second milieu, non comme l'aboutissement d'*une infinité de rayons incidents* qui s'y réfléchissent en entier, mais comme constituant un véritable rayon réfracté, couché sur la surface séparative et s'y propageant, *dans les feuillets superficiels du second milieu*, avec la vitesse même $\frac{1}{m} = \frac{\omega}{\sin i} = \frac{N}{\sin i}\omega_1$ (inférieure à la vitesse normale ω_1) qu'a l'onde incidente, *considérée* dans la surface séparative $x = 0$ dont elle ébranle successivement les diverses bandes normales à l'axe des y. En effet, ξ_1, η_1, ζ_1 auront dans leurs parties réelles, expression des déplacements effectifs de l'éther du second milieu, outre le facteur évanouissant $e^{-k\frac{x}{\omega}\sqrt{\sin^2 i - N^2}}$, le cosinus d'un arc comprenant le terme *commun*

Alors les expressions (102), (106) de P, Q deviennent

(109) $P = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha = e^{\alpha\sqrt{-1}}, \quad Q = \cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta = e^{\beta\sqrt{-1}},$

si l'on pose

(110)
$$\left\{\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\cos 2i + N^2}{1 - N^2}, \\ \sin\alpha &= \frac{2\cos i\sqrt{\sin^2 i - N^2}}{1 - N^2}, \\ \cos\beta &= \frac{N^2(1+N^2) - (1+N^4)\sin^2 i}{N^2(1-N^2) - (1-N^4)\sin^2 i}, \\ \sin\beta &= \frac{2N^2\cos i\sqrt{\sin^2 i - N^2}}{N^2(1-N^2) - (1-N^4)\sin^2 i}, \end{aligned}\right.$$

quantités dont les carrés ont bien pour sommes respectives l'unité. Tandis que la partie réelle de $f(t - lx - my)$ sera le déplacement dans le rayon incident

(111) $$\delta = \cos k(t - lx - my),$$

le déplacement dans le rayon réfléchi sera évidemment celle de $Pf(t + lx - my)$ ou de $Qf(t + lx - my)$, savoir

(112) $\delta' =$ soit $\cos[\alpha + k(t + lx - my)]$, soit $\cos[\beta + k(t + lx - my)]$.

La réflexion totale produit donc les *avances de phases* respectives exprimées par les deux angles généralement inégaux α, β. Les formules (110) définissant ceux-ci sont dues à Fresnel, qui les a déduites, par une sorte de divination, des précédentes (109) de P, Q, et en a contrôlé de curieuses conséquences par l'observation. De nombreuses

---

$k(t - my)$, plus un terme constant, *propre* à ξ_1, ou à η_1, ou à ζ_1. Sur chaque feuillet $x = \text{const.}$ de la couche superficielle du second milieu, s'observeront donc (si l'onde incidente est latéralement indéfinie et d'amplitude uniforme) des déplacements fonctions de $t - my$, ou paraissant s'y propager, dans le sens tangentiel des y positifs, avec la vitesse $\frac{1}{m}$.

De même que le coefficient d'amplitude à introduire comme facteur commun, dans les expressions de tous les déplacements (incidents, réfléchis, réfractés), est non pas absolument constant, mais variable lentement et à volonté d'un point à l'autre d'une même onde, de même aussi on peut le prendre fonction arbitraire du temps, pourvu que son changement soit insensible pendant une période vibratoire. Rien n'empêche donc qu'il s'évanouisse asymptotiquement pour $t = -\infty$, de manière à annuler, aux distances infinies de la surface, les mouvements tant réfléchis que réfractés, et même aussi pour $t = \infty$, si l'on désire annuler également aux distances infinies de l'origine le mouvement incident.

expériences ultérieures les ont, depuis, vérifiées encore plus complètement.

Le problème de la *réflexion totale* ne se trouve ainsi résolu, il est vrai, que dans le cas de mouvements pendulaires (et dans celui de vibrations périodiques, qui lui est réductible). Pour que la méthode suivie pût fournir de même sa solution générale, il faudrait savoir décomposer toujours la fonction arbitraire

$$f(t - lx - my),$$

définissant les mouvements incidents, en deux fonctions imaginaires conjuguées qui jouiraient des propriétés analytiques des fonctions usuelles, et que l'on manierait comme celles-ci dans les calculs.

34. Problème de la réflexion et de la réfraction cristallines : sa mise en équation. — Le problème des mouvements, tant réfléchis que réfractés, produits par l'arrivée d'un pinceau lumineux ([1]) à la surface séparative de deux milieux transparents *hétérotropes,* conduit à des calculs beaucoup plus compliqués. Mais il se traite par les mêmes principes, c'est-à-dire au moyen des conditions définies (90), d'une mise en œuvre relativement facile grâce encore aux hypothèses consistant à supposer planes, du moins dans des étendues de dimensions comparables à la longueur d'ondulation, les ondes réfléchies et réfractées, comme le sont sensiblement les ondes incidentes et la surface séparative elle-même, et à admettre la proportionnalité au déplacement incident δ, en tous les points de cette surface et à tous les instants, des déplacements soit réfléchis, δ', δ'', ..., soit réfractés, δ_1, δ'_1, ... L'ensemble des équations indéfinies du mouvement, propres aux deux milieux respectifs, et des relations définies obtenues déterminant la suite des vibrations consécutives à un système donné de vibrations *incidentes,* il suffira qu'on parvienne ainsi à vérifier toutes ces équations, pour avoir leur solution unique et, par conséquent, les lois effectives de la réflexion et de la réfraction cristallines.

Comme le déplacement δ, ou δ', δ'', ..., δ_1, δ'_1, ..., affecte, dans un milieu hétérotrope, une direction invariable pour chaque système d'ondes planes ayant sa normale d'orientation donnée et l'une des deux vitesses de propagation, ω, ou ω', ω'', ..., ω_1, ω'_1, ..., correspondantes, les cosinus directeurs de ces déplacements, cosinus que j'appellerai (λ, μ, ν) pour δ, (λ', μ', ν') pour δ', $(\lambda'', \mu'', \nu'')$ pour δ'', ...,

---

([1]) Venu d'assez loin pour pouvoir être supposé *parallèle* ou constitué par des ondes planes.

$(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ pour δ_1, $(\lambda'_1, \mu'_1, \nu'_1)$ pour δ'_1, ..., seront des constantes, c'est-à-dire des *paramètres,* fonctions, dans chaque milieu, des trois quotients respectifs, (l, m, n), ou (l', m', n'), ou (l'', m'', n''), ..., ou (l_1, m_1, n_1), ou (l'_1, m'_1, n'_1), ..., des trois cosinus directeurs des normales aux ondes par la vitesse de propagation, ω, ou ω', ω'', ..., ou ω_1, ω'_1, ..., de celles-ci.

Cela posé, adoptons toujours la surface séparative pour plan des yz, la normale qu'on lui mène dans le second milieu, à partir du point où aboutit l'axe du pinceau incident, comme axe des x, enfin, pour axe des y, la projection, sur la surface séparative, de la perpendiculaire tirée de l'origine aux ondes incidentes, dans le second milieu ou suivant le sens de leur propagation ; de manière à avoir, i désignant l'angle aigu positif de cette perpendiculaire avec l'axe des x,

$$(l, m, n) = \frac{(\cos i, \sin i, 0)}{\omega}, \qquad \delta = f(t - lx - my).$$

La proportionnalité admise des déplacements soit réfléchis, δ', δ'', ..., soit réfractés, δ_1, δ'_1, ..., à δ, sur la surface séparative $x = 0$, oblige encore à prendre, pour $x = 0$, fonctions de la variable unique $t - my$, tous les déplacements réfléchis et réfractés δ', δ'', ..., δ_1, δ'_1, ..., qui se trouvent avoir les formes respectives

$$\varphi(t - l'x - m'y - n'z),\quad \chi(t - l''x - m''y - n''z),\quad \dots,$$
$$\psi(t - l_1x - m_1y - n_1z),\quad \varpi(t - l'_1x - m'_1y - n'_1z),\quad \dots,$$

ou dépendre, chacun, d'une seule variable, analogue à celle dont dépend δ. Et l'on y a, par suite, si P, Q, ..., P_1, Q_1, ... désignent des constantes,

$$(\text{pour } x = 0)\quad \frac{\delta'}{\delta} = P,\quad \frac{\delta''}{\delta} = Q,\quad \dots,\quad \frac{\delta_1}{\delta} = P_1,\quad \frac{\delta'_1}{\delta} = Q_1,\quad \dots,$$

c'est-à-dire, d'abord (n étant nul),

$$n' = 0,\quad n'' = 0,\quad \dots,\quad n_1 = 0,\quad n'_1 = 0,\quad \dots,$$
$$m' = m'' = \dots = m_1 = m'_1 = \dots = m = \frac{\sin i}{\omega};$$

et, ensuite,

$$\delta' = P\, f(t - l'x - my),\quad \delta'' = Q\, f(t - l''x - my),\quad \dots,$$
$$\delta_1 = P_1 f(t - l_1x - my),\quad \delta'_1 = Q_1 f(t - l'_1x - my),\quad \dots.$$

Telles sont donc les formes des déplacements réfléchis et réfractés,

où l', l'', ..., l_1, l'_1, ..., P, Q, ..., P_1, Q_1, ... restent seuls disponibles; et il vient enfin, pour les projections *totales* ξ, η, ζ, ou ξ_1, η_1, ζ_1 des déplacements dans les deux milieux respectifs, les formules générales suivantes :

1° Dans le premier milieu,

$$\begin{aligned}
\xi &= \lambda f(t-lx-my) + \lambda' P f(t-l'x-my) + \lambda'' Q f(t-l''x-my) + \ldots,\\
\eta &= \mu f(t-lx-my) + \mu' P f(t-l'x-my) + \mu'' Q f(t-l''x-my) + \ldots,\\
\zeta &= \nu f(t-lx-my) + \nu' P f(t-l'x-my) + \nu'' Q f(t-l''x-my) + \ldots;
\end{aligned}$$

2° Dans le second milieu,

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \lambda_1 P_1 f(t-l_1 x-my) + \lambda'_1 Q_1 f(t-l'_1 x-my) + \ldots,\\
\eta_1 &= \mu_1 P_1 f(t-l_1 x-my) + \mu'_1 Q_1 f(t-l'_1 x-my) + \ldots,\\
\zeta_1 &= \nu_1 P_1 f(t-l_1 x-my) + \nu'_1 Q_1 f(t-l'_1 x-my) + \ldots.
\end{aligned}$$

Ces expressions de ξ, η, ζ et de ξ_1, η_1, ζ_1 vérifieront les équations indéfinies respectives du mouvement dans les deux milieux, pourvu que se trouve satisfaite la relation existant, dans chaque milieu, entre les *trois* paramètres (l, m, n), ou (l_1, m_1, n_1), et qui existe aussi soit entre (l', m', n'), ou (l'', m'', n''), ..., soit entre (l'_1, m'_1, n'_1), ... Car, dès que cette relation sera vérifiée (grâce à des valeurs convenables de l', l'', ..., l_1, l'_1, ...), rien n'empêchera de prendre les rapports mutuels des cosinus λ, μ, ν, ou λ', μ', ν', ou λ'', μ'', ν'', ..., par lesquels seuls figurent ces cosinus dans les formules précédentes (à raison des facteurs arbitraires P, Q, ..., P_1, Q_1, ...), tels que l'exigent les lois des ondes planes dans chacun de ces milieux.

Or la relation en question, qui, lorsqu'on y introduit les cosinus directeurs proportionnels des perpendiculaires aux ondes et les vitesses de propagation correspondantes

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \qquad \omega' = \frac{1}{\sqrt{l'^2+m'^2+n'^2}}, \qquad \ldots,$$
$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}}, \qquad \ldots,$$

devient l'équation du second degré en ω^2 propre à chaque milieu, est bicarrée en l, m, n, ou en l', m', n', ..., dans le système d'axes coordonnés constitué par les axes principaux de symétrie du milieu. Car elle se déduit alors de l'équation (27) en ω (p. 292), par les substitutions de $l\omega$, $m\omega$, $n\omega$ à $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et de $l^2+m^2+n^2$ à $\frac{1}{\omega^2}$; ce

qui donne

$$\frac{a^2 l^2}{1-a^2(l^2+m^2+n^2)}+\frac{b^2 m^2}{1-b^2(l^2+m^2+n^2)}+\frac{c^2 n^2}{1-c^2(l^2+m^2+n^2)}+1=0,$$

ou bien, après évanouissement des dénominateurs,

$$(l^2+m^2+n^2)(b^2c^2l^2+c^2a^2m^2+a^2b^2n^2)-(b^2+c^2)l^2-(c^2+a^2)m^2-(a^2+b^2)n^2+1=0.$$

Donc, dans ce cas, les racines l', l'', ... ou l_1, l'_1, ... sont, deux à deux, égales et contraires, donnant ainsi, quand elles sont réelles, des systèmes d'ondes planes symétriques, deux à deux, de part et d'autre de la surface séparative, qui est alors un plan principal du cristal.

Actuellement, si l'on passe de tout système de coordonnées rectangulaires, comme est le nôtre des x, y, z, à ce système principal, les anciennes coordonnées x, y, z sont remplacées par les fonctions linéaires et homogènes des nouvelles qu'indiquent les formules usuelles de transformation ; et les expressions, comme $lx+my+nz$, figurant, à côté du temps t, dans la variable unique dont dépend chaque fonction δ, ou δ', ou δ'', ..., ou δ_1, ..., gardent, par suite, la même forme lorsqu'on y introduit ces nouvelles coordonnées, mais avec des coefficients fonctions linéaires homogènes des proposés l, m, n, et qui, étant ainsi ceux qui conviennent aux coordonnées principales, vérifient la relation bicarrée précédente. On voit qu'alors, m, n étant ici donnés, puisqu'ils valent respectivement $\frac{\sin i}{\omega}$ et zéro, cette équation, toujours du quatrième degré en l, cesse d'être exactement bicarrée, pour le devenir *approximativement* (en raison de la *faible* hétérotropie optique des cristaux naturels). Elle comporte donc deux couples de racines ou réelles ou imaginaires conjuguées, chaque couple étant censé, *quand les racines sont réelles,* comprendre celles, généralement au nombre de deux, qui ont *même signe*.

Quand les deux couples de racines sont réels, quatre systèmes d'ondes planes ou quatre pinceaux lumineux se trouvent donc analytiquement possibles; mais deux seulement de ces pinceaux sont dirigés, à partir de l'origine, vers la région des x positifs, et peuvent ainsi représenter des rayons *réfractés,* s'il s'agit du second milieu, les deux autres pinceaux allant vers les x négatifs où ce milieu n'existe pas; et, s'il s'agit, au contraire, du premier milieu, les deux pinceaux dirigés vers les x négatifs peuvent seuls, de même, constituer des rayons *réfléchis,* les deux autres (dont l'*un* est le prolon-

gement du rayon *incident*), allant, au delà de l'origine, vers la région des x positifs où ce milieu n'existe pas. On obtient donc, en général, quand les racines des équations en l et en l_1 sont réelles, *deux* systèmes d'ondes planes réfléchies et *deux* systèmes d'ondes planes réfractées, comme dans le cas où la surface séparative serait un plan principal de chacun des deux milieux.

Alors les constantes P, Q, ou P_1, Q_1, ... se trouvent être au nombre de quatre en tout; et les conditions définies (90) (p. 343) en même nombre, dont chacune aura à tous ses termes, pour $x=0$, l'unique facteur variable $f(t-my)$ ou $f'(t-my)$, deviendront, après suppression de ce facteur commun, les quatre équations du premier degré qu'il faut justement, pour déterminer ces quatre constantes. Le problème sera donc résolu.

Si, au contraire, les couples de racines l' ou l_1, associées maintenant de manière à être *conjuguées* dans chaque couple, sont imaginaires (ou peut-être, parfois, quelqu'un d'eux seulement), les rayons correspondants réfléchis ou réfractés n'existeront plus; et l'on ne pourra former, pour chaque paire disparue de racines réelles, qu'une double expression analytique de l'intégrale particulière correspondante, devenue imaginaire en ce qui concerne les formules de l' ou de l_1 et, par suite, de P, Q, P_1, Q_1 dans les rayons tant réfléchis que réfractés. Mais, supposant alors imaginaire elle-même la fonction $f(t-lx-my)$, on pourra encore former, par superposition de solutions imaginaires conjuguées, des solutions réelles de forme variée et, spécialement, des solutions exprimant les vibrations pendulaires usuelles, d'abord, pour le *rayon* incident, puis, en associant convenablement les doubles solutions possibles, pour les *mouvements* réfléchis et réfractés.

L'exemple, traité ci-dessus, de la réflexion totale à la surface séparative de deux milieux isotropes, tend à montrer que la condition supplémentaire, résultant de l'état initial, imposée aux déplacements réfléchis ou réfractés, de ne pas devenir infinis (et même de s'évanouir) aux distances infinies de l'origine, suffira pour limiter au strict nécessaire, c'est-à-dire à une seule, les expressions réelles obtenues des mouvements tant réfléchis que réfractés, consécutifs à des mouvements donnés incidents. Il le faut bien d'ailleurs, puisque nous savons (p. 349) que le problème est déterminé.

Quand l'un des deux milieux est isotrope, l'équation correspondante en l' ou l_1, alors bicarrée, a ses racines doubles, ou réduites à deux; mais les vibrations ne sont plus astreintes qu'à être transversales et peuvent recevoir, dans les solutions particulières, deux directions

rectangulaires différentes (dont l'une reste arbitraire), ou être, par exemple, soit normales, soit parallèles au plan d'incidence. Or cela suffit évidemment pour rendre le rayon réfléchi ou réfracté, devenu unique, équivalent à deux distincts, polarisés à angle droit et ayant chacun leur coefficient d'amplitude *propre* P ou Q, P_1 ou Q_1. Rien n'est donc changé aux conclusions précédentes.

35. **Proportion générale des sinus, pour les perpendiculaires aux ondes tant réfléchies ou réfractées qu'incidentes, et construction d'Huygens pour les rayons correspondants.** — Imaginons un observateur capable de voir autour de lui, aux très petites distances, les mouvements incident, réfléchis et réfractés, mais astreint à rester sur la surface séparative $x = 0$, où il sera, d'ailleurs, librement mobile. Pour lui, les déplacements δ, δ', δ'', δ_1, δ'_1 correspondant à des rayons réels auront en commun leur unique facteur variable δ ou $f(t - my)$; ils se trouveront donc tous, partout, proportionnels à ce facteur, constant à l'époque t le long des parallèles à l'axe des z, et qui sera même invariable sur chacune d'elles, pourvu qu'on la suppose animée, suivant les y, d'une translation uniforme de vitesse $\frac{1}{m}$, y rendant justement invariable le binome $t - my$. C'est dire : 1° que chaque onde incidente, et les ondes réfléchies ou réfractées qui en dérivent, ont *trace commune* sur la surface séparative $x = 0$, ou, en particulier, leurs normales respectives, tirées de l'origine, comprises dans un même plan contenant la normale à la surface séparative; et 2° que cette trace commune, suivant laquelle il faudra mener leurs plans respectifs, chemine sur la surface séparative, vers les y positifs, avec la vitesse $\frac{1}{m}$.

Mais m exprime, dans chaque onde, le quotient du cosinus de l'angle de sa normale avec les y positifs, par sa vitesse de propagation, ω, ou ω', ω'', ω_1, ω'_1, suivant la normale même. Comme ce cosinus est le sinus de l'angle aigu positif, i ou i', ou i'', ou i_1, ou i'_1, fait par la normale à l'onde considérée avec la normale, tirée de part en part, à la surface séparative, il en résulte que m exprime la valeur commune des rapports $\frac{\sin i}{\omega}$, $\frac{\sin i'}{\omega'}$, $\frac{\sin i''}{\omega''}$, $\frac{\sin i_1}{\omega_1}$, $\frac{\sin i'_1}{\omega'_1}$, ou qu'on a la multiple *proportion*, dite *des sinus*,

$$\frac{\sin i}{\omega} = \frac{\sin i'}{\omega'} = \frac{\sin i''}{\omega''} = \frac{\sin i_1}{\omega_1} = \frac{\sin i'_1}{\omega'_1}.$$

Ainsi, *les angles faits avec la normale à la surface séparative*, menée au point où la perce l'axe du rayon incident, non par les divers rayons incident, réfléchis, ou réfractés, mais *par les perpendiculaires tirées de ce point aux ondes correspondantes, ont leurs sinus proportionnels aux vitesses mêmes de propagation de ces ondes.*

Voilà comment se généralise la loi élémentaire de la réfraction, due à Snellius, Descartes ou plutôt Fermat, pour s'étendre à la réflexion et à la réfraction par les surfaces des milieux hétérotropes.

Mais, prolongeons (en idée), dans leurs propres plans, une onde incidente et ses dérivées réfléchies ou réfractées, assez pour qu'elles ne cessent pas de marquer leur trace *commune* sur le plan de la surface séparative, durant toute une unité de temps après l'arrivée du centre de l'onde incidente sur cette surface, à l'origine même des coordonnées. Puis souvenons-nous que ces ondes sont, comme des ondes planes quelconques de chaque milieu passées en même temps qu'elles à l'origine, constamment tangentes à une onde courbe, de dimensions uniformément grandissantes, décrite autour de la même origine comme centre et se confondant, après une unité de temps, avec l'onde courbe de Fresnel propre à ce milieu. De là résultera immédiatement la construction suivante, pour les diverses ondes, incidente, réfléchies, réfractées, et pour les rayons soit réfléchis, soit réfractés.

Autour du point où le *plan* séparatif des deux milieux (prolongé indéfiniment) est percé par l'axe du rayon incident donné, lieu des centres des ondes incidentes, on décrira l'onde de Fresnel relative au premier milieu, et celle qui est relative au second ou, du moins, sa moitié contenue dans le second milieu. Puis, on prolongera idéalement, dans le second milieu, l'axe du rayon incident donné, jusqu'à la rencontre de la nappe d'onde, relative au premier milieu, à laquelle se rapporte ce rayon et que fait connaître son mode de polarisation, également donné. Alors, par le point obtenu, on mènera le plan tangent, représentant, prolongé dans le premier milieu, l'onde incidente, une unité de temps après son passage au centre de l'onde courbe. La trace de ce plan tangent sur la surface séparative étant, dès lors, celle des ondes réfléchies et réfractées, on mènera les plans de celles-ci, suivant cette trace, tangentiellement aux moitiés d'ondes courbes de Fresnel situées dans leurs milieux respectifs, savoir, en général, un plan, et un seul, tangent à chaque nappe des ondes courbes, du côté de la surface séparative où le milieu existe, et pourvu que la trace commune des ondes planes possibles soit *extérieure* à la nappe en question ou ne rende pas *imaginaire* le plan tangent demandé. Alors la

droite joignant le centre au point de contact sera le rayon cherché correspondant, réfléchi ou réfracté.

Telle est la construction dite *d'Huygens,* du nom de l'illustre et génial physicien du XVIIe siècle qui en a eu l'idée pour expliquer la réflexion et la réfraction et, en particulier, pour obtenir, dans le spath, le rayon réfracté *extraordinaire,* qu'il supposait constitué par des ondes planes tangentes à une onde courbe ellipsoïdale. Seulement, tandis que ces ondes planes s'offrent à nous comme *enveloppées* de l'onde courbe, il se représentait, au contraire, chacune d'elles comme l'enveloppe d'une infinité d'ondes courbes semblables, de dimensions décroissantes, ayant leurs centres respectifs échelonnés le long du trajet de l'onde incidente sur la surface séparative. Car, par analogie sans doute avec l'onde liquide rectiligne qu'on voit, à droite et à gauche d'un bateau en marche, dessiner le *sillage* en se détachant sans cesse, diagonalement, de la *proue* ou arête antérieure du bateau, et qu'on peut supposer résulter d'une infinité d'ondes circulaires grandissantes engendrées sans cesse par le choc de cette proue contre l'eau ([1]), il considérait toute partie de l'onde lumineuse incidente qui atteint la surface séparative, comme instantanément génératrice d'une onde courbe, et chaque onde réfléchie ou réfractée effective, comme formée par les parties *concordantes,* ou s'intersectant mutuellement sous des angles infiniment petits, de toutes ces ondes courbes nées successivement, depuis celle qui, ancienne déjà d'une unité de temps, est justement ici la surface de Fresnel, jusqu'aux ondes naissantes à

([1]) Les ondes élémentaires constituant, de chaque côté du bateau, le *sillage,* ou principale vague rectiligne qu'on y observe, sont plus visibles encore quand le bateau est à rames et que chaque coup de rame donne une de ces ondes, bien distincte de toutes les autres avant sa fusion avec elles sur leur enveloppe commune.

Cet exemple emprunté à l'Hydrodynamique offre, à côté de circonstances très complexes, l'avantage de ne donner à superposer qu'une série *simple* d'ébranlements, ayant leurs centres échelonnés le long d'une *ligne,* au lieu de la série *double* qu'on a lorsque les centres d'ébranlement couvrent une *surface,* comme font ceux des ondes d'Huygens en Optique. Aussi la série des termes qui évaluent, en chaque point de la nappe liquide, les mouvements envoyés par les divers centres, converge-t-elle beaucoup plus vite que ne font, par exemple, les intégrales définies exprimant les effets des diverses zones d'Huygens : c'est au point de rendre la théorie de Fresnel applicable à la diffraction des ondes liquides périodiques, même quand l'amplitude des ondes élémentaires est pareille sur toute leur circonférence, ou n'éprouve aucun décroissement à droite et à gauche du rayon normal à l'onde excitatrice générale. On peut voir à ce sujet le Mémoire sur les *Ondes liquides périodiques,* cité plus haut (p. 328), à propos de la théorie de la diffraction.



peine, dont l'ensemble se confond avec la trace actuelle de l'onde génératrice incidente sur la surface séparative.

36. Réflexion, sur un cristal uniaxe, d'un rayon à vibrations parallèles au plan d'incidence, quand ce plan contient l'axe du cristal. — Parmi les applications variées de la théorie précédente qui ont subi, toujours victorieusement, le contrôle de l'observation, je choisirai, pour m'y borner, celle qui paraît la plus intéressante, en ce qu'elle confirme le fait de la perpendicularité de la vibration au rayon lumineux, plutôt qu'à la normale à l'onde, et tend bien, par suite, à changer en *quasi-transversalité,* dans les cristaux biréfringents, la transversalité exacte des vibrations, plus simple en apparence, admise par Fresnel dans des milieux quelconques. C'est le problème de la réflexion, sur un cristal uniaxe, d'un rayon extérieur à vibrations parallèles au plan d'incidence, dans le cas où ce plan contient l'axe optique du cristal et a complètement, pour le phénomène, le rôle d'un plan de symétrie.

Le rayon réfléchi (unique à raison de l'isotropie du milieu extérieur) devant, dès lors, se trouver contenu dans le plan d'incidence, comme le rayon réfracté fourni par chaque nappe de la surface d'onde du cristal, et les vibrations de tous ces rayons devant de même, par raison de symétrie, lui être parallèles, ou n'avoir aucune composante suivant les z, c'est-à-dire dans le rayon réfracté ordinaire, celui-ci sera nul. Et l'on pourra réduire l'onde courbe du cristal à l'ellipsoïde d'Huygens ou même, pour ne pas sortir du plan d'incidence, à son ellipse méridienne contenue dans ce plan, suffisante pour y construire la trace de l'onde plane réfractée extraordinaire.

Les déplacements ξ, η, suivant les x et les y, de l'éther du premier milieu seront donc ceux du n° 32 que donnent les formules (104) (p. 353), savoir, en appelant i l'*angle d'incidence,*

$$\xi = \sin i[-f(t - lx - my) + Qf(t + lx - my)],$$
$$\eta = \cos i[+f(t - lx - my) + Qf(t + lx - my)].$$

D'autre part, si la vibration du rayon réfracté était dans le plan de l'onde correspondante, ses deux premiers cosinus directeurs seraient $-\sin i_1$, $\cos i_1$, puisque nous appelons i_1 l'angle aigu que fait avec les x positifs la perpendiculaire menée de l'origine à l'onde réfractée; et les déplacements ξ_1, η_1 de l'éther, dans le second milieu, seraient $-\delta_1 \sin i_1$, $\delta_1 \cos i_1$. Mais ces cosinus sont, en réalité, $-\sin r$, $\cos r$, r désignant l'*angle de réfraction,* ou angle du *rayon réfracté* avec les x positifs; car la vibration se fait perpendiculairement au rayon.

Il viendra donc, vu l'expression $Q_1 f(t - l_1 x - my)$ de δ_1,

$$\xi_1 = - Q_1 \sin r f(t - l_1 x - my), \qquad \eta_1 = Q_1 \cos r f(t - l_1 x - my),$$

expressions où l_1, m désignent les deux quotients de $\cos i_1$, $\sin i_1$ par la vitesse ω_1 de l'onde réfractée.

Cela posé, formons d'abord la relation définie concernant l'égalité des deux rotations moyennes, ou des deux binomes $\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}$, $\frac{d\xi_1}{dy} - \frac{d\eta_1}{dx}$, sur la surface séparative $x = 0$. Le second de ces binomes y est immédiatement

$$Q_1(m \sin r + l_1 \cos r) f'(t - my) \quad \text{ou} \quad \frac{Q_1}{\omega_1}(\cos r \cos i_1 + \sin r \sin i_1) f'(t - my).$$

Or, si l'on introduit la longueur R du rayon réfracté, dans l'ellipse d'Huygens, au lieu de sa projection ω_1 sur la perpendiculaire ω_1 menée du centre de l'ellipse à la tangente correspondante, ω_1 sera le produit de R par le cosinus de l'angle des deux droites, cosinus justement exprimé par la somme $\cos r \cos i_1 + \sin r \sin i_1$ des produits respectifs de leurs cosinus directeurs. Donc, le binome différentiel considéré devient, à la surface $x = 0$, $\frac{Q_1}{R} f'(t - my)$; et son égalité au binome analogue $\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}$, exprimé, comme plus haut (p. 354), par

$$\frac{1 - Q}{\omega} f'(t - my),$$

donne la proportion

$$\frac{1 - Q}{Q_1} = \frac{\omega}{R}.$$

L'égalité des deux déplacements tangentiels η, η_1 à la surface donnant, d'autre part, pour déterminer Q et Q_1, la seconde équation

$$(1 + Q) \cos i = Q_1 \cos r, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1 + Q}{Q_1} = \frac{\cos r}{\cos i},$$

il vient, en définitive :

$$\text{(a)} \quad \frac{1 - Q}{1 + Q} = \frac{\frac{\omega}{R}}{\frac{\cos r}{\cos i}}, \qquad \text{ou} \qquad Q = \frac{\frac{\cos r}{\cos i} - \frac{\omega}{R}}{\frac{\cos r}{\cos i} + \frac{\omega}{R}}, \qquad \text{et} \qquad Q_1 = \frac{\cos i}{\cos r}(1 + Q).$$

L'hypothèse d'exacte transversalité aurait conduit à mettre, dans

ces formules, ω_1 au lieu de R, mais, surtout, $\cos i_1$ au lieu de $\cos r$, qui peut en différer assez sensiblement.

Il reste à déterminer r et R par la construction d'Huygens, effectuée dans le plan des xy.

Désignons, à cet effet, par V l'angle aigu, compté positivement hors du cristal, que l'axe optique fait, dans le plan des xy ou d'incidence, avec la surface séparative, c'est-à-dire avec les y positifs, et que fait aussi, dans le cristal, avec les x positifs, la trace de l'équateur de l'ellipsoïde d'Huygens décrit autour de l'origine. Le méridien de l'ellipsoïde, rapporté à cette trace et à l'axe principal comme axes de coordonnées spéciales X, Y, aura son équation de la forme [1]

$$\frac{X^2}{b^2}+\frac{Y^2}{a^2}=1,$$

tandis que sa tangente, menée à l'extrémité (X, Y) du rayon R et représentant la trace de l'onde réfractée sur le plan des xy, sera exprimée, en y appelant X_1, Y_1 les coordonnées courantes, par l'équation

$$\frac{XX_1}{b^2}+\frac{YY_1}{a^2}=1.$$

Il faut y faire

$$X_1=\frac{\omega}{\sin i}\sin V,\qquad Y_1=\frac{\omega}{\sin i}\cos V;$$

car le point de l'axe des y par lequel se mène l'onde réfractée tan-

---

[1] L'équation générale (53) de l'onde (p. 301) devient, en y faisant disparaître les dénominateurs, développant et réduisant,

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\\&\quad-a^2(b^2+c^2)x^2-b^2(c^2+a^2)y^2-c^2(a^2+b^2)z^2+a^2b^2c^2=0.\end{aligned}$$

Remplaçons x, y, z par X, Y, Z et exprimons que, dans le cristal proposé, où la surface est de révolution autour de l'axe des Y, on a $c=a$. Nous aurons

$$(X^2+Y^2+Z^2-a^2)(a^2X^2+b^2Y^2+a^2Z^2-a^2b^2)=0.$$

L'annulation du premier facteur entre parenthèses donne la nappe sphérique de l'onde, et l'annulation du second facteur, la nappe ellipsoïdale.

Le méridien de celle-ci dans le plan $Z=0$ a donc bien pour équation

$$a^2X^2+b^2Y^2-a^2b^2=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{X^2}{b^2}+\frac{Y^2}{a^2}=1.$$

gente est, comme on a vu, à la distance $y = \frac{1}{m} = \frac{\omega}{\sin i}$ de l'origine, et ses deux coordonnées X_1, Y_1 sont, par suite, les deux projections de cette ordonnée y, sous les angles respectifs $\frac{\pi}{2} - V$ et V. D'autre part, si θ désigne l'angle, compté positivement en tournant vers les Y positifs, du rayon *de contact* R avec l'axe des X positifs, ou l'excédent de r sur V, les deux coordonnées X, Y de l'extrémité de R seront $R\cos\theta$ et $R\sin\theta$. Les deux équations, divisées respectivement par R^2 et par R, de l'ellipse et de sa tangente deviendront donc, pour déterminer θ, R et, par suite, l'angle de réfraction r, égal à $V + \theta$:

$$\text{(b)} \qquad \frac{\cos^2\theta}{b^2} + \frac{\sin^2\theta}{a^2} = \frac{1}{R^2}, \qquad \frac{\omega}{\sin i}\left(\frac{\sin V \cos\theta}{b^2} + \frac{\cos V \sin\theta}{a^2}\right) = \frac{1}{R}.$$

La substitution, dans la première, de la valeur de $\frac{1}{R}$ fournie par la seconde, conduit à la relation, homogène en $\frac{\cos\theta}{b}$ et $\frac{\sin\theta}{a}$,

$$\text{(b')} \qquad \left(\frac{\cos\theta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{a}\right)^2 = \frac{\omega^2}{\sin^2 i}\left(\frac{\sin V}{b}\,\frac{\cos\theta}{b} + \frac{\cos V}{a}\,\frac{\sin\theta}{a}\right)^2.$$

Et celle-ci, divisée par $\cos^2\theta$, devient une équation du second degré en $\tang\theta$, dont on choisira, pour avoir la valeur de θ cherchée, la racine correspondant à celle des deux tangentes possibles qui va de l'axe des y vers les x positifs. Après quoi, la seconde équation (b) donnera R.

37. Angle d'incidence, dit de « polarisation », pour lequel s'évanouit le rayon réfléchi : confirmation expérimentale de la perpendicularité de la vibration au rayon. — Cherchons quelle est, pour notre cristal uniaxe, la valeur de i produisant l'extinction du rayon réfléchi, ou annulant le coefficient Q d'amplitude de ses vibrations. On voit, sur l'une des deux premières formules (a), que la condition nécessaire et suffisante pour cela sera

$$\text{(c)} \qquad \frac{\omega}{R} = \frac{\cos r}{\cos i} = \frac{\cos(V+\theta)}{\cos i} = \frac{\cos V \cos\theta - \sin V \sin\theta}{\cos i}.$$

Si, en vue d'abréger les calculs, nous posons

$$(d)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\cos V}{a} = \alpha, \qquad \dfrac{\sin V}{b} = \beta, \qquad \text{ou} \qquad \cos V = a\alpha, \qquad \sin V = b\beta, \\ \text{et, aussi,} \\ \dfrac{ab}{\omega^2} = \gamma, \end{array}\right.$$

cette relation pourra s'écrire

$$\frac{\omega}{R} = \frac{ab}{\cos i}\left(\alpha\frac{\cos\theta}{b} - \beta\frac{\sin\theta}{a}\right), \quad \text{ou} \quad \frac{1}{R} = \frac{\omega\gamma}{\cos i}\left(\alpha\frac{\cos\theta}{b} - \beta\frac{\cos\theta}{a}\right);$$

et la seconde équation (b) deviendra, par l'élimination de $\frac{1}{R}$,

$$\beta\frac{\cos\theta}{b} + \alpha\frac{\sin\theta}{a} = \gamma \operatorname{tang} i\left(\alpha\frac{\cos\theta}{b} - \beta\frac{\sin\theta}{a}\right),$$

ou

$$(\alpha + \gamma\beta \operatorname{tang} i)\frac{\sin\theta}{a} = (\gamma\alpha \operatorname{tang} i - \beta)\frac{\cos\theta}{b},$$

c'est-à-dire la proportion

$$\frac{\dfrac{\cos\theta}{b}}{\alpha + \gamma\beta \operatorname{tang} i} = \frac{\dfrac{\sin\theta}{a}}{\gamma\alpha \operatorname{tang} i - \beta}.$$

On éliminera donc les inconnues $\frac{\cos\theta}{b}$ et $\frac{\sin\theta}{a}$ de l'équation *homogène* (b′), en remplaçant ces *deux* inconnues par les binomes proportionnels $\alpha + \gamma\beta \operatorname{tang} i$ et $\gamma\alpha \operatorname{tang} i - \beta$. Il viendra immédiatement

$$(\alpha^2 + \beta^2)(1 + \gamma^2 \operatorname{tang}^2 i) = \frac{\omega^2}{\sin^2 i}[\beta(\alpha + \gamma\beta \operatorname{tang} i) + \alpha(\gamma\alpha \operatorname{tang} i - \beta)]^2 = \frac{\omega^2\gamma^2}{\cos^2 i}(\alpha^2 + \beta^2)^2,$$

ou, après suppression du facteur essentiellement fini et positif $\alpha^2 + \beta^2$, puis évanouissement du dénominateur $\cos^2 i$ ou $1 - \sin^2 i$,

$$(e)\qquad \sin^2 i = \frac{1 - \omega^2\gamma^2(\alpha^2 + \beta^2)}{1 - \gamma^2} = \frac{\omega^2 - a^2\sin^2 V - b^2\cos^2 V}{\omega^2 - \dfrac{a^2b^2}{\omega^2}}.$$

Des expériences très soignées, faites par Seebeck, d'extinction (dans un liquide convenablement réfringent) de rayons sur des faces tant naturelles qu'artificielles du spath, ont prouvé l'exactitude de cette formule, due à Seebeck lui-même, tandis qu'elles ont présenté

des écarts sur i, excédant jusqu'à 6°, ou de beaucoup les erreurs admissibles d'observation, d'avec la formule, bien plus compliquée d'ailleurs, qu'on obtient pour $\sin i$ en remplaçant, dans les relations (a), R et r par ω_1 et i_1, c'est-à-dire en admettant l'exacte transversalité des vibrations du rayon extraordinaire ([1]).

38. Extension des conditions de continuité au cas de corps très opaques et équations indéfinies pour ces corps. — Voyons maintenant ce que deviennent les équations du problème, et leur solution, dans le cas plus simple où, les deux milieux restant isotropes, l'un d'eux, le second, cesse d'être transparent, pour acquérir une opacité aussi grande que l'est celle d'un métal, c'est-à-dire *capable d'éteindre ou d'absorber les ondes sur un parcours du même ordre que la longueur d'ondulation*.

La première idée qui s'offre à l'esprit, pour expliquer une extinction si rapide, est d'admettre que, malgré la brièveté de la période, entraînant la prépondérance du rôle de l'accélération dans la résistance opposée par les molécules pondérables au mouvement vibratoire, la vitesse y intervient en proportion sensible, comme dans la résistance habituelle d'un solide aux petits mouvements d'un fluide ambiant. Alors, si l'on se borne, ce que nous faisons ici, au cas de corps isotropes, où chaque petite vitesse relative V de l'éther provoquera, sur l'unité de volume apparent de la matière pondérable, une résistance qui lui soit contraire et proportionnelle, ou de la forme HV (avec H positif), les trois composantes de cette résistance supplémentaire seront $-\mathrm{H}\frac{d\xi}{dt}$, $-\mathrm{H}\frac{d\eta}{dt}$, $-\mathrm{H}\frac{d\zeta}{dt}$, puisque V résulte très sensiblement des trois vitesses vibratoires absolues $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ de l'éther suivant les axes. Et les équations du mouvement lumineux, divisées par μ, deviendront évidemment, au lieu de (20) (p. 276), en se rappelant que $\frac{\rho(1+\mathrm{A})}{\mu} = \frac{1}{a^2}$:

$$(113)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\mathrm{H}}{\mu}\frac{d\xi}{dt} &= \Delta_2\xi - \frac{d\theta}{dx}, \\ \frac{1}{a^2}\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{\mathrm{H}}{\mu}\frac{d\eta}{dt} &= \Delta_2\eta - \frac{d\theta}{dy}, \\ \frac{1}{a^2}\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{\mathrm{H}}{\mu}\frac{d\zeta}{dt} &= \Delta_2\zeta - \frac{d\theta}{dz}. \end{aligned}\right.$$

([1]) *Voir,* par exemple, BILLET, *Traité d'Optique physique*, t. II, p. 173 et 176.

Différentiées respectivement en x, y, z et ajoutées, elles donnent, dans le cas d'homogénéité où a et H sont constants,

$$(114)\qquad \frac{1}{a^2}\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{H}{\mu}\frac{d\theta}{dt}=0.$$

Multiplions celle-ci par dt, et intégrons sur place. Comme il s'agit soit de mouvements propagés d'ailleurs, c'est-à-dire tels qu'on ait eu d'abord $\theta=0$ et $\frac{d\theta}{dt}=0$ en (x, y, z), soit encore d'une suite de vibrations où s'annulent, en chaque point, les valeurs *moyennes* de θ et de $\frac{d\theta}{dt}$ durant tout intervalle de temps notable, il viendra $\frac{1}{a^2}\frac{d\theta}{dt}+\frac{H}{\mu}\theta=0$. On en déduit, si C désigne une fonction de x, y, z seulement,

$$\theta = Ce^{-\frac{Ha^2}{\mu}t}.$$

Or cette expression de θ ne s'annule, ou initialement ou en moyenne, que pour $C=0$; et l'on a $\theta=0$, comme quand il s'agissait d'un milieu isotrope et homogène transparent.

Donc si, nous rappelant que le milieu opaque est notre second milieu, nous écrivons ξ_1, η_1, ζ_1 ses déplacements et a_1 son coefficient a, les équations (113) se réduiront à

$$(115)\qquad \begin{cases} \frac{1}{a_1^2}\frac{d^2\xi_1}{dt^2}+\frac{H}{\mu}\frac{d\xi_1}{dt}=\Delta_2\xi_1, \\ \frac{1}{a_1^2}\frac{d^2\eta_1}{dt^2}+\frac{H}{\mu}\frac{d\eta_1}{dt}=\Delta_2\eta_1, \\ \frac{1}{a_1^2}\frac{d^2\zeta_1}{dt^2}+\frac{H}{\mu}\frac{d\zeta_1}{dt}=\Delta_2\zeta_1, \end{cases}$$

avec la condition

$$(116)\qquad \frac{d\xi_1}{dx}+\frac{d\eta_1}{dy}+\frac{d\zeta_1}{dz}=0.$$

On ne pourra pas, il est vrai, faire usage de ces équations dans la couche de transition séparant deux corps; car l'homogénéité n'y est pas admissible. Mais les raisonnements qui nous ont conduits aux relations définies (90) (p. 343) s'appliqueront sans modification à une telle couche, même si le milieu opaque est hétérotrope : car il n'y aura d'ajoutés, dans les premiers membres de (89) (p. 339), aux termes contenant les accélérations, finies, que des termes où figureront les vitesses, encore moins susceptibles de s'exagérer. Seule, la condition surérogatoire (92), déduite de (91) par deux intégrations sur place,

sera plus complexe; car elle aura été intégrée une fois de moins en t, et contiendra $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ là où y figurent ξ, η, ζ, avec de nouveaux termes en ξ, η, ζ, provenant des termes aux vitesses [1]. Mais, comme elle sera encore impliquée dans les quatre (90), combinées avec les équations indéfinies relatives aux deux corps *homogènes* contigus, on n'aura nullement besoin d'y recourir, pas plus qu'à la sixième, (93). Ainsi, *les quatre conditions* (90), *seules essentielles, ne subiront aucun changement.*

Cela posé, voyons ce que seront les ondes planes, ou les rayons de lumière parallèle, dans le corps opaque. Les équations (115), n'étant pas homogènes quant à l'ordre des dérivées, n'admettent pas de solution de la forme $f(t - l_1 x - my)$, avec f arbitraire; et nous nous bornerons, comme nous l'avons fait dans la question de la réflexion totale, au cas de vibrations pendulaires où le mouvement incident, dans le premier milieu, est représenté par la partie réelle d'une exponentielle de la forme $e^{k(t-lx-my)\sqrt{-1}}$. Prenons donc $f(t) = e^{kt\sqrt{-1}}$, ou $f(t - l_1 x - my) = e^{k(t-l_1 x-my)\sqrt{-1}}$, et formons, aux équations (115) du problème, une solution symbolique ou analytique dans laquelle ξ_1, η_1, ζ_1 aient comme unique facteur variable l'exponentielle

$$e^{k(t-l_1 x-my)\sqrt{-1}}.$$

Les premiers membres de (115) deviendront respectivement

$$\left(-\frac{k^2}{a_1^2} + \frac{H}{\mu} k\sqrt{-1}\right)(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$$

et les seconds membres, $-k^2(l_1^2 + m^2)(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$. Si donc on convient de poser, conformément à la dernière équation (98) (p. 352),

(117) $$l_1^2 + m^2 = \frac{1}{\omega_1^2}, \qquad \text{et aussi, pour abréger,} \qquad \frac{a_1^2 H}{\mu k} = K,$$

---

[1] Dans le cas d'isotropie et à la surface séparant un premier milieu, transparent, d'un second milieu opaque, cette équation serait

$$\frac{1}{a_1^2}\frac{d\xi_1}{dt} + \frac{H}{\mu}\xi_1 = \frac{1}{a^2}\frac{d\xi}{dt},$$

ou bien, par une nouvelle intégration en t,

$$\frac{\xi_1}{a_1^2} + \frac{H}{\mu}\int_{-\infty}^{t} \xi_1\, dt = \frac{\xi}{a^2},$$

du moins s'il s'agit de mouvements propagés d'ailleurs ou que le repos aurait précédés en (x, y, z).

les trois équations (115) reviendront à prendre

$$(118)\qquad \omega_1^2 = \frac{a_1^2}{1 - K\sqrt{-1}} = \frac{a_1^2(1 + K\sqrt{-1})}{1 + K^2}.$$

39. Formules de Cauchy pour la réflexion métallique. — A cela près que ω_1 devient imaginaire, tous les calculs du n° 32 serviront pour la solution *analytique* actuelle, puisque les équations du problème autres que (115) sont identiquement les mêmes que dans le cas de milieux transparents, y compris même (116), qui règle les rapports, réels ou imaginaires, à donner à ξ_1, η_1, ζ_1, dans (98) et (105), pour la transversalité des mouvements ou la conservation des volumes. Seulement, la valeur de l_1, qui, d'après (117), (118) et la dernière (99), est

$$(119)\qquad l_1 = \sqrt{\frac{1}{\omega_1^2} - m^2} = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{a_1^2} - \sin^2 i\right) - \frac{K\omega^2}{a_1^2}\sqrt{-1}},$$

devra être prise avec un signe tel, que le mouvement réfracté effectif se propage vers l'intérieur du milieu opaque, non vers les x négatifs où ce milieu n'existe pas. Nous savons d'ailleurs qu'alors les vibrations s'éteindront, du côté des x positifs, à une très petite distance de la surface $x = 0$ du corps opaque.

Pour abréger l'écriture, posons

$$(120)\qquad L^2 = \sqrt{\left(\frac{\omega^2}{a_1^2} - \sin^2 i\right)^2 + \frac{K^2\omega^4}{a_1^4}},$$

avec L positif, et appelons 2ν l'angle (compris entre zéro et π) défini par les deux formules

$$(121)\qquad \frac{\omega^2}{a_1^2} - \sin^2 i = L^2\cos 2\nu, \qquad \frac{K\omega^2}{a_1^2} = L^2 \sin 2\nu.$$

La formule (119) deviendra

$$(122)\qquad l_1 = \pm\frac{L}{\omega}\sqrt{\cos 2\nu - \sqrt{-1}\sin 2\nu} = \pm\frac{L}{\omega}(\cos\nu - \sqrt{-1}\sin\nu);$$

et, dans le facteur variable $e^{k(t - l_1 x - my)\sqrt{-1}}$ de ξ_1, η_1, ζ_1, la profondeur x sous la surface du corps opaque entrera par l'exponentielle

$$(123)\qquad e^{-kl_1x\sqrt{-1}} = e^{\mp\frac{kL\cos\nu}{\omega}x\sqrt{-1}}\, e^{\mp\frac{kL\sin\nu}{\omega}x}.$$

Son facteur réel $e^{\mp\frac{kL\sin\nu}{\omega}x}$ figurera nécessairement [à côté de fac-

teurs trigonométriques en $k\left(t \mp \frac{L\cos\nu}{\omega}x - my\right)\Big]$ dans tous les termes de ξ_1, η_1, ζ_1 et, par suite, en particulier, dans la partie réelle de ces fonctions, qui, seule, constituera l'expression physique des déplacements. Or on voit qu'il est évanouissant, et, en même temps, que l'*onde évanescente,* dépendant des sinus ou cosinus de

$$k\left(t \mp \frac{L\cos\nu}{\omega}x - my\right),$$

se propage bien *vers l'intérieur* du milieu opaque (du côté des positifs), *pourvu qu'on prenne la valeur* (122) *de* l_1 *avec son signe supérieur*. C'est donc celui-là qu'il faudra adopter ([1]).

Observons que les deux constantes $\frac{\omega^2}{a_1^2}$ et $\frac{K\omega^2}{a_1^2}$ s'expriment aisément, d'après (121), au moyen des valeurs L_0 et ν_0 que prennent L et ν sous l'incidence normale, c'est-à-dire quand $i = 0$. Et alors le carré N^2 de l'indice de réfraction, c'est-à-dire le rapport $\frac{\omega^2}{\omega_1^2}$, devient, vu (118) et (121),

$$N^2 = \frac{\omega^2}{a_1^2}(1 - K\sqrt{-1}) = L_0^2(\cos 2\nu_0 - \sqrt{-1}\sin 2\nu_0). \tag{124}$$

Les formules (121) et (120) donnent d'ailleurs

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{tang} 2\nu_0 = K, \qquad L_0 = \frac{\omega}{a_1}\sqrt[4]{1+K^2};\\ &\operatorname{tang} 2\nu = \frac{L_0^2 \sin 2\nu_0}{L_0^2\cos 2\nu_0 - \sin^2 i}, \qquad L^2 = L_0^2\frac{\sin 2\nu_0}{\sin 2\nu}. \end{aligned}\right. \tag{125}$$

([1]) On voit aussi que les mouvements, dans le *rayon réfracté évanescent,* se trouvent à une même phase, en tous les points dont les coordonnées x, y, z vérifient l'équation $t - \frac{L\cos\nu}{\omega}x - my = \text{const.}$, car ξ_1, η_1, ζ_1 ne dépendront d'aucune autre variable fonction de t que le premier membre de cette équation. Les ondes réfractées sont donc planes, normales à la direction dont les cosinus directeurs ont les mêmes rapports mutuels, et les mêmes signes, que

$$\left(\frac{L\cos\nu}{\omega}, m, \text{zéro}\right), \quad \text{ou que} \quad (L\cos\nu, \sin i, \text{zéro});$$

et leur vitesse de propagation, égale à l'inverse de $\sqrt{\frac{L^2\cos^2\nu}{\omega^2} + m^2}$, a la valeur $\frac{\omega}{\sqrt{L^2\cos^2\nu + \sin^2 i}}$, de l'ordre de $\frac{\omega}{L}$, ou de a_1, mais fonction de K et variable aussi avec i.

Quant au déplacement symbolique dans le rayon réfléchi, celui du rayon d'incidence étant $e^{k(t-lx-my)\sqrt{-1}}$, il sera, soit $\mathrm{P}e^{k(t+lx-my)\sqrt{-1}}$, soit $\mathrm{Q}e^{k(t+lx-my)\sqrt{-1}}$, avec les expressions (102), (106) de P et de Q (p. 353 et 354), où N^2 a maintenant la valeur complexe (124). Ces expressions deviennent, vu (94) (p. 350) et (122) :

$$(126)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{P} &= \frac{(\cos i - \mathrm{L}\cos\nu) + \sqrt{-1}\,\mathrm{L}\sin\nu}{(\cos i + \mathrm{L}\cos\nu) - \sqrt{-1}\,\mathrm{L}\sin\nu} \\ &= \frac{(\cos^2 i - \mathrm{L}^2) + \sqrt{-1}\,(2\mathrm{L}\sin\nu\cos i)}{\cos^2 i + 2\mathrm{L}\cos\nu\cos i + \mathrm{L}^2}, \\ \mathrm{Q} &= \frac{(\mathrm{L}\cos\nu - \mathrm{L}_0^2\cos 2\nu_0\cos i) - \sqrt{-1}\,(\mathrm{L}\sin\nu - \mathrm{L}_0^2\sin 2\nu_0\cos i)}{(\mathrm{L}\cos\nu + \mathrm{L}_0^2\cos 2\nu_0\cos i) - \sqrt{-1}\,(\mathrm{L}\sin\nu + \mathrm{L}_0^2\sin 2\nu_0\cos i)} \\ &= \frac{(\mathrm{L}^2 - \mathrm{L}_0^4\cos^2 i) + 2\sqrt{-1}\,\mathrm{L}\mathrm{L}_0^2\cos i\sin(2\nu_0 - \nu)}{\mathrm{L}^2 + 2\mathrm{L}\mathrm{L}_0^2\cos i\cos(2\nu_0 - \nu) + \mathrm{L}_0^4\cos^2 i}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on pose

$$(127)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{P} &= \mathrm{A}\left(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\right) = \mathrm{A}e^{\alpha\sqrt{-1}}, \\ \mathrm{Q} &= \mathrm{B}\left(\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta\right) = \mathrm{B}e^{\beta\sqrt{-1}}, \end{aligned}\right.$$

avec A et B positifs, on aura donc, pour déterminer A et α, B et β, les formules doubles

$$(128)\quad \left\{\begin{aligned} (\mathrm{A}\cos\alpha,\ \mathrm{A}\sin\alpha) &= \frac{(\cos^2 i - \mathrm{L}^2,\ 2\mathrm{L}\sin\nu\cos i)}{\cos^2 i + 2\mathrm{L}\cos\nu\cos i + \mathrm{L}^2}, \\ (\mathrm{B}\cos\beta,\ \mathrm{B}\sin\beta) &= \frac{[\mathrm{L}^2 - \mathrm{L}_0^4\cos^2 i,\ 2\mathrm{L}\mathrm{L}_0^2\cos i\sin(2\nu_0 - \nu)]}{\mathrm{L}^2 + 2\mathrm{L}\mathrm{L}_0^2\cos i\cos(2\nu_0 - \nu) + \mathrm{L}_0^4\cos^2 i}, \end{aligned}\right.$$

qui donnent notamment, par les sommes de leurs carrés deux à deux,

$$(129)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A}^2 &= \frac{(\cos^2 i + \mathrm{L}^2)^2 - 4\mathrm{L}^2\cos^2\nu\cos^2 i}{(\cos^2 i + 2\mathrm{L}\cos\nu\cos i + \mathrm{L}^2)^2} \\ &= \frac{\cos^2 i - 2\mathrm{L}\cos\nu\cos i + \mathrm{L}^2}{\cos^2 i + 2\mathrm{L}\cos\nu\cos i + \mathrm{L}^2}, \\ \mathrm{B}^2 &= \frac{(\mathrm{L}^2 + \mathrm{L}_0^4\cos^2 i)^2 - 4\mathrm{L}^2\mathrm{L}_0^4\cos^2 i\cos^2(2\nu_0 - \nu)}{[\mathrm{L}^2 + 2\mathrm{L}\mathrm{L}_0^2\cos i\cos(2\nu_0 - \nu) + \mathrm{L}_0^4\cos^2 i]^2} \\ &= \frac{\mathrm{L}^2 - 2\mathrm{L}\mathrm{L}_0^2\cos i\cos(2\nu_0 - \nu) + \mathrm{L}_0^4\cos^2 i}{\mathrm{L}^2 + 2\mathrm{L}\mathrm{L}_0^2\cos i\cos(2\nu_0 - \nu) + \mathrm{L}_0^4\cos^2 i}. \end{aligned}\right.$$

Les déplacements respectifs δ, δ' dans les vibrations incidente et réfléchie, étant les parties réelles de $e^{k(t-lx-my)\sqrt{-1}}$ et de

$$\mathrm{A}e^{[\alpha + k(t+lx-my)]\sqrt{-1}} \quad \text{ou} \quad \mathrm{B}e^{[\beta + k(t+lx-my)]\sqrt{-1}},$$

auront les valeurs

$$(130)\quad \delta = \cos k(t - lx - my), \qquad \delta' = \begin{cases} \text{soit } A\cos[\alpha + k(t + lx - my)], \\ \text{soit } B\cos[\beta + k(t + lx - my)]. \end{cases}$$

Occupons-nous du *coefficient d'amplitude* du rayon réfléchi, qui est respectivement A dans le plan perpendiculaire au plan d'incidence, et B dans le plan d'incidence.

Nous pourrons supposer la valeur (125) de L_0, du moins tant qu'il s'agira seulement de prendre une vue d'ensemble du phénomène assez grande pour que les deux dernières formules (125) donnent sensiblement $\nu = \nu_0$ et $L = L_0$. Alors, L et ν étant censés constants, les carrés (129) de A^2 et B^2 sont inférieurs à l'unité, respectivement, de

$$(131)\quad \frac{4L\cos\nu\cos i}{\cos^2 i + 2L\cos\nu\cos i + L^2}, \quad \text{et de} \quad \frac{4L\cos\nu\cos i}{1 + 2L\cos\nu\cos i + L^2\cos^2 i}.$$

La première de ces différences a plus grand dénominateur que la seconde de $(L^2 - 1)\sin^2 i$. Donc A est $> B$, sauf sous l'incidence *normale,* $i = 0$, et, aussi, sous l'incidence *rasante,* $i = \frac{\pi}{2}$, où $\cos i = 0$ et où $A = B = 1$. D'ailleurs, la dérivée en i de ces deux expressions (131) a, respectivement, les signes de $\cos^2 i - L^2$, différence négative, et de $L^2\cos^2 i - 1$, différence d'abord positive, puis négative. Donc A et B, égaux sous l'incidence normale, varient d'abord en sens inverse quand i croît, A grandissant jusqu'à la fin, mais B diminuant jusqu'à l'instant où $\cos i = \frac{1}{L}$ (*angle de polarisation maximum*) et où B atteint le minimum $\tang \frac{\nu}{2}$, pour grandir ensuite.

L'observation permet de déterminer l'incidence de polarisation maximum, c'est-à-dire la valeur I de i pour laquelle le rapport $\frac{B}{A}$ devient minimum. Or comme, à cet instant, A très voisin de 1 ne varie pas sensiblement, ce minimum n'est guère autre que celui de B. L'observation de la polarisation maximum fera donc connaître avec quelque approximation, tout à la fois, les deux constantes L et ν du problème, que donneront (sensiblement) les deux formules $L = \frac{1}{\cos I}$ et $\tang\frac{\nu}{2} =$ minimum de $\frac{B}{A}$. Après quoi les formules ci-dessus pourront être calculées pour toutes les valeurs de i.

Je ne m'arrêterai pas à l'étude des changements α, β de phase, qui,

toujours en supposant L_0 assez grand pour pouvoir faire $L = L_0$, $\nu = \nu_0$, sont, le premier, constamment voisin de π, mais, le second, égal au premier sous l'incidence normale, puis graduellement décroissant, égal à $\frac{\pi}{2}$ sous l'incidence de polarisation maximum et, finalement, nul sous l'incidence rasante.

Les formules précédentes reviennent à celles qu'a trouvées Cauchy [1] et qui ont été confirmées par l'observation. Celle-ci a donné

---

[1] Les formules de Cauchy, contenues dans une Note du 15 avril 1839 (*Sur la quantité de lumière réfléchie sous les diverses incidences par les surfaces des corps opaques et spécialement des métaux,* aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* t. VIII, p. 553), paraissent, à première vue, différer beaucoup des précédentes : elles n'en sont cependant qu'une transformation, calculable par logarithmes.

Pour les obtenir, Cauchy rend d'abord la troisième formule (125) calculable de cette manière (c'est-à-dire par logarithmes), en évaluant $\operatorname{tang}(2\nu - \nu_0)$ ou plutôt l'inverse $\cot(2\nu - \nu_0)$. La troisième formule (125) donne, en effet,

$$\operatorname{tang}(2\nu - \nu_0) = \frac{\cos\nu_0 \operatorname{tang} 2\nu - \sin\nu_0}{\cos\nu_0 + \sin\nu_0 \operatorname{tang} 2\nu} = \frac{L_0^2 \sin(2\nu_0 - \nu_0) + \sin\nu_0 \sin^2 i}{L_0^2 \cos(2\nu_0 - \nu_0) - \cos\nu_0 \sin^2 i}$$

$$= \operatorname{tang}\nu_0 \frac{1 + \dfrac{\sin^2 i}{L_0^2}}{1 - \dfrac{\sin^2 i}{L_0^2}},$$

et, par suite,

$$(\alpha) \qquad \cot(2\nu - \nu_0) = \cot\nu_0 \frac{1 - \dfrac{\sin^2 i}{L_0^2}}{1 + \dfrac{\sin^2 i}{L_0^2}} = \cot\nu_0 \cos\left(2 \operatorname{arc\,tang} \frac{\sin i}{L_0}\right).$$

Cauchy, pour des valeurs données de L_0, ν_0 et i, calcule donc l'angle ν par cette formule ; après quoi il déduit L de la quatrième relation (125), écrite

$$L^2 \sin 2\nu = \text{const.} = L_0^2 \sin 2\nu_0.$$

Il obtient ainsi

$$(\alpha') \qquad L = L_0 \sqrt{\frac{\sin 2\nu_0}{\sin 2\nu}}.$$

Enfin, prenant les expressions (129) de A^2 et de B^2 sous les formes

$$(\beta) \qquad A^2 = \frac{\dfrac{L^2 + \cos^2 i}{2L \cos i \cos\nu} - 1}{1 + \dfrac{L^2 + \cos^2 i}{2L \cos i \cos\nu}}; \qquad B^2 = \frac{\dfrac{L_0^4 \cos^2 i + L^2}{2L_0^2 L \cos i \cos(2\nu_0 - \nu)} - 1}{1 + \dfrac{L_0^4 \cos^2 i + L^2}{2L_0^2 L \cos i \cos(2\nu_0 - \nu)}},$$

et introduisant deux angles auxiliaires χ et φ définis par les formules

$$(\beta') \qquad \begin{cases} \cot\chi = \cos\nu \sin\left(2 \operatorname{arc\,tang} \dfrac{\cos i}{L}\right), \\ \cot\varphi = \cos(2\nu_0 - \nu) \sin\left(2 \operatorname{arc\,tang} \dfrac{L}{L_0^2 \cos i}\right), \end{cases}$$

pour I et, par suite, pour L, des valeurs croissantes avec la période, c'est-à-dire quand on passe du violet au rouge. C'est ce qu'on pouvait augurer de l'expression (125) de L_0 ou, sensiblement, de L, croissante avec K. Car, d'après la seconde formule (117), K est proportionnel à $\frac{H}{k}$. Or, si l'on suit l'analogie, tirée de la résistance des fluides, qui a fait introduire dans les équations (113) du mouvement un terme proportionnel à la vitesse, H serait de la forme du coefficient de V_x dans la formule (111) de la note précédente (p. 240), et $\frac{H}{k}$, variable en sens inverse de k, croîtrait bien avec la période, qui est réciproquement proportionnelle à k.

Le *pouvoir réflecteur* du métal sous l'incidence normale, valeur commune de A^2 et de B^2 pour $i = 0$, peut s'écrire, d'après (129),

$$(A_0^2 \text{ ou } B_0^2) = \frac{1 - 2\dfrac{L_0 \cos\nu_0}{1 + L_0^2}}{1 + 2\dfrac{L_0 \cos\nu_0}{1 + L_0^2}};$$

---

il observe que l'on a identiquement

$$\frac{2L\cos i \cos\nu}{L^2 + \cos^2 i} = \cos\nu \frac{2\dfrac{\cos i}{L}}{1 + \dfrac{\cos^2 i}{L^2}} = \cos\nu \sin\left(2 \operatorname{arc\,tang} \frac{\cos i}{L}\right) = \cot\chi,$$

$$\frac{2L_0^2 L \cos i \cos(2\nu_0 - \nu)}{L_0^4 \cos^2 i + L^2} = \cos(2\nu_0 - \nu) \frac{2\dfrac{L}{L_0^2 \cos i}}{1 + \dfrac{L^2}{L_0^4 \cos^2 i}}$$

$$= \cos(2\nu_0 - \nu) \sin\left(2 \operatorname{arc\,tang} \frac{L}{L_0^2 \cos i}\right) = \cot\varphi.$$

Les expressions (β) de A^2 et de B^2 deviennent donc simplement

$$(\beta') \quad A^2 = \frac{\operatorname{tang}\chi - 1}{1 + \operatorname{tang}\chi} = \operatorname{tang}\left(\chi - \frac{\pi}{4}\right), \qquad B^2 = \frac{\operatorname{tang}\varphi - 1}{1 + \operatorname{tang}\varphi} = \operatorname{tang}\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right).$$

Dans le cas particulier de l'incidence normale, i s'annulant, les formules (α) et (α') se réduisent à $\nu = \nu_0$, $L = L_0$; et χ, φ résultent des relations (β'), dont la forme est alors

$$(\gamma) \qquad \cot(\chi \text{ ou } \varphi) = \cos\nu_0 \sin(2 \operatorname{arc\,cot} L_0) = \cos\nu, \sin(2 \operatorname{arc\,tang} L_0).$$

Cauchy ne donne pas explicitement les formules (127) à (131), même avec ses notations (différentes des nôtres); mais on voit, tant par son article, cité ci-dessus, du 15 avril 1839, que par un autre du 17 juin 1839 (*Observations de M.* Cauchy *sur la lettre de M. Mac-Cullagh,* au même Tome VIII des *Comptes rendus*, p. 965), qu'il les avait obtenues.

et l'on voit, sous cette forme, qu'il se rapproche de l'unité, ou grandit, quand la fraction $\frac{L_0 \cos \nu_0}{1 + L_0^2}$ diminue. Or celle-ci varie visiblement en sens contraire de ν_0; et, L_0 étant supérieur à l'unité, elle varie aussi en sens contraire de L_0, car son inverse a sa dérivée de même signe que $1 - \frac{1}{L_0^2}$. Donc le pouvoir réflecteur croît, en somme, avec L_0 et ν_0, c'est-à-dire, d'après les formules (125) de L_0 et de $\tang 2\nu_0$, avec le paramètre K, lui-même variable, en général, comme on vient de voir, dans le même sens que la période de vibration. Ainsi, le pouvoir réflecteur des métaux doit généralement grandir du violet au rouge et à l'infra-rouge. C'est bien, en effet, ce qu'indique l'expérience.

Remarquons enfin que, pour des radiations d'une période donnée, l'absorption croît, d'après l'exponentielle réelle figurant dans (123), avec le produit $L \sin \nu$ (réduit ici à $L_0 \sin \nu_0$) et, par conséquent, avec K ou avec H. Donc le *pouvoir réflecteur est,* toutes choses égales d'ailleurs, *d'autant plus grand que le pouvoir absorbant l'est lui-même.*

40. Mêmes problèmes, dans l'hypothèse d'un éther se prêtant à des mouvements longitudinaux localisés. — On arrive sensiblement aux mêmes lois en supposant, comme l'a fait Cauchy dans plusieurs de ses Mémoires, l'éther non plus tout à fait indifférent, mais légèrement favorable, aux petites déformations normales de ses couches; en sorte que toute cause étrangère y amenant, par exemple, un léger écart de deux feuillets parallèles et voisins provoquerait, entre ceux-ci, non pas une traction qui tende à les rapprocher, mais une très faible pression propre à les éloigner encore. Ne nous préoccupons pas de l'instabilité qui peut en résulter pour le milieu à l'état naturel [1]; mais voyons seulement les conséquences en résultant pour les petites vibrations à la surface limite de deux milieux.

---

[1] Peut-être l'instabilité n'y sera-t-elle pas à craindre autant qu'il semblerait à première vue; car, outre que nos équations des mouvements vibratoires de l'éther, tombant en défaut dès que les déformations deviennent sensibles, ne nous apprennent rien pour un tel cas, l'hypothèse de très petites valeurs, même négatives, du paramètre ι défini ci-après n'introduira sans doute qu'une production de mouvements longitudinaux *fort réduite*, au point qu'il puisse toujours subsister effectivement, dans l'éther, assez d'ébranlements transversaux pour en masquer l'influence sur l'état stable ou instable du milieu vibrant et *maintenir partout positif le potentiel d'élasticité.*

Alors, si ε désigne une petite fraction constante, supposée donnée, de l'unité positive, les équations du mouvement de l'éther libre seront celles de la note de la page 51 (t. I), où l'on ferait $\iota = -\varepsilon^2$; et les équations du mouvement vibratoire pour l'éther d'un corps isotrope transparent deviendraient, par suite, au lieu de (18) (p. 276), en divisant par μ et posant $\frac{\rho(1+A)}{\mu} = \frac{1}{a^2}$,

$$\frac{1}{a^2}\frac{d^2(\xi,\eta,\zeta)}{dt^2} = \Delta_2(\xi,\eta,\zeta) - (1+\varepsilon^2)\frac{d\theta}{d(x,y,z)}. \tag{132}$$

Différentiées en x, y, z et ajoutées, elles donnent, si le corps est homogène ou que a soit constant, l'équation qui régit la dilatation cubique θ :

$$\frac{1}{a^2}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \varepsilon^2\Delta_2\theta = 0. \tag{133}$$

Or celle-ci montre l'impossibilité d'ondes planes *se propageant* et à mouvements *longitudinaux*, où θ serait proportionnel à une fonction de la forme $f'(t - lx - my - nz)$ avec l, m, n réels; car une pareille expression de θ, portée dans l'équation (133), la transformerait, après suppression du facteur f''', en cette relation évidemment impossible,

$$\frac{1}{a^2} + \varepsilon^2(l^2 + m^2 + n^2) = 0. \tag{134}$$

Mais celle-ci devient, au contraire, résoluble, si l'on prend, par exemple, l imaginaire (m, n étant donnés) et que la fonction $f(t)$ soit, comme dans de précédents exemples, l'exponentielle $e^{kt\sqrt{-1}}$ d'une solution symbolique représentant par sa partie réelle des déplacements effectifs. En effet, alors lx sera de la forme $\pm\lambda x\sqrt{-1}$, avec λ très grand, comme l'inverse de ε; et la dilatation cubique θ, dépendant de x par le facteur à variation rapide $e^{-klx\sqrt{-1}} = e^{\pm k\lambda x}$, s'évanouira à une très petite distance $\mp x$ du plan des yz, si le milieu considéré a ce plan pour limite et se trouve situé du côté soit des x négatifs, soit des x positifs. Ainsi, un pareil éther admettra des ondes *condensées* ou *dilatées* évanescentes.

Il est aisé de voir que, dans ces ondes, les déplacements symboliques ξ, η, ζ seront entre eux comme l, m, n. Car, si l'on pose $\xi = Af$, $\eta = Bf$, $\zeta = Cf$, où f désigne la fonction $e^{k(t-lx-my-nz)\sqrt{-1}}$, les équa-

tions (132) du mouvement deviennent

$$(135)\quad \begin{cases} \left(l^2+m^2+n^2-\frac{1}{a^2}\right)\mathrm{A}=(1+\varepsilon^2)(\mathrm{A}l+\mathrm{B}m+\mathrm{C}n)l, \\ \left(l^2+m^2+n^2-\frac{1}{a^2}\right)\mathrm{B}=(1+\varepsilon^2)(\mathrm{A}l+\mathrm{B}m+\mathrm{C}n)m, \\ \left(l^2+m^2+n^2-\frac{1}{a^2}\right)\mathrm{C}=(1+\varepsilon^2)(\mathrm{A}l+\mathrm{B}m+\mathrm{C}n)n. \end{cases}$$

Or, ces trois équations homogènes en A, B, C, multipliées respectivement par l, m, n et ajoutées, donnent la condition de compatibilité entre elles :

$$(136)\quad \left[\frac{1}{a^2}+\varepsilon^2(l^2+m^2+n^2)\right](\mathrm{A}l+\mathrm{B}m+\mathrm{C}n)=0.$$

Et celle-ci oblige soit d'annuler $\mathrm{A}l+\mathrm{B}m+\mathrm{C}n$, ou θ, et, par suite, de prendre $l^2+m^2+n^2=\frac{1}{a^2}$, c'est-à-dire de supposer les ondes transversales, avec les lois que nous leur connaissons, soit de poser entre l, m, n l'équation (134); et, alors, les trois formules (135) expriment, comme nous voulions le démontrer, la double proportion de A, B, C à l, m, n.

41. Ondes évanescentes, l'une réfléchie, l'autre réfractée, qui deviennent possibles, avec condensations et dilatations cubiques. — Donc, dans le cas de l'onde incidente exprimée symboliquement par une exponentielle de la forme $e^{k(t-lx-my-nz)\sqrt{-1}}$ et arrivant, de la région des x négatifs, contre la surface commune $x=0$ de deux milieux séparés par le plan des yz, la perturbation due à cette surface pourra maintenant, grâce au petit coefficient positif ε^2, donner naissance à une onde condensée ou dilatée *évanescente* dans chacun des deux milieux, l'une, *réfléchie*, l'autre, *réfractée*. Si l'onde incidente a sa normale dans le plan des xy, on aura évidemment, d'après les raisonnements qui ont conduit aux formules (99) et (101) (p. 352), $n=0$ et $m=\frac{\sin i}{\omega}$, dans ces deux ondes, comme dans l'onde ou réfléchie, ou réfractée, ordinaire; et, cela, quelles que soient les *relations définies* homogènes à poser en ξ, η, ζ ou leurs dérivées premières, des deux côtés de la surface.

La formule (134), où $a=$ soit ω, scit ω_1, donnera comme expression de l, vu le signe à prendre pour que le facteur réel $e^{-klx\sqrt{-1}}$ des déplacements symboliques s'annule aux distances sensibles de la sur-

face : 1°, dans le premier milieu,

$$(137)\qquad \mathrm{I}\sqrt{-1},\qquad \text{où}\qquad \mathrm{I}=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2\omega^2}+m^2}=\frac{1}{\varepsilon\omega}\sqrt{1+\varepsilon^2\sin^2 i};$$

2°, dans le second milieu,

$$(138)\qquad -\mathrm{I}_1\sqrt{-1},\qquad \text{où}\qquad \mathrm{I}_1=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2\omega_1^2}+m^2}=\frac{1}{\varepsilon\omega}\sqrt{\mathrm{N}^2+\varepsilon^2\sin^2 i}.$$

Par suite, en appelant R, R_1 deux coefficients d'amplitude réels ou imaginaires, pour ces deux ondes réfléchie et réfractée évanescentes, les expressions symboliques des déplacements ξ, η, ζ, entre elles comme

$$(\mathrm{I}\ \text{ou}\ -\mathrm{I}_1)\sqrt{-1},\quad m,\quad \text{zéro},\quad \text{ou comme } 1,\quad \left(-\frac{m}{\mathrm{I}}\ \text{ou}\ \frac{m}{\mathrm{I}_1}\right)\sqrt{-1},\quad \text{zéro},$$

seront respectivement :

$$(139)\quad \xi'=\mathrm{R}e^{k(t-my)\sqrt{-1}}e^{k\mathrm{I}x},\qquad \eta'=-\frac{m}{\mathrm{I}}\sqrt{-1}\,\mathrm{R}e^{k(t-my)\sqrt{-1}}e^{k\mathrm{I}x},\quad \zeta'=0,$$

dans l'onde réfléchie ; et

$$(140)\quad \xi_1=\mathrm{R}_1e^{k(t-my)\sqrt{-1}}e^{-k\mathrm{I}_1x},\quad \eta_1=\frac{m}{\mathrm{I}_1}\sqrt{-1}\,\mathrm{R}_1e^{k(t-my)\sqrt{-1}}e^{-k\mathrm{I}_1x},\quad \zeta_1=0,$$

dans l'onde réfractée. Or, I et I_1 ayant les valeurs (137), (138), les deux quotients $\frac{m}{\mathrm{I}}$ et $\frac{m}{\mathrm{I}_1}$ sont respectivement

$$\frac{m}{\mathrm{I}}=\frac{\varepsilon\sin i}{\sqrt{1+\varepsilon^2\sin^2 i}},\qquad \frac{m}{\mathrm{I}_1}=\frac{\varepsilon\sin i}{\sqrt{\mathrm{N}^2+\varepsilon^2\sin^2 i}},$$

et, par conséquent, très petits, de l'ordre de $\varepsilon\sin i$. Les expressions (139), (140) reviennent donc sensiblement à

$$(139\ bis)\qquad \xi'=\mathrm{R}e^{k(t-my)\sqrt{-1}}e^{k\mathrm{I}x},\qquad \eta'=0,\qquad \zeta'=0,$$

et à

$$(140\ bis)\qquad \xi_1=\mathrm{R}_1e^{k(t-my)\sqrt{-1}}e^{-k\mathrm{I}_1x},\qquad \eta_1=0,\qquad \zeta_1=0.$$

Autrement dit, *les mouvements se font*, à très peu près, *normalement à la surface séparative $x=0$ des deux milieux, dans les deux ondes évanescentes accompagnées de condensations et de dilatations cubiques.*

On voit que ces termes (139), (140), ou (139 *bis*), (140 *bis*) ne changeront rien aux expressions symboliques de ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1,

dans le cas de vibrations normales au plan d'incidence, ou réduites aux composantes ζ, ζ_1; mais que, dans le cas de vibrations parallèles au plan d'incidence, leur superposition aux expressions (104) et (105) (p. 353) introduira deux paramètres de plus, R, R_1, disponibles pour vérifier deux conditions de plus aux limites, savoir, six en tout, au lieu des quatre (90) (p. 343). Et, en effet, c'est l'hypothèse $\varepsilon = 0$, écartée maintenant, qui, seule, avait entraîné entre ξ, η, ζ la relation linéaire (8) (p. 272) et réduit à deux seulement le nombre des fonctions ξ, η, ζ bien distinctes, puis, par suite, à quatre le nombre des conditions *essentielles,* spéciales à la surface limite.

42. Relations définies très simples qui conviennent alors. — Les considérations exposées au n° 30 (p.338) et qui, dans le cas d'un éther indifférent aux vibrations longitudinales, nous avaient fait rejeter les conditions définies ordinaires, relatives à la surface séparative de deux corps élastiques, montrent d'ailleurs que, maintenant, ces conditions ordinaires s'appliqueront. Trois d'entre elles, notamment, consisteront dans l'équilibre des pressions exercées, suivant chaque axe, sur les deux faces de la couche de transition. Cela entraînera l'égalité, de part et d'autre, des trois expressions [1]

$$(141)\quad -\varepsilon^2\mu\frac{d\xi}{dx}-(2+\varepsilon^2)\mu\left(\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right),\quad \mu\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right),\quad \mu\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right).$$

Les trois autres conditions se formeront immédiatement, en observant que l'éther est un milieu unique, où ξ, η, ζ ne doivent pas varier brusquement d'un point à l'autre, même dans l'hypothèse, que l'on peut faire maintenant, d'une épaisseur infiniment petite de la couche de transition, ou de l'absence totale d'une pareille couche de matière pondérable entre deux corps. Donc, ξ, η, ζ seront les mêmes des deux côtés de la surface séparative $x = 0$ supposée; et, par suite, dans les expressions (141), les dérivées de ξ, η, ζ en y et z auront, séparément, les mêmes valeurs. Or, en supprimant, de part et d'autre, les termes ainsi communs, il n'y subsiste plus que les dérivées de ξ, η, ζ en x. Donc, les six conditions à poser seront, en définitive,

$$(142)\quad \xi=\xi_1,\quad \eta=\eta_1,\quad \zeta=\zeta_1,\quad \frac{d\xi}{dx}=\frac{d\xi_1}{dx},\quad \frac{d\eta}{dx}=\frac{d\eta_1}{dx},\quad \frac{d\zeta}{dx}=\frac{d\zeta_1}{dx}.$$

---

[1] En effet, les trois composantes, suivant les x, y, z, de la pression exercée sur un élément plan matériel d'éther, normal aux x, auront les expressions respectives

$$N_x=-\mu\varepsilon^2\frac{d\xi}{dx}-\mu(2+\varepsilon^2)\left(\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right),\quad T_z=\mu\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right),\quad T_y=\mu\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right).$$

Ce sont précisément les *conditions de continuité* auxquelles Cauchy avait fini par s'arrêter, probablement comme étant les plus simples, mais sans avoir pu, comme nous, les ramener aux relations définies ordinaires de la Mécanique physique ([1]). Elles expriment, on le voit, qu'*il y a un contact du premier ordre entre les déplacements* ξ, η, ζ, *considérés de part et d'autre de la surface.*

Dans le cas de vibrations normales au plan d'incidence, où ξ, η, ξ_1, η_1 s'annulent, ces relations se réduisent à $\zeta = \zeta_1$, $\frac{d\zeta}{dx} = \frac{d\zeta_1}{dx}$, comme les précédentes (90); et il n'y a rien à changer à la solution donnée plus haut. Mais, dans le cas de vibrations parallèles au plan d'incidence, où $\zeta = 0$, $\zeta_1 = 0$, et où les conditions (90) étaient

$$(143) \qquad \eta = \eta_1, \qquad \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx} = \frac{d\xi_1}{dy} - \frac{d\eta_1}{dx},$$

on voit que les nouvelles relations (142), tout en obligeant à vérifier celles-là (143), donnent, de plus,

$$(144) \qquad \xi = \xi_1, \qquad \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\xi_1}{dx}.$$

C'est l'adjonction de ces dernières, ou du moins de la première d'entre elles, que rend possible l'adjonction même des termes (139), (140), ou (139 *bis*) et (140 *bis*), dans ξ, η, ξ_1, η_1.

43. Leur vérification. — Observons que les termes (139), (140) correspondent à des rotations moyennes nulles, par le fait même qu'ils représentent des mouvements longitudinaux, où ξ, η, ζ, proportionnels aux coefficients de x, y, z dans l'exponentielle de la solution symbolique, sont les dérivées en x, y, z d'une même fonction. En effet, annuler les rotations moyennes, c'est justement exprimer l'intégrabilité de la somme $\xi\,dx + \eta\,dy + \zeta\,dz$. Donc, quels que soient R et R_1, les termes (139) et (140) ne donnent rien dans la seconde relation (143). Or, on voit, sur la forme approchée (139 *bis*) et (140 *bis*) des mêmes termes, qu'ils ne donnent non plus rien, *qui soit, en général, perceptible,* dans la première relation (143). Ainsi, les formules (104) et (105) (p. 353) de ξ, η, ξ_1 et η_1 devront très sensiblement, telles qu'elles sont, ou sans les termes (139) et (140), satisfaire aux conditions de raccordement (143), c'est-à-dire (90).

([1]) Car il attribuait à l'éther des coefficients d'élasticité différents dans les divers milieux.

Donc, à cette première approximation que nous avons actuellement en vue, la réflexion et la réfraction obéissent, même lorsqu'on adopte les nouvelles conditions (142), aux lois de Fresnel et à leurs conséquences établies dans les numéros précédents, *quant aux phénomènes existant aux distances sensibles de la surface de séparation des deux milieux*. C'est seulement tout près de la surface, aux distances $\pm x$ inobservables de l'ordre de $\frac{1}{kI}$ ou de $\frac{\varepsilon\omega}{k}$, et très inférieures à une longueur d'onde $\frac{2\pi\omega}{k}$, que seraient comparables aux autres les vibrations exprimées par les termes complémentaires (139 *bis*) et (140 *bis*).

Comme les valeurs (104) et (105) de ξ, η, ξ_1, η_1 vérifient d'elles-mêmes la relation surabondante (93), identique à la seconde (144), les termes complémentaires (139 *bis*) et (140 *bis*) devront aussi, à eux seuls, y satisfaire. Cela donne évidemment $RI = -R_1 I_1$, ou, très sensiblement, vu (137) et (138), $R = -NR_1$. Enfin, la dernière condition, $\xi = \xi_1$ (pour $x = 0$), devient, en supprimant partout le facteur commun $f(t - my)$, c'est-à-dire $e^{k(t-my)\sqrt{-1}}$,

$$-m\omega(1 - Q) + R = -m\omega_1 Q_1 + R_1.$$

On en tire, après substitution, d'une part, à $m\omega$, de $\sin i$ et, à $m\omega_1$, de $\frac{\sin i}{N}$, d'autre part, de $-NR_1$ à R :

$$(145) \quad R_1 = -\frac{\sin i}{N+1}\left(1 - Q - \frac{Q_1}{N}\right); \quad \text{d'où} \quad R = \frac{N \sin i}{N+1}\left(1 - Q - \frac{Q_1}{N}\right).$$

Il ne reste plus qu'à remplacer Q, Q_1 par leurs valeurs (106) (p. 354). Si, par exemple, l, N sont réels, ou qu'il ne s'agisse ni de réflexion totale, ni de réflexion sur un corps opaque, R, R_1 seront réels aussi; et, l'onde incidente ayant son déplacement δ exprimé par la partie réelle de $e^{k(t-lx-my)\sqrt{-1}}$, c'est-à-dire par $\cos k\left(t - \frac{x\cos i + y\sin i}{\omega}\right)$, les deux ondes évanescentes réfléchie et réfractée auront les leurs exprimés de même par les parties réelles de (139 *bis*) et (140 *bis*), c'est-à-dire $\left(\text{vu que I, } I_1 \text{ seront sensiblement } \frac{1}{\varepsilon\omega} \text{ et } \frac{N}{\varepsilon\omega}\right)$ par les deux formules

$$(146) \quad \xi' = Re^{\frac{kx}{\varepsilon\omega}} \cos k\left(t - \frac{y \sin i}{\omega}\right), \quad \xi_1 = R_1 e^{-\frac{Nkx}{\varepsilon\omega}} \cos k\left(t - \frac{y\sin i}{\omega}\right).$$

Telle est, à peu près, l'explication de la réflexion et de la réfraction

à laquelle paraît s'être arrêté finalement Cauchy. On peut ainsi, par l'introduction des deux ondes condensées ou dilatées évanescentes, vérifier les six conditions de continuité (142), et se dispenser d'attribuer à la couche de transition une épaisseur tout à la fois très supérieure aux distances intermoléculaires des corps pondérables et très inférieure à une longueur d'onde lumineuse. Ces deux hypothèses, que nous avons dû associer pour arriver aux conditions (90), ne sont assurément pas contradictoires. Mais, à cause des phénomènes de dispersion, dans lesquels la longueur d'onde lumineuse n'apparaît pas comme excessivement grande par rapport aux distances intermoléculaires des corps, il y aurait peut-être quelque difficulté à les faire simultanément, à moins d'admettre que les conditions (90) sont seulement approchées, comme les formules mêmes de Fresnel en résultant. Et alors il faudrait, à une approximation plus grande, supposer sensible l'épaisseur des couches de transition.

44. Particularités que présente la réflexion sur les corps transparents, au voisinage de l'angle de polarisation : défauts de leur explication par l'hypothèse des vibrations longitudinales localisées. — C'est précisément ce que M. Potier a montré, dès 1872, qu'il convenait de faire, pour expliquer les particularités, échappant aux formules de Fresnel, de la réflexion *vitreuse* d'un pinceau à vibrations parallèles au plan d'incidence, sous les angles i voisins de celui *de polarisation* pour lequel ces formules indiquent une extinction complète. En réalité, l'extinction, comme on le sait depuis de délicates expériences de Jamin, n'y est pas totale (¹) : preuve que, dans les équations du mouvement, de petits termes, masqués sous les autres incidences par les termes principaux, deviennent sensibles grâce à l'annulation exceptionnelle de ceux-ci.

Pour contrôler la théorie de Cauchy, demandons d'abord ces termes de seconde approximation à la légère influence que les valeurs ci-dessus de R et R_1 ont sur Q et Q_1, par leur présence dans la première relation (143). En tenant compte, effectivement, des petites composantes (139) et (140) que donneraient, suivant les y, les déplacements longitudinaux évanescents, cette première relation (143)

(¹) Tout en paraissant bien, néanmoins, beaucoup plus près de l'être que ne l'indiquaient les expériences de Jamin, où les anomalies aux lois de Fresnel se trouvaient, sans doute, fort accrues par l'état d'impureté des surfaces; car des couches presque imperceptibles de matière étrangère ont ici une influence notable.



devient, vu, finalement, les valeurs approchées (145) de R_1, R, et celles, $\frac{1}{\varepsilon\omega}$, $\frac{N}{\varepsilon\omega}$, de I et de I_1 :

$$(147)\quad \left\{ \begin{aligned} (1+Q)\cos i - Q_1\cos r &= m\left(\frac{R}{I}+\frac{R_1}{I_1}\right)\sqrt{-1} \\ &= \sqrt{-1}\,\varepsilon\frac{N-1}{N}\left(1-Q-\frac{Q_1}{N}\right)\sin^2 i. \end{aligned} \right.$$

La seconde relation (143) continuant à exprimer la proportionnalité de $1-Q$ et Q_1 à ω et ω_1, ou l'égalité de $1-Q$ à NQ_1, nous aurons donc

$$(1+Q)\cos i = Q_1\left[\cos r + \sqrt{-1}\,\varepsilon\frac{(N-1)^2(N+1)}{N^2}\sin^2 i\right].$$

Pour éliminer Q_1, multiplions cette équation par N et remplaçons, dans le résultat, NQ_1 par $1-Q$; puis effectuons les calculs du second membre, en observant que la petitesse de Q, dans les circonstances dont il s'agit, rend négligeable le produit εQ. La résolution par rapport à Q donne ensuite

$$Q = \frac{\cos r - N\cos i}{\cos r + N\cos i} + \sqrt{-1}\,\varepsilon\,\frac{(N-1)^2(N+1)}{N^2}\,\frac{\sin^2 i}{\cos r + N\cos i},$$

ou, sensiblement, vu que, dans le phénomène étudié, $\cos r$ diffère peu de $N\cos i$, et que, par suite, $\sin i$ (ou $N\sin r$) et $\cos i$ sont voisins de $\frac{(N, 1)}{\sqrt{N^2+1}}$:

$$(148)\qquad Q = \frac{\sqrt{N^2+1}}{2N}(\cos r - N\cos i) + \sqrt{-1}\,\varepsilon\frac{(N-1)^2(N+1)}{2N\sqrt{N^2+1}}.$$

Si donc on pose, pour abréger, pareillement à ce qu'on a fait dans la théorie de la réflexion totale (p. 357),

$$(149)\qquad \frac{\sqrt{N^2+1}}{2N}(\cos r - N\cos i) = B\cos\beta, \quad \varepsilon\frac{(N-1)^2(N+1)}{2N\sqrt{N^2+1}} = B\sin\beta,$$

ou que β désigne l'angle aigu, compris de zéro à π ou à sinus positif, défini par la tangente

$$\tan g\beta = \frac{\varepsilon(N-1)^2(N+1)}{(N^2+1)(\cos r - N\cos i)},$$

et B un *module* de l'ordre de *petitesse* de $\sqrt{\varepsilon^2+(\cos r - N\cos i)^2}$, les

deux déplacements vibratoires symboliques, *incident* et *réfléchi*, seront

$$\delta = e^{k(t-lx-my)\sqrt{-1}}, \qquad \delta' = B e^{[\beta+k(t+lx-my)]\sqrt{-1}},$$

donnant comme déplacements *effectifs* correspondants,

$$\delta = \cos k(t - lx - my), \qquad \delta' = B\cos[\beta + k(t + lx - my)].$$

Ainsi, d'une part, β exprimera l'avance de phase prise, à la surface réfléchissante, par la vibration réfléchie sur la vibration incidente, avance variable de π, aux environs de l'incidence de polarisation, qui annule $\cos r - N\cos i$ et pour laquelle β vaudra $\frac{\pi}{2}$. Quant à B, ce sera le petit coefficient d'amplitude vibratoire, minimum sous cette incidence (sans s'annuler), du rayon réfléchi.

Telle est l'explication résultant, pour les phénomènes en vue, de la théorie de Cauchy. Il lui a manqué, pour être acceptée par les physiciens, de rendre compte de deux circonstances. En premier lieu, elle ne fait varier le minimum d'amplitude du rayon réfléchi, avec la période de vibration, que dans la faible mesure où en dépend [1] l'indice N, tandis que l'expérience semble indiquer un rapide accroissement de ce minimum quand la période diminue. En deuxième lieu, pour une période vibratoire donnée, mais sur des surfaces séparatives différentes, elle attribue à ce minimum l'expression $\varepsilon\frac{(N-1)^2(N+1)}{2N\sqrt{N^2+1}}$. Or, l'observation, autant qu'on peut en juger, n'a pas confirmé celle-ci, non plus que l'expression un peu moins précise à laquelle conduisent les mêmes calculs, quand on attribue aux éthers des divers corps des coefficients ε différents ou qu'on fait du rapport $\frac{I_1}{I} = \frac{\varepsilon\omega}{\varepsilon\omega_1}$ un *indice* N' distinct de N; ce qui donne, pour $B\sin\beta$, $\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{N'}\right)\frac{(N^2-1)}{2\sqrt{N^2+1}}$ [2].

---

[1] A raison de la *dispersion* dont il sera question plus loin.

[2] Si l'on appelle Ω le produit $\varepsilon\omega$ dans le premier milieu et Ω_1 le produit analogue dans le second milieu, le coefficient $\varepsilon - \frac{\varepsilon}{N'}$ figurant dans cette formule de $B\sin\beta$ deviendra $\frac{\Omega - \Omega_1}{\omega}$, et l'expression de $B\sin\beta$ sera $(\Omega - \Omega_1)\frac{N^2-1}{2\omega\sqrt{N^2+1}}$. Le coefficient de $\frac{N^2-1}{2\omega\sqrt{N^2+1}}$ y est $\Omega - \Omega_1$. Soient alors, par exemple, Ω_a, Ω_e, Ω_v



45. Leur explication effective, par le fait d'une certaine épaisseur de la couche de transition. — Il convient donc plutôt d'annuler l'ε de Cauchy, mais d'observer que, les conditions (90) et (92) (p. 343 et 344) étant seulement approchées, les valeurs de $\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}$, de η et de $\frac{\xi}{a^2}$ varient *un peu* quand on passe, de la surface $x = 0$ du premier milieu, aux divers feuillets $x = \text{const.}$ de la couche de transition (dont nous appellerons maintenant ε l'épaisseur totale), pour atteindre ainsi la surface $x = \varepsilon$ du second milieu. Nous représenterons, dans celui-ci, par x_1 les abscisses comptées à partir de sa surface $x = \varepsilon$, c'est-à-dire les excédents positifs $x - \varepsilon$. Alors la seconde équation du mouvement, celle à laquelle nous avons demandé les *deux* relations définies *ici indispensables,* sera, d'après (89) (p. 339), avec un dénominateur a^2 fonction rapidement variable de x entre les limites $x = 0$ et $x = \varepsilon$,

$$\frac{1}{a^2}\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right).$$

Multipliée par dx et intégrée, le long d'une parallèle aux x, depuis $x = 0$ jusqu'à un feuillet quelconque de la couche de transition, cette équation donne très sensiblement, vu la graduelle variabilité de η avec x, et si l'on affecte de l'indice zéro toute quantité prise à la limite du premier milieu :

$$(150) \qquad \frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} = \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right)_0 + \frac{d^2\eta_0}{dt^2}\int_0^x \frac{dx}{a^2}.$$

Appelons ε' l'intégrale $\int_0^\varepsilon \frac{dx}{a^2}$, produit de ε par la *valeur moyenne* de $\frac{1}{a^2}$ dans la couche de transition; et affectons de l'indice 1 les quantités prises pour $x = \varepsilon$, ou pour $x_1 = 0$, c'est-à-dire à l'entrée du second milieu. L'équation (150) deviendra, en y faisant $x = \varepsilon$, notre première *relation définie :*

$$(151) \qquad \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right)_1 = \left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy} + \varepsilon'\frac{d^2\eta}{dt^2}\right)_0.$$

---

les trois valeurs de Ω pour l'air, l'eau et le verre : ce coefficient sera respectivement $\Omega_a - \Omega_e$, $\Omega_e - \Omega_v$, $\Omega_a - \Omega_v$ dans les trois réflexions aux surfaces air-eau, eau-verre, air-verre; et sa troisième valeur devra être la somme des deux premières. Or c'est précisément ce que l'expérience ne paraît pas avoir confirmé.

Actuellement, isolons, dans (150), le terme $\frac{d\eta}{dx}$, et, multipliant par dx, intégrons de même entre les limites $x = 0$, $x = \varepsilon$, sans tenir compte du dernier terme, qui donnerait visiblement une intégrale de l'ordre de ε^2, mais en observant que ξ, écrit $\left(\frac{\xi}{a^2}\right) a^2$, a son premier facteur presque indépendant de x, en vertu de (92) (p. 344). Si nous appelons ε'' l'intégrale $\int_0^\varepsilon a^2\, dx$, produit de ε par la valeur moyenne de a^2 dans la couche de transition, nous aurons notre seconde *relation définie* :

$$(152) \qquad \eta_1 = \left[\eta + \frac{\varepsilon''}{a^2}\frac{d\xi}{dy} + \varepsilon\left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right)\right]_0.$$

Il reste à porter, d'une part, dans les seconds membres de (151) et (152), où a sera ω, les expressions symboliques, spécifiées finalement pour $x = 0$,

$$\xi = m\omega\left(-e^{k(t-lx-my)\sqrt{-1}} + Q e^{k(t+lx-my)\sqrt{-1}}\right),$$
$$\eta = l\omega\ \left(+e^{k(t-lx-my)\sqrt{-1}} + Q e^{k(t+lx-my)\sqrt{-1}}\right),$$

qui comprennent les deux rayons incident et réfléchi, mais sans oublier que le coefficient Q propre au rayon réfléchi est, ici, assez petit pour rendre négligeables les produits $\varepsilon' Q$, $\varepsilon'' Q$, εQ; d'autre part, dans les premiers membres, les expressions, symboliques aussi, et finalement spécifiées pour $x_1 = 0$,

$$\xi = -m\omega_1 Q_1 e^{k(t-l_1x_1-my)\sqrt{-1}}, \qquad \eta = l_1\omega_1 Q_1 e^{k(t-l_1x_1-my)\sqrt{-1}},$$

qui définissent le rayon réfracté. On aura, après division de la première équation par $-k\sqrt{-1}\, e^{k(t-my)\sqrt{-1}}$, de la deuxième par $e^{k(t-my)\sqrt{-1}}$, et après avoir remplacé $l^2 + m^2$, $l_1^2 + m^2$ par les inverses de ω^2 et de ω_1^2 :

$$\frac{Q_1}{\omega_1} = \frac{1-Q}{\omega} - \varepsilon' k l \omega\sqrt{-1}, \qquad l_1\omega_1 Q_1 = l\omega(1+Q) - (\varepsilon - \varepsilon'' m^2)\frac{k}{\omega}\sqrt{-1}.$$

Multiplions la première par $l_1\omega_1^2$ et puis retranchons-la de la seconde, pour éliminer Q_1. Si nous observons finalement que $l\omega = \cos i$,

$l_1\omega_1 = \cos r$, $\frac{\omega}{\omega_1} = \mathrm{N}$, $m = \frac{\sin i}{\omega}$, l'équation en Q obtenue donnera

$$(153)\quad \mathrm{Q} = \frac{\cos r - \mathrm{N}\cos i}{\cos r + \mathrm{N}\cos i} + \sqrt{-1}\,\frac{k\mathrm{N}}{\omega}\,\frac{\varepsilon - \varepsilon'\omega\omega_1\cos i\cos r - \frac{\varepsilon''}{\omega\omega_1}\frac{\sin^2 i}{\mathrm{N}}}{\cos r + \mathrm{N}\cos i}.$$

Cette expression n'étant évaluée, du moins avec sa petite partie en ε, ε', ε'', que pour les valeurs de i voisines de celle qui donne $\cos r = \mathrm{N}\cos i$ et $\sin i$, $\cos i$ respectivement égaux à $\frac{(\mathrm{N}, 1)}{\sqrt{\mathrm{N}^2+1}}$, on peut la remplacer par

$$(154)\quad \mathrm{Q} = \frac{\sqrt{\mathrm{N}^2+1}}{2\mathrm{N}}\left\{(\cos r - \mathrm{N}\cos i) + \sqrt{-1}\,\frac{k\mathrm{N}}{\omega}\left[\varepsilon - \left(\varepsilon'\omega\omega_1 + \frac{\varepsilon''}{\omega\omega_1}\right)\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}^2+1}\right]\right\}.$$

Si donc on a, pour la vibration incidente, $\delta = \cos k(t - lx - my)$, la vibration réfléchie sera

$$\delta' = \mathrm{B}\cos[\beta + k(t + lx - my)],$$

à la condition de poser la double égalité

$$(155)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{B}(\cos\beta, \sin\beta) = \frac{\sqrt{\mathrm{N}^2+1}}{2\mathrm{N}}\left\{(\cos r - \mathrm{N}\cos i),\right.\\ &\qquad\qquad \left.\frac{k\mathrm{N}}{\omega}\left[\varepsilon - \left(\varepsilon'\omega\omega_1 + \frac{\varepsilon''}{\omega\omega_1}\right)\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}^2+1}\right]\right\}.\end{aligned}\right.$$

On voit qu'ici l'amplitude B de la vibration réfléchie aura, conformément à l'expérience, son minimum rapidement variable en sens inverse de la longueur d'onde (à cause du facteur k réciproquement proportionnel à la période), et, de plus, fonction, à l'indice N près, des trois coefficients ε, $\varepsilon'\omega\omega_1$, $\frac{\varepsilon''}{\omega\omega_1}$, propres à la couche de transition, et non d'un simple coefficient spécifique de l'éther (appelé ε au numéro précédent), comme dans la théorie de Cauchy.

Vu la valeur $\frac{\omega}{\omega_1}$ de N, la nature de la couche de transition est représentée en définitive, dans le phénomène étudié, par l'expression

$$\varepsilon - \left(\varepsilon'\omega\omega_1 + \frac{\varepsilon''}{\omega\omega_1}\right)\frac{\omega\omega_1}{\omega^2 + \omega_1^2} = \varepsilon - \varepsilon'\frac{a_0^2 a_1^2}{a_0^2 + a_1^2} - \frac{\varepsilon''}{a_0^2 + a_1^2},$$

équivalente, en raison des significations de ε, ε', ε'', à l'intégrale dé-

finie

$$\int_0^\varepsilon \frac{(a^2-a_0^2)(a_1^2-a^2)}{(a_0^2+a_1^2)a^2}\,dx\ (^1).$$

---

(1) Le produit $B\sin\beta$ étant ainsi

$$\frac{k\sqrt{N^2+1}}{2\omega}\int_0^\varepsilon \frac{(a_0^2-a^2)(a^2-a_1^2)}{(a_0^2+a_1^2)a^2}\,dx,$$

si on le compare à l'expression de la note précédente (p. 389),

$$\frac{\Omega-\Omega_1}{2\omega}\frac{N^2-1}{\sqrt{N^2+1}},$$

plus familière aux physiciens, que donne pour le même produit la théorie de Cauchy, il vient comme relation entre les coefficients des deux théories, pour passer de l'une à l'autre,

$$\Omega-\Omega_1=k\frac{N^2+1}{N^2-1}\int_0^\varepsilon \frac{(a_0^2-a^2)(a^2-a_1^2)}{(a_0^2+a_1^2)a^2}\,dx,$$

c'est-à-dire, en remplaçant N par $\frac{\omega}{\omega_1}$, qui n'est autre que $\frac{a_0}{a_1}$,

$$\Omega-\Omega_1=k\int_0^\varepsilon \frac{(a_0^2-a^2)(a^2-a_1^2)}{(a_0^2-a_1^2)a^2}\,dx.$$

On se souviendra que k y exprime le quotient de 2π par la durée de la vibration.

Admettons, à titre d'hypothèse approximative la plus simple, une variation *linéaire* de a^2 dans l'épaisseur ε de la couche de transition; et faisons alors

$$x=\varepsilon u,\qquad a^2=a_0^2-(a_0^2-a_1^2)u=a_1^2[N^2-(N^2-1)u].$$

Nous aurons, si C désigne provisoirement le rapport $\frac{N^2}{N^2-1}$,

$$\Omega-\Omega_1=\varepsilon k\int_0^1\frac{u-u^2}{C-u}\,du=\varepsilon k\left[\frac{u^2}{2}+(C-1)u+C(C-1)\log(C-u)\right]_{u=0}^{u=1}$$
$$=\frac{\varepsilon k}{N^2-1}\left[\frac{N^2+1}{2}-\frac{2N^2}{N^2-1}\log N\right].$$

On arrive exactement à la même formule de $\Omega-\Omega_1$, en supposant fonction linéaire de u non pas le carré a^2, mais son inverse; ce qui, comme il vient alors

$$\frac{a_0^2}{a^2}=1+(N^2-1)u\qquad\text{et}\qquad\frac{a_1^2}{a^2}=\frac{1}{N^2}+\left(1-\frac{1}{N^2}\right)u,$$

donne presque immédiatement

$$\Omega-\Omega_1=\varepsilon k\int_0^1\frac{u-u^2}{u+D}\,du,$$

où D désigne le rapport $\frac{1}{N^2-1}$. Il en résulte

$$\Omega-\Omega_1=\varepsilon k\left[-\frac{u^2}{2}+(D+1)u-D(D+1)\log\frac{D+u}{D}\right]_0^1,$$

c'est-à-dire l'expression ci-dessus, après des réductions immédiates.

QUATRIÈME PARTIE.

ENTRAÎNEMENT DES ONDES; PUISSANCE RÉFRACTIVE DES MÉLANGES.

---

46. Immobilité de l'éther dans l'espace et entraînement partiel des ondes lumineuses par les corps en mouvement. — Puisque notre théorie mécanique de la lumière permet d'exprimer simplement, du moins à une première approximation, un certain nombre de phénomènes, essayons de l'étendre à des faits de plus en plus complexes. L'un d'eux est la propagation des ondes lumineuses dans les corps en mouvement, c'est-à-dire animés de translations dont la vitesse V soit comparable à celle de la lumière, comme l'est (quoique à un très faible degré) la vitesse de la Terre dans son orbite.

Il résulte, on le sait, de cette translation de la Terre, que les astres, observés au moyen d'un long tube braqué sur eux, ou même à l'œil nu, ne sont pas vus suivant la droite qui joint le fond de l'œil à leur situation vraie, mais qu'ils sont jugés se trouver suivant une droite inclinée sur celle-là, dans le sens de la vitesse terrestre V elle-même, d'un petit angle dit *aberration*, le plus sensible possible lorsque les ondes émanées de l'astre et venant à nous cheminent normalement à la trajectoire terrestre. Cet angle, alors maximum, est exprimé, quand l'axe d'un tube vide sert de ligne de visée, par le rapport de V à la vitesse de la lumière dans l'éther libre, vitesse que j'appellerai ici ω. Or, cette déviation angulaire $\frac{V}{\omega}$ s'explique tout naturellement, comme on sait encore, en admettant l'immobilité de l'éther ou l'absence de toute translation rapide qui l'emporterait dans l'espace à la manière de la Terre.

En effet, dans cette supposition, les ondes émanées de l'astre se propagent vers nous en ligne droite (p. 306) et, par hypothèse, à peu près normalement à la trajectoire terrestre. Soit l la longueur du tube dans lequel on les reçoit par un bout. Elles emploient le temps $\frac{l}{\omega}$ à parcourir le tube; et elles ne peuvent sortir par l'autre bout, c'est-à-dire parvenir à notre œil, que si le second bout se présente aux ondes

ce même temps $\frac{l}{\omega}$ après le premier bout, temps pendant lequel le tube, entraîné par la Terre, a avancé de $V\frac{l}{\omega}\cdot$ Le bout inférieur doit donc, en projection sur la trajectoire terrestre, être à la distance $V\frac{l}{\omega}$ en arrière du premier : ce qui exige bien que l'axe du tube, ligne de visée d'après laquelle nous fixons ou notons la situation angulaire de l'astre, fasse avec la direction du rayon lumineux normal aux ondes le petit angle $\frac{V}{\omega}\cdot$

Même quand nous observons l'astre sans aucun tube, nous devons évidemment incliner d'un très petit angle (inappréciable, il est vrai) du côté où se fait le déplacement instantané de la Terre, l'axe de notre œil. Car, sans cette *aberration,* les ondes entrées par la pupille n'arriveraient pas au fond de l'œil sur l'axe même, et n'y produiraient pas l'impression qui nous fait juger la direction des objets en coïncidence avec celle de l'axe, dont les rotations nous sont immédiatement perceptibles.

On est donc conduit à penser que l'éther n'éprouve pas, dans l'espace, des déplacements d'ensemble atteignant des volumes finis de sa matière, et qui soient, pour la vitesse, comparables aux translations des astres. Il entoure et pénètre les objets terrestres, sans être sensiblement entraîné par eux, pas plus ou même bien moins que ne l'est, suivant une comparaison familière aux physiciens astronomes, l'air au milieu duquel on promène un filet à larges mailles [1].

---

[1] **Impondérabilité de l'éther.** — Toutefois, cela ne suffirait pas pour permettre d'attribuer à l'éther interplanétaire, ni, par conséquent, à celui qui nous touche, des vitesses de translation négligeables autour du Soleil; car cet éther, du moins près du Soleil, obéirait sans doute aux lois de Képler, s'il n'était pas *impondérable,* ou si sa *gravité* n'était pas nulle. Il faut donc encore qu'il soit dépourvu de pesanteur.

On peut voir, dans une *Étude,* que j'ai publiée en 1879, *sur divers points de la Philosophie des Sciences* (p. 69), et dans la troisième de mes *Leçons synthétiques de Mécanique générale* (de 1889), comment s'explique la *constance* de la pesanteur pour tous les corps de notre système solaire ou même stellaire, sans qu'on ait besoin de faire de cette constance une loi générale de la Nature, mais par une *sélection* inévitable, qui n'aurait maintenu dans le système et laissé participer à ses mouvements, à l'époque où il était une nébuleuse très diluée, soustraite par sa raréfaction aux actions moléculaires, que des substances gravitant également. Au contraire, toutes les autres auraient été, à cette époque, dispersées par la pesanteur elle-même dans des systèmes stellaires différents, à l'exception des matières insensibles à la pesanteur ou ayant leur gravitation nulle,

Mais quoique l'éther paraisse rester ainsi immobile dans l'espace, les ondes qui s'y propagent à travers un corps en mouvement, c'est-à-dire aux endroits où se trouve une matière pondérable se déplaçant d'ensemble avec une grande vitesse donnée V, semblent être entraînées par cette matière. Si N désigne l'indice de réfraction du corps, ou que la vitesse de la lumière à travers ce corps en repos soit $\frac{\omega}{N}$, l'entraînement des ondes a lieu avec la vitesse $V\left(1-\frac{1}{N^2}\right)$. Autrement dit, leur transmission se fait comme si l'éther possédait la fraction $1-\frac{1}{N^2}$ de la vitesse translatoire de la matière pondérable qui s'y trouve mêlée, et comme s'il propageait d'ailleurs (par rapport à sa masse prise pour repère) le mouvement vibratoire, à la manière de l'éther fixe baignant la même matière pondérable supposée en repos.

Telle est, du moins, la loi qu'une induction hardie a suggérée à Fresnel, et que Fizeau a confirmée par une expérience célèbre (répétée depuis), consistant à mesurer la différence de phase qu'ont acquise deux rayons lumineux, à la sortie de deux longs tubes parallèles, parcourus à la fois, dans un même sens, par eux et, dans les deux sens opposés, par deux rapides courants d'eau, avançant ou poussant un rayon, mais retardant ou retenant l'autre.

47. Explication simple, par notre théorie, de cet entraînement des ondes. — Il y a lieu de voir si nos équations de mouvement indiqueront un tel entraînement des ondes et permettront de l'évaluer.

Toute la difficulté, avec un éther vibrant au milieu de molécules emportées dans une translation commune V, sera d'évaluer la résistance opposée par chaque molécule au mouvement *vibratoire*. Or on peut admettre que cette résistance, nulle en moyenne, et distincte de la petite impulsion constante sur l'éther, due à la translation, s'annulerait, si les déplacements alternatifs de la molécule pondérable se trouvaient, à tout instant, identiques à ceux, ξ, η, ζ, de l'éther qui l'entoure *au même moment,* cas où les situations relatives des deux espèces de matières paraissent ne plus dépendre du mouvement vibratoire. On conçoit, en effet, que chaque molécule pondérable, alors entourée sans cesse d'éther écarté de ses situations moyennes exactement comme elle l'est elle-même, ne serait ni gênée, ni poussée

---

restées répandues presque uniformément et en repos dans des régions immenses de l'Univers, où elles ne seraient autre chose que l'éther lui-même.

par lui, *dans ses oscillations* périodiques. Il ne resterait sans doute, entre les deux espèces de matière (ainsi d'accord autant que possible), d'autre réaction à leur contact que l'impulsion *constante* produite par chaque molécule sur l'éther ambiant, et employée à le déplacer momentanément pour laisser passer la molécule : mouvement distinct des vibrations lumineuses et étranger à leur mécanisme.

Ce sont donc les écarts distinguant, aux divers instants successifs, les déplacements vibratoires d'une molécule pondérable, d'avec ceux, ξ, η, ζ, beaucoup plus grands, de l'éther *au milieu duquel elle se trouve,* qui causent la résistance (R_x, R_y, R_z) spéciale au *mouvement vibratoire;* et comme l'analogie de celle-ci avec la résistance des fluides nous a fait introduire dans son expression, en tant que variables principales dont elle dépend, les dérivées secondes de ces écarts par rapport au temps, il faudra, *pour chaque molécule,* évaluer ces dérivées secondes en considérant l'éther *sans cesse nouveau* qui l'entoure, ou dont le constant accord avec elle, dans ses vibrations, annulerait, s'il avait lieu, R_x, R_y, R_z.

Autrement dit, dans les formules (1) et (4) des résistances (p. 269 et 271), les dérivations de ξ, η, ζ, par rapport à t, devront se faire en suivant chaque molécule ou chaque groupe moléculaire, animés de la translation V. Soient V_x, V_y, V_z les trois composantes de cette vitesse V, ou $V_x\,dt$, $V_y\,dt$, $V_z\,dt$ les accroissements des coordonnées *moyennes* (et, très sensiblement, vraies ou réelles) de la molécule durant l'instant dt : les dérivées $\frac{d}{dt}$ à prendre dans (1) et (4) seront ainsi des dérivées *complètes* $\left(\text{que nous désignerons par } \frac{d_c}{dt}\right)$ ayant évidemment l'expression symbolique

$$(156) \qquad \frac{d_c}{dt} = \frac{d}{dt} + V_x \frac{d}{dx} + V_y \frac{d}{dy} + V_z \frac{d}{dz}.$$

Par suite, les dérivées secondes correspondantes, où V_x, V_y, V_z seront constants et auront même leurs carrés et produits négligeables, se calculeront par la formule

$$(157) \qquad \frac{d_c^2}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} + 2\left(V_x \frac{d^2}{dx\,dt} + V_y \frac{d^2}{dy\,dt} + V_z \frac{d^2}{dz\,dt}\right).$$

Bornons-nous au cas d'un milieu transparent isotrope. Prenons, par exemple, les équations (6) du mouvement (p. 272), où, D, E, F, D', E', F' étant nuls et B, C égaux à A, les trois termes $\rho A \frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2}$,

seuls, proviendront des résistances R_x, R_y, R_z, et s'évalueront par la formule (157). D'ailleurs, divisons par μ; et observons que $\frac{\mu}{\rho(1+A)}$ est le carré de la vitesse des ondes dans le corps en repos, appelée ici $\frac{\omega}{N}$, mais que $\frac{\mu}{\rho}$ est le carré ω^2 de la vitesse dans l'éther libre : d'où il suit que $\frac{\rho A}{\mu} = \frac{N^2-1}{\omega^2}$. Les équations du mouvement vibratoire seront

$$(158)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{N^2}{\omega^2}\left[\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\left(1-\frac{1}{N^2}\right)\left(V_x\frac{d^2\xi}{dx\,dt} + V_y\frac{d^2\xi}{dy\,dt} + V_z\frac{d^2\xi}{dz\,dt}\right)\right] \\ &\quad = \Delta_2\xi - \frac{d\theta}{dx}, \quad \ldots \end{aligned} \right.$$

Cela posé, rapportons le mouvement à des axes mobiles, des x', y', z', parallèles à ceux des x, y, z, et animés d'une vitesse ayant les composantes $V_x\left(1-\frac{1}{N^2}\right)$, $V_y\left(1-\frac{1}{N^2}\right)$, $V_z\left(1-\frac{1}{N^2}\right)$. Si x', y', z', t' désignent les nouvelles variables, on aura, pour transformer les dérivées de ξ, η, ζ, des relations comme

$$(159)\quad \left\{ \begin{aligned} x' &= x - V_x\left(1-\frac{1}{N^2}\right)t, \\ y' &= y - V_y\left(1-\frac{1}{N^2}\right)t, \\ z' &= z - V_z\left(1-\frac{1}{N^2}\right)t, \\ t' &= t, \end{aligned} \right.$$

donnant les formules symboliques de dérivation

$$(160)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx'}, \qquad \frac{d}{dy} = \frac{d}{dy'}, \qquad \frac{d}{dz} = \frac{d}{dz'}, \\ &\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'} - \left(1-\frac{1}{N^2}\right)\left(V_x\frac{d}{dx'} + V_y\frac{d}{dy'} + V_z\frac{d}{dz'}\right). \end{aligned} \right.$$

Les trois premières montrent que les dérivées relatives aux coordonnées garderont leurs expressions. Quant à la dernière, si on l'applique deux fois successivement, toujours en négligeant les carrés et produits de V_x, V_y, V_z, il vient

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d^2}{dt'^2} - 2\left(1-\frac{1}{N^2}\right)\left(V_x\frac{d^2}{dx'\,dt'} + V_y\frac{d^2}{dy'\,dt'} + V_z\frac{d^2}{dz'\,dt'}\right),$$

ou, sensiblement, en transposant le dernier terme après y avoir effacé les accents de x, y, z, t (vu la présence des petits facteurs V_x, V_y, V_z, et sauf erreur de l'ordre de leurs carrés ou produits) :

$$(161)\quad \frac{d^2}{dt^2}+2\left(1-\frac{1}{N^2}\right)\left(V_x\frac{d^2}{dx\,dt}+V_y\frac{d^2}{dy\,dt}+V_z\frac{d^2}{dz\,dt}\right)=\frac{d^2}{dt'^2}.$$

Les équations (158), où il est indifférent d'accentuer x, y, z dans les dénominateurs dx, dy, dz, reviennent dès lors simplement à

$$(162)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{N^2}{\omega^2}\frac{d^2\xi}{dt'^2}&=\Delta_2\xi-\frac{d\theta}{dx},\\ \frac{N^2}{\omega^2}\frac{d^2\eta}{dt'^2}&=\Delta_2\eta-\frac{d\theta}{dy},\\ \frac{N^2}{\omega^2}\frac{d^2\zeta}{dt'^2}&=\Delta_2\zeta-\frac{d\theta}{dz}.\end{aligned}\right.$$

Donc, *par rapport à des axes mobiles animés d'une translation égale à la fraction* $1-\frac{1}{N^2}$ *de la translation même du corps, les ondes se propagent comme si le corps était fixe.* C'est bien dire, conformément à l'intuition de Fresnel confirmée par Fizeau, que les ondes lumineuses sont entraînées par le corps avec une vitesse égale à la fraction $1-\frac{1}{N^2}$ de la sienne.

Si le corps était légèrement hétérotrope (comme le sont tous les cristaux biréfringents) et rapporté à ses axes principaux, cas où, dans les deux dernières équations (158) du mouvement, A ferait place à B et à C, c'est-à-dire N à d'autres constantes N′ et N″, on pourrait le plus souvent confondre avec leur moyenne, dans les produits où figurent les petits facteurs V_x, V_y, V_z, les trois différences $1-\frac{1}{N^2}$, $1-\frac{1}{N'^2}$, $1-\frac{1}{N''^2}$. Alors la même élimination de V_x, V_y, V_z par la formule (161) aurait lieu, en attribuant aux axes mobiles une translation intermédiaire entre celles qui correspondraient à ces trois différences respectives. Et les ondes éprouveraient, mais avec de petites déformations en plus (à raison des termes ainsi négligés), un entraînement égal à la fraction de la translation du corps qu'exprimerait une moyenne, légèrement variable suivant les cas, entre les trois excès peu différents $1-\frac{1}{N^2}$, $1-\frac{1}{N'^2}$, $1-\frac{1}{N''^2}$.

En résumé, par rapport aux axes mobiles *choisis*, la propagation et

la polarisation de chaque ébranlement issu de la source se font, à très peu près, comme dans un corps immobile; et, en particulier, la trajectoire relative suivant laquelle se transmet au loin (sans variation sensible d'amplitude sur des parcours d'un nombre modéré de longueurs d'onde) tout déplacement vibratoire dû à l'ébranlement, est le rayon de l'onde courbe de Fresnel, aboutissant aù point de contact de celle-ci avec le plan tangent parallèle à l'onde ainsi transmise.

48. Réflexion et réfraction par un corps animé d'une translation rapide et emportant l'observateur. — Quand l'observateur participe à la vitesse V de translation du corps transparent, il y a lieu de chercher ce que devient cette trajectoire, ou voie de propagation d'une vibration lumineuse, dans le mouvement relatif à des axes coordonnés possédant la même translation V et portant l'observateur. C'est justement ce qui arrive dans la plupart des expériences de Physique, où les appareils et l'observateur n'ont pas d'autre mouvement (dont il faille tenir compte) que celui du globe terrestre, soit quand la source lumineuse est extra-terrestre, soit, surtout, quand elle subit elle-même la translation, c'est-à-dire quand c'est une lumière terrestre, ou la lumière solaire, mais réfléchie ou réfractée par un objet fixé sur notre globe et supposée, dès lors, émaner de cet objet (sans changer même de période vibratoire, vu la quasi-invariabilité de la distance du Soleil à nous).

Comparativement à ces nouveaux axes portant le corps transparent et animés, dans l'espace, d'une vitesse donnée V, chaque trajectoire du mouvement vibratoire, définie ci-dessus, subit, à raison de l'*incomplet* entraînement des ondes, une translation en sens inverse, de vitesse $\frac{V}{N^2}$; et, au bout d'une unité de temps, pendant laquelle le milieu ou centre d'une même onde plane la parcourait, elle a éprouvé, avec l'onde courbe grandissante qui porte tangentiellement l'onde plane, le *recul* $\frac{V}{N^2}$. Si donc, s'étant placé, *dans le système mobile,* au point de départ de l'onde, point qu'occuperait constamment la source *supposée entraînée elle-même,* on avait regardé le milieu de l'onde plane s'en éloigner graduellement, on l'aurait vu décrire, en diagonale, le rayon visuel aboutissant au point de contact de l'onde de Fresnel, telle qu'elle paraît située après le recul relatif $\frac{V}{N^2}$, et du plan tangent parallèle aux ondes. Or c'est cette droite, trajectoire relative suivie par les ébranlements dans leur propagation, qu'il conviendra d'appeler un *rayon lumineux,* pour les observateurs

emportés avec le corps ; et, cela, quand bien même la source ne serait pas entraînée : car il s'agit des radiations qu'elle a émises *à un moment donné,* ou qu'elle aurait pu émettre de même si, *entraînée, elle s'était éteinte aussitôt après,* sauf à être, au besoin, remplacée par une autre, coïncidant avec la source vraie dans sa nouvelle situation relative.

Ainsi, le rayon lumineux corrélatif à un groupe quelconque d'ondes planes s'obtient, dans le système d'axes qui porte le corps transparent et l'observateur, en menant à l'onde courbe de Fresnel un plan tangent parallèle à ces ondes et *en joignant, à son point de contact, non pas le centre de l'onde, mais un point situé en avant du centre, à la distance* $\frac{V}{N^2}$ *du côté où se fait la translation effective* V. Ce point représente la source, et, la surface de Fresnel, l'onde courbe qui l'a quittée depuis une unité de temps et qui a éprouvé, par rapport à la source (supposée entraînée dans la translation V), le recul $\frac{V}{N^2}$, tout en grandissant de zéro à ses dimensions actuelles.

L'excentricité $\frac{V}{N^2}$ que subit de la sorte l'onde de Fresnel, par rapport au point de départ commun des ondes planes qui lui deviennent tangentes après l'unité de temps, ou des rayons lumineux aboutissant à ses divers points, représente l'influence de la translation V sur la propagation *apparente* de la lumière ; et l'*anomalie excentrique* d'un rayon, ou angle que fait ce rayon, censé tiré à partir de son extrémité sur l'onde courbe, avec la droite menée de la même extrémité au centre géométrique de l'onde courbe, constitue l'apparente déviation du rayon due à la vitesse translatoire V ou, en d'autres termes, l'*aberration* du rayon lumineux. C'est l'aberration *astronomique* elle-même, quand on suppose issu d'un astre le rayon lumineux et liés au globe terrestre les axes coordonnés.

Mais formons les équations aux dérivées partielles du mouvement vibratoire relatif de l'éther, en appelant encore V_x, V_y, V_z les composantes de la vitesse V de translation. Soient t_1, x_1, y_1, z_1 le temps t et les coordonnées relatives des divers points (x, y, z) de l'espace, variables liées ici à t, x, y, z par les formules

$$t_1 = t, \qquad x_1 = x - V_x t, \qquad y_1 = y - V_y t, \qquad z_1 = z - V_z t$$

et donnant

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dx_1}, \qquad \frac{d}{dy} = \frac{d}{dy_1}, \qquad \frac{d}{dz} = \frac{d}{dz_1},$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt_1} - V_x \frac{d}{dx_1} - V_y \frac{d}{dy_1} - V_z \frac{d}{dz_1};$$

d'où, aussi, d'après (156),

$$\frac{d_c}{dt} = \frac{d}{dt_1}.$$

Donc, dans les équations (6) du mouvement (p. 272) les termes en A, B, C, D, E, F, D', E', F', ou qui proviennent des résistances de la matière pondérable, garderont leur forme monome simple; mais les termes $\rho \frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2}$ exprimant les forces motrices de l'éther deviendront, si l'on se dispense d'y écrire les indices,

$$\rho \left[\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} - 2 V_x \frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dx\, dt} - 2 V_y \frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dy\, dt} - 2 V_z \frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dz\, dt}\right].$$

Les équations du mouvement étant ainsi transformées, rien ne sera changé aux raisonnements du n° 31, qui nous ont conduit aux conditions (90) (p. 343), spéciales à une surface séparative de deux milieux transparents; car, s'il figurera, aux premiers membres des deux dernières équations (89) (p. 339), des termes, en $V_x \frac{d^2(\eta, \zeta)}{dx\, dt}$, où entre une dérivée en x, ces termes seront négligeables, à une première approximation, en raison de la petitesse du facteur V_x, et, à une approximation plus élevée, par suite de la variation graduelle, dès lors établie à très peu près, de η, ζ à la traversée de la surface. Ainsi, les conditions spéciales aux surfaces séparatives consisteront toujours dans l'égalité, de part et d'autre, des déplacements tangentiels de l'éther et de ses rotations moyennes.

Il en résultera, comme on a vu, pour les ondes planes réfléchies et réfractées qu'engendre une onde plane incidente, l'identité de leurs traces sur la surface séparative, supposée plane, avec la trace même de l'onde incidente, et, par suite (p. 364), la construction d'Huygens, avec ondes courbes de Fresnel, relatives aux deux milieux, déplacées de $\frac{V}{N^2}$ par rapport à la surface séparative, ou construites non pas autour du point où la surface séparative est percée par le rayon incident, mais autour d'un centre situé à la distance $\frac{V}{N^2}$ de ce point, à l'opposé du sens de la translation effective V. Les rayons incident (prolongé), réfléchis et réfractés aboutiront, sur les surfaces de Fresnel ainsi menées, aux points de contact des plans respectifs des ondes incidente, réfléchies et réfractées, considérées une unité de temps après leur passage à leur centre commun sur la surface sépara-

tive; mais ils partiront de la situation où sera venu ce centre commun, entraîné, avec la surface séparative elle-même, dans le mouvement des axes.

49. Extension, à ce cas, des formules régissant les amplitudes des vibrations réfléchies et réfractées. — Quand il s'agit de milieux isotropes transparents, les formules des amplitudes relatives, P, P_1 dans le premier azimut et Q, Q_1 dans le second, des deux vibrations réfléchie et réfractée comparées à la vibration incidente, restent simples malgré *l'excentricité* subie par les surfaces d'onde, alors sphériques.

Seulement, il faut y remplacer les angles ordinaires i, i', r, d'incidence, de réflexion et de réfraction, fixant les directions des *rayons*, et qui seront, en général, dans des plans un peu différents, par les angles, ι, ι', ρ, que font, toujours avec la normale Ox à la surface séparative, au point O où aboutit le rayon incident, les *perpendiculaires* ω, ω' et ω_1 abaissées de ce point, *dans un plan commun choisi pour celui des xy, sur les ondes planes incidente, réfléchie et réfractée, tangentes aux ondes sphériques*, l'angle aigu ι' étant d'ailleurs compté, comme l'angle i' de réflexion, à partir de l'axe des x négatifs. Comme les vibrations sont transversales, arbitrairement orientées dans le plan d'onde correspondant ([1]) et que l'on aura encore (p. 363) la proportion des sinus

$$\frac{\sin\iota}{\omega} = \frac{\sin\iota'}{\omega'} = \frac{\sin\rho}{\omega_1},$$

les équations des nos 32 et 33 (p. 350 à 354) s'appliqueront, à cela près que ω' différera légèrement de ω et que le paramètre l' aura une valeur, $-\lambda$, un peu autre que $-l$.

([1]) Ce sont ces deux circonstances, plutôt que des considérations de symétrie (ici en défaut), par rapport au plan d'incidence, qui permettent la réduction des déplacements à deux systèmes distincts, déplacements parallèles, dans un système, à l'axe des z, c'est-à-dire aux traces des ondes sur la surface séparative, ou n'ayant que leur composante ζ, ζ', ζ_1, et déplacements perpendiculaires, dans l'autre système, à ces mêmes traces, ou comprenant seulement les deux composantes respectives ξ et η, ξ' et η', ξ_1 et η_1. Ces *deux* systèmes de vibrations se produisent et se propagent d'ailleurs sur un rayon *unique* (incident, réfléchi ou réfracté), la surface courbe d'onde n'ayant qu'une nappe, ou l'équation en ω^2 admettant deux racines égales pour toute direction des ondes planes.

On remarquera que le plan normal commun aux ondes incidentes, réfléchies et réfractées garde ici le rôle appartenant, dans les cas plus simples, au plan d'incidence.



Les équations de condition donnant, en effet, immédiatement,

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} &1+P=P_1, \qquad l-\lambda P = l_1 P_1,\\ &\text{et}\\ &l\omega+\lambda\omega' Q = l_1\omega_1 Q_1, \qquad \frac{1}{\omega}-\frac{Q}{\omega'}=\frac{Q_1}{\omega_1}, \end{aligned}\right.$$

il vient

$$(a')\qquad \left\{\begin{aligned} &P=\frac{l-l_1}{\lambda+l_1}, \qquad P_1=\frac{\lambda+l}{\lambda+l_1},\\ &\text{et}\\ &Q=\frac{\omega'}{\omega}\,\frac{l_1\omega_1^2-l\omega^2}{l_1\omega_1^2+\lambda\omega'^2}, \qquad Q_1=\frac{\omega_1}{\omega}\,\frac{\lambda\omega'^2+l\omega^2}{\lambda\omega'^2+l_1\omega_1^2}, \end{aligned}\right.$$

ou bien, par la substitution à l, λ, l_1, de $\frac{\cos\iota}{\omega}$, $\frac{\cos\iota'}{\omega'}$, $\frac{\cos\rho}{\omega_1}$, puis à ω, ω', ω_1, des quantités proportionnelles $\sin\iota$, $\sin\iota'$, $\sin\rho$, et, enfin, par la réduction à 1, dans Q_1, du facteur $\cos(\iota'-\iota)$, sauf erreur négligeable de l'ordre de $(\iota'-\iota)^2$:

$$(b)\qquad \left\{\begin{aligned} P\ &= \frac{\sin\iota'\sin(\rho-\iota)}{\sin\iota\sin(\rho+\iota')},\\ P_1 &= \frac{\sin\rho\sin(\iota'+\iota)}{\sin\iota\sin(\iota'+\rho)};\\ Q\ &= \frac{\sin\iota'\sin(\rho-\iota)\cos(\rho+\iota)}{\sin\iota\sin(\rho+\iota')\cos(\rho-\iota')} = P\,\frac{\cos(\rho+\iota)}{\cos(\rho-\iota')},\\ Q_1 &= \frac{\sin\rho\sin(\iota'+\iota)\cos(\iota'-\iota)}{\sin\iota\sin(\iota'+\rho)\cos(\iota'-\rho)} = \frac{P_1}{\cos(\iota'-\rho)}. \end{aligned}\right.$$

Par exemple, si la vibration incidente est rectiligne et fait, à l'origine des coordonnées, dans le plan de l'onde, un angle α avec la trace Oz de ce plan sur la surface séparative, ses deux composantes dans les deux azimuts principaux respectifs seront entre elles comme $\cos\alpha$, $\sin\alpha$; et les deux composantes analogues du rayon réfracté seront entre elles, par l'introduction des facteurs correspondants d'amplitude P_1, Q_1, comme $P_1\cos\alpha$, $Q_1\sin\alpha$. Par suite, l'azimut α_1 de polarisation du rayon réfracté aura pour tangente $\frac{Q_1}{P_1}\tan\!g\,\alpha$; et l'on aura, pour le calculer, la formule extrêmement simple

$$(c)\qquad \frac{\cot\alpha_1}{\cot\alpha}=\frac{P_1}{Q_1}=\cos(\iota'-\rho).$$

50. L'aberration astronomique est indépendante de la nature du fluide remplissant la lunette d'observation. — La construction d'Huygens indiquée tout à l'heure (p. 402) conduit à la même figure, quand le rayon incident prend la direction qu'avait d'abord le rayon

réfracté et quand on suppose en outre intervertis les deux milieux, ou le premier remplacé par le second et *vice versa*. Seulement, alors, la direction du précédent rayon incident devient celle du rayon réfracté. Ainsi un milieu à faces parallèles, participant au mouvement des axes coordonnés, donnera lieu successivement, *sur ses deux faces*, si on l'interpose entre la source lumineuse et l'observateur, à deux réfractions *exactement inverses*, après lesquelles tout rayon qui l'aura traversé aura repris sa direction relative première et comportera, par suite, la même aberration qu'avant de pénétrer dans le milieu.

Donc, comme c'est, en définitive, toujours dans l'air, que l'astronome observera les rayons issus d'un astre, une couche d'eau ou d'un autre fluide remplissant la lunette employée pour l'observation ne modifiera pas l'aberration actuelle des rayons lumineux issus d'une étoile fixe, en ce sens, du moins, que l'œil devra être orienté de la même manière, pour percevoir suivant son axe les ondes émanées d'une étoile, soit après, soit avant le remplissage de la lunette par un liquide plus réfringent que l'air. Ainsi, *pour l'œil*, l'aberration de l'étoile sera pareille dans les deux cas.

Mais il y a plus. La direction même qui, *donnée à la lunette*, permet de voir l'étoile au croisement des fils du réticule, n'aura pas été changée par l'interposition de la couche transparente à faces parallèles. Cela résulte du double fait que, dans la lunette en repos, une pareille interposition n'aurait nullement altéré la direction des rayons et que, d'autre part, la translation V ne modifie pas la construction, à l'intérieur de la lunette, des rayons réfractés (ou même réfléchis) dérivés d'un rayon incident venu suivant une direction apparente assignée, comme il va être démontré au numéro suivant.

Et l'on peut en dire autant de l'œil. Il devra, pour que les rayons émanés d'un astre l'impressionnent au centre de la rétine, s'orienter, eu égard aux milieux réfringents qu'il contient, de la manière dont il devrait le faire, au repos, pour des rayons incidents de même direction apparente; car le cheminement relatif du mouvement vibratoire à son intérieur se construira comme dans ce cas, ainsi qu'on va le voir.

51. Les rayons réfléchi et réfracté ont, avec le rayon incident et avec la normale à la surface séparative, les mêmes rapports de position qu'à l'état de repos. — Au degré d'approximation considéré ici, où nous négligeons dans les formules les termes non linéaires en $\frac{V}{\omega}$ et ceux de l'ordre du produit de $\frac{V}{\omega}$ par le pouvoir biréfringent, *les*

rayons soit réfléchis, soit réfractés, issus d'un rayon incident dont on donne la direction apparente, se construisent, dans un corps en mouvement, comme si les ondes participaient entièrement à la translation V *de ce corps et que tout le système (matière pondérable et éther) fût en repos.*

Prenons, en effet, comme plus haut (p. 402), pour plan des yz, la surface séparative, pour origine, le point où elle est percée par le rayon incident; et soient x, y, z les coordonnées du point où le rayon incident prolongé atteint la surface de Fresnel relative au premier milieu.

Puisque nous faisons ici abstraction de la biréfringence, cette surface est une sphère, d'un rayon R égal à $\frac{\omega}{N}$ (¹), et dont le centre, ayant subi, à partir de l'origine, le déplacement $\frac{V}{N^2}$, aura acquis de petites coordonnées a, b, c. Son équation sera donc, en négligeant les carrés de a, b, c,

$$(\alpha) \qquad x^2+y^2+z^2-2(ax+by+cz)=R^2.$$

Quant à l'onde courbe relative au second milieu, ce sera de même une sphère, mais d'un rayon R′ égal à $\frac{\omega}{N'}$ ou au produit de R par le rapport $n=\frac{N}{N'}$, et dont le centre aura pris les petites coordonnées n^2a, n^2b, n^2c. Son équation, en y appelant x', y', z' les coordonnées variables, sera donc

$$(\alpha') \qquad x'^2+y'^2+z'^2-2n^2(ax'+by'+cz')=n^2R^2.$$

Cela posé, le plan de l'onde incidente, tangent en (x, y, z) à la sphère (α), a pour équation, si x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées courantes,

$$\begin{aligned}(x-a)x_1+(y-b)y_1+(z-c)z_1\\ =x(x-a)+y(y-b)+z(z-c)=R^2+ax+by+cz;\end{aligned}$$

et sa trace sur la surface séparative $x_1=0$ est exprimée par la relation

$$y_1+\frac{z-c}{y-b}z_1=\frac{R^2+ax+by+cz}{y-b}.$$

Or, si (x', y', z') désigne, sur la sphère (α'), le point de contact de

(¹) On voit que ω désigne ici, comme aux nᵒˢ 46 et 47, la vitesse de propagation de la lumière dans l'éther libre.

l'onde plane réfractée correspondante, la trace de cette onde sur le plan des yz est, de même,

$$y_1 + \frac{z'-n^2c}{y'-n^2b} z_1 = \frac{n^2(R^2+ax'+by'+cz')}{y'-n^2b};$$

et son identité à la trace précédente donne, pour relier (x', y', z') à (x, y, z), la double proportion

$$\frac{y'-n^2b}{y-b} = \frac{z'-n^2c}{z-c} = \frac{n^2(R^2+ax'+by'+cz')}{R^2+ax+by+cz}.$$

Égalons chacun des deux premiers rapports au troisième, en remplaçant

$$y'-n^2b,\quad y-b,\quad R^2+ax'+by'+cz',\quad R^2+ax+by+cz,\quad \ldots,$$

respectivement, par

$$y'\left(1-\frac{n^2b}{y'}\right),\quad y\left(1-\frac{b}{y}\right),$$
$$R^2\left(1+\frac{ax'+by'+cz'}{R^2}\right),\quad R^2\left(1+\frac{ax+by+cz}{R^2}\right),\quad \ldots,$$

et en observant que la petitesse de a, b, c permet de réduire à sa partie linéaire toute puissance ou tout produit des facteurs entre parenthèses. La première des deux formules obtenues sera

$$y' = n^2y\left[1+\frac{a(x'-x)+b(y'-y)+c(z'-z)}{R^2} - b\left(\frac{1}{y}-\frac{n^2}{y'}\right)\right].$$

Quand on néglige a, b, c, cette formule donne $y' = n^2y$, valeur approchée qui, substituée dans le dernier terme (très petit) du second membre, réduit la formule, sauf erreur négligeable, à

$$(\beta)\qquad y' = n^2y\left[1+\frac{a(x'-x)+b(y'-y)+c(z'-z)}{R^2}\right].$$

On aura de même

$$(\beta')\qquad z' = n^2z\left[1+\frac{a(x'-x)+b(y'-y)+c(z'-z)}{R^2}\right].$$

Appelant δ et δ' les longueurs $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ et $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$ des rayons correspondants, incident et réfracté, émanés de l'origine, cherchons à rattacher de même δ' à δ. L'équation (α) peut s'écrire

$$\delta^2 = R^2+2(ax+by+cz) = R^2\left(1+2\frac{ax+by+cz}{R^2}\right)$$

et donne, à très peu près, par une extraction de racine carrée,

$$\delta = \mathrm{R}\left(1 + \frac{ax + by + cz}{\mathrm{R}^2}\right).$$

L'équation (α') donne de même

$$\delta' = n\mathrm{R}\left(1 + \frac{ax' + by' + cz'}{\mathrm{R}^2}\right).$$

Il vient donc, sensiblement, par la comparaison des deux valeurs de δ' et δ,

$$(\beta'') \qquad \delta' = n\delta\left[1 + \frac{a(x'-x) + b(y'-y) + c(z'-z)}{\mathrm{R}^2}\right].$$

Divisons maintenant les deux formules (β), (β') par celle-ci (β''); et, appelant (α, β, γ), (α', β', γ') les cosinus directeurs respectifs des deux rayons incident et réfracté, quotients de x, y, z par δ et de x', y', z' par δ', nous aurons enfin :

$$(\gamma) \qquad \beta' = n\beta, \qquad \gamma' = n\gamma.$$

Ces formules détermineront β', γ' et, par suite, la direction du rayon réfracté; car le troisième cosinus directeur, α', égal à

$$\pm\sqrt{1-(\beta'^2+\gamma'^2)}, \qquad \text{ou à} \qquad \pm\sqrt{1-n^2(\beta^2+\gamma^2)},$$

doit être de même signe que α. Or on voit que les petits déplacements, (a, b, c), (n^2a, n^2b, n^2c), éprouvés par les centres des deux ondes courbes à raison de la translation V, n'y figurent pas.

La démonstration s'étend au rayon réfléchi : il suffit, pour l'y appliquer, de prendre la deuxième onde courbe identique à la première, ou de faire $n = 1$, mais en attribuant au cosinus α' la valeur de signe contraire $\mp\sqrt{1-(\beta^2+\gamma^2)}$, ou $-\alpha$.

52. Influence de la translation du corps transparent et de l'observateur, sur la rotation que la réfraction imprime au plan de vibration de la lumière polarisée rectilignement. — Si les *excentricités* $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{N}^2}$ et $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{N}'^2}$ subies par les deux surfaces d'onde courbes ne modifient pas d'une manière sensible les directions des deux rayons réfléchi et réfracté, elles paraissent avoir, au contraire, une influence un peu moins négligeable sur d'autres circonstances du phénomène. Telle serait, par exemple, d'après de mémorables expériences de

Fizeau ([1]), la rotation du plan de polarisation par la réfraction, rotation que permettra de calculer la formule (c) obtenue tout à l'heure (p. 404).

Fizeau lançait à travers plusieurs piles de glaces un rayon rectilignement polarisé, qu'il dirigeait tantôt en sens inverse de la translation V du globe terrestre, tantôt dans le même sens; et il tâchait d'apprécier la différence introduite par ce retournement dans l'azimut final de polarisation du rayon. Comme on passe du premier cas au second par un simple changement de signe de V, il nous suffira d'établir la formule convenant au premier cas. Nous supposerons seulement, pour plus de généralité, que la translation V fasse, dans le plan d'incidence, un angle θ quelconque (pouvant donc différer de l'angle d'incidence i) avec la normale aux surfaces séparatives, tirée du côté d'où vient le rayon incident, ou, par conséquent, un angle quelconque $\theta - i$ avec ce rayon.

Les excentricités $\frac{V}{N^2}$, $\frac{V}{N'^2}$ se construiront pour la première réfraction, à partir du point O où le rayon incident perce la surface séparative correspondante, sur la droite inclinée, par rapport au prolongement même de ce rayon incident, de l'angle $\theta - i$, ou bien, par rapport à la normale Ox tirée dans le second milieu, de l'angle θ, du côté où est le rayon réfracté. Ces excentricités feront donc l'angle $\pi - i - \theta$ avec le rayon réfléchi et l'angle $\theta - r$ avec le rayon réfracté.

La première, $\frac{V}{N^2}$, projetée sur la perpendiculaire au rayon réfléchi émanée de l'origine, y donne l'*écart d'aberration* $\frac{V}{N^2}\sin(\theta + i)$, entre ce rayon et la normale $R = \frac{\omega}{N}$ à l'onde courbe, normale menée par le point de contact de cette onde avec l'onde plane réfléchie qui lui est tangente à l'extrémité du rayon. L'aberration $i' - \iota'$ du rayon réfléchi est donc $\frac{V\sin(\theta + i)}{N^2 R}$ ou $\frac{V\sin(\theta + i)}{\omega N}$; et, i' égalant i, l'on a

$$\iota' = i - \frac{V}{\omega}\frac{\sin(\theta + i)}{N}.$$

De même, l'excentricité, $\frac{V}{N'^2}$, de l'onde courbe relative au second

---

([1]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XLIX, p. 717 (14 novembre 1859), et *Annales de Chimie et de Physique*, 3e série, t. LVIII, p. 129 à 163 (février 1860).

milieu, donne, pour le rayon réfracté, en la projetant sur la perpendiculaire à ce rayon émanée de l'origine, un écart d'aberration, $\frac{\omega}{N'}(r-\rho)$, égal à $\frac{V\sin(\theta-r)}{N'^2}$; et l'on a

$$\rho = r - \frac{V\sin(\theta-r)}{\omega N'}.$$

La formule (c) (p. 404) devient donc, pour fournir la rotation $\alpha_1 - \alpha$ du plan de polarisation par la réfraction considérée,

$$(c')\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\cot\alpha_1}{\cot\alpha} &= \cos\left\{i - r - \frac{V}{\omega}\left[\frac{\sin(\theta+i)}{N} - \frac{\sin(\theta-r)}{N'}\right]\right\} \\ &= \cos(i-r)\left\{1 + \frac{V}{\omega}\left[\frac{\sin(\theta+i)}{N} - \frac{\sin(\theta-r)}{N'}\right]\operatorname{tang}(i-r)\right\}. \end{aligned}\right.$$

Dans la réfraction qui a lieu sur la seconde face de la même lame transparente, c'est-à-dire à la sortie du rayon, i et r, N et N' échangent leurs rôles; de sorte que l'on a, en appelant α_2 l'azimut de polarisation du rayon transmis extérieur,

$$\frac{\cot\alpha_2}{\cot\alpha_1} = \cos(r-i)\left\{1 + \frac{V}{\omega}\left[\frac{\sin(\theta+r)}{N'} - \frac{\sin(\theta-i)}{N}\right]\operatorname{tang}(r-i)\right\}$$

et, en multipliant par (c'),

$$\begin{aligned} \frac{\cot\alpha_2}{\cot\alpha} &= \cos^2(i-r)\left\{1 + \frac{V}{\omega}\left[\frac{\sin(\theta+i)+\sin(\theta-i)}{N}\right.\right. \\ &\qquad\qquad \left.\left. - \frac{\sin(\theta+r)+\sin(\theta-r)}{N'}\right]\operatorname{tang}(i-r)\right\} \\ &= \cos^2(i-r)\left[1 + 2\frac{V\sin\theta}{\omega}\left(\frac{\cos i}{N} - \frac{\cos r}{N'}\right)\operatorname{tang}(i-r)\right]. \end{aligned}$$

Comme enfin, très sensiblement, N égale 1 et que N', indice de réfraction de la lame dans l'air, égale $\frac{\sin i}{\sin r}$, il vient

$$(c'')\quad \frac{\cot\alpha_2}{\cot\alpha} = \cos^2(i-r)\left[1 + \frac{V}{\omega}\frac{\sin\theta}{\sin i}(\sin 2i - \sin 2r)\operatorname{tang}(i-r)\right].$$

Comparons le second membre à ce qu'il serait si, la translation V n'existant pas, l'indice N' de réfraction, que nous appellerons m avec Fizeau, recevait un petit accroissement Δm. Alors l'angle r, défini par la formule $\sin r = \frac{\sin i}{m}$, aurait son accroissement régi par la différentielle de cette formule,

$$(\cos r)\,\Delta r = -\frac{\sin i}{m^2}\Delta m = -\frac{\Delta m}{m}\sin r.$$

Celle-ci donnerait donc

$$\Delta r = -\frac{\Delta m}{m} \operatorname{tang} r;$$

et l'on aurait

$$\begin{aligned}\frac{\cot \alpha_2}{\cot \alpha} &= \cos^2\left(i - r + \frac{\Delta m}{m} \operatorname{tang} r\right) \\ &= \left[\cos(i-r) - \frac{\Delta m}{m} \operatorname{tang} r \sin(i-r)\right]^2 \\ &= \cos^2(i-r)\left[1 - 2\frac{\Delta m}{m} \operatorname{tang} r \operatorname{tang}(i-r)\right].\end{aligned}$$

Identifions cette dernière expression au second membre de (c''); et il viendra

$$(d) \quad \frac{\Delta m}{m} = \frac{V}{\omega} \frac{\sin\theta}{\sin i} \frac{\sin 2r - \sin 2i}{2 \operatorname{tang} r} = -\frac{V}{\omega} \frac{\sin\theta}{\sin i} \frac{\cos(i+r)\sin(i-r)}{\operatorname{tang} r},$$

pour l'accroissement relatif de l'indice de réfraction qui produirait le supplément de rotation du plan de polarisation auquel donne lieu la translation V.

Dans les observations de Fizeau, l'on avait $i = 70°$, $m = 1,5134$; d'où $r = 38°23'$, $i - r = 31°37'$, $\cos(i+r) = -\sin 18°23'$. En outre $\frac{V}{\omega} = 0,0001$ environ et, le plus souvent, θ ne différait pas sensiblement de i. Il résulte de la formule (d), dans ces conditions,

$$\frac{\Delta m}{m} = (\text{environ})\, 0,0000209 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{47900}.$$

Fizeau a cru pouvoir, sur la foi de quelques inductions, proposer, pour le cas où $\theta = i$, la formule notablement plus forte

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{V}{\omega}\left(m - \frac{1}{m}\right)\cos(i-r):$$

elle donnerait, ici, $\frac{\Delta m}{m} = 0,0000726$, ou près de trois fois et demie autant que la précédente (d). Ce résultat plus fort se trouve être, il est vrai, de l'ordre d'une moyenne entre ceux qu'ont fournis les observations, fort divergents d'ailleurs (dans le rapport de 1 à 4 environ). Mais de nombreuses perturbations, que le génie expérimental si éminent de Fizeau n'avait pu lui faire neutraliser ou évaluer toutes, y intervenaient, malgré les plus persévérants efforts pour les éliminer ou les corriger. Aussi Fizeau espérait-il seulement avoir réussi, dans ce travail, à montrer l'existence, mais non à évaluer la grandeur, d'une influence de la translation terrestre sur le phénomène étudié.

De nouvelles expériences pourraient-elles élucider la question? Les quantités à y mettre en vue sont tellement petites, qu'on n'ose guère l'espérer ([1]).

53. **Puissance réfractive des mélanges.** — Terminons notre étude de première approximation des phénomènes lumineux en rappelant la loi expérimentale approchée sur la *puissance réfractive* $N^2 - 1$ des mélanges transparents, loi observée assez bien dans les mélanges liquides, mais surtout dans les mélanges gazeux, où l'on peut le mieux admettre que les molécules pondérables gardent individuellement, quel qu'en soit le nombre dans l'unité de volume, leur figure et leurs dimensions.

Elle consiste en ce que la différence $N^2 - 1$ est la somme des valeurs qu'elle aurait si le mélange en question se réduisait, sans changement du volume apparent total, à ses molécules d'une même espèce, chaque valeur partielle étant d'ailleurs en raison de la densité, dans le mélange, de la matière constituée par ces molécules, et toutes les espèces de molécules devant être considérées à leur tour.

Cette loi est évidente dans notre théorie. Car le carré $\frac{\omega^2}{N^2}$ de la vitesse de propagation n'y est pas autre chose que $\frac{\mu}{\rho(1+A)}$, ou que $\frac{\omega^2}{1+A}$; et la puissance réfractive $N^2 - 1$ ne diffère pas de notre coefficient de résistance A, donné par la formule (3) (p. 271). Or l'expression de A, $\frac{\Sigma \varpi a}{\varpi'}$, où l'on peut prendre égal à 1 le volume ϖ' considéré d'éther, est la somme pure et simple des produits respectifs des volumes ϖ de toutes les molécules pondérables immergées dans cet éther, par leurs coefficients de résistance individuels a, variables seulement avec leur forme et leur orientation, peut-être aussi avec leurs dimensions absolues.

([1]) Les résultats de ce numéro et des numéros précédents ont fait l'objet de trois Notes, des 28 juillet, 4 et 11 août 1902, insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris (t. CXXXV, p. 220, 269 et 309). Les principes qui permettent de les obtenir avaient été posés dans un Mémoire de 1868 et un Article de 1872 compris parmi ceux qu'a rappelés la note de la page 267 ci-dessus.

CINQUIÈME PARTIE.

GÉNÉRALISATION DE CERTAINES THÉORIES PRÉCÉDENTES, POUR DES MILIEUX NON SYMÉTRIQUES.

---

54. **Aperçu sur les lois des ondes planes, dans un milieu qui serait dépourvu de plans de symétrie rectangulaires.** — Quoique les six coefficients indirects D, D′, E, E′, F, F′ de résistance paraissent être toujours égaux deux à deux, comme dans les fluides (p. 209), et que, par suite, tous les milieux doivent admettre à cet égard trois plans rectangulaires de symétrie de contexture, je crois pouvoir néanmoins, avant de passer à une approximation plus élevée du calcul des phénomènes, m'arrêter quelques instants aux lois qui régiraient les ondes planes, si l'on n'avait pas la triple égalité $D' = D$, $E' = E$, $F' = F$.

Les équations du mouvement seraient alors (17) (p. 276). Divisons-les par μ, adoptons les notations (19) et posons, de plus, pour abréger,

$$(163) \qquad \frac{\rho D}{\mu} = \mathrm{d}, \qquad \frac{\rho E}{\mu} = \mathrm{e}, \qquad \frac{\rho F}{\mu} = \mathrm{f}.$$

Elles deviendront

$$(164) \qquad \frac{1}{a^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} + \mathrm{f}\frac{d^2\eta}{dt^2} - \mathrm{e}\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Delta_2\xi - \frac{d\theta}{dx}, \qquad \cdots\cdot$$

Substituons-y les valeurs de ξ, η, ζ correspondant au système d'ondes planes, à vibrations rectilignement polarisées, défini par les formules (21), (22), (23) (p. 290). Soient, pour abréger,

$$(165) \qquad \left\{ \begin{array}{l} U = \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{\omega^2}, \qquad V = \dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{\omega^2}, \qquad W = \dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{\omega^2}, \\ \qquad\qquad P = \mathrm{d}\,l + \mathrm{e}\,m + \mathrm{f}\,n. \end{array} \right.$$

Les relations (24) (p. 291), où $l^2 + m^2 + n^2 = \frac{1}{\omega^2}$, se trouveront

remplacées par celles-ci :

$$(166)\quad \begin{cases} \mathrm{U}l' + \mathrm{f}m' - \mathrm{e}n' = -\ l(ll' + mm' + nn'), \\ -\mathrm{f}l' + \mathrm{V}m' + \mathrm{d}n' = -\ m(ll' + mm' + nn'), \\ \mathrm{e}l' - \mathrm{d}m' + \mathrm{W}n' = -\ n(ll' + mm' + nn'). \end{cases}$$

Résolvons-les par rapport à l', m', n', comme si les seconds membres étaient connus; et nous aurons, vu la dernière relation (165), pour déterminer les cosinus directeurs l', m', n' de la vibration, les trois rapports égaux

$$(167)\quad \frac{l'}{l\mathrm{VW} + \mathrm{Pd} - m.\mathrm{fW} + n.\mathrm{eV}} = \frac{m'}{m\mathrm{WU} + \ldots} = \frac{n'}{n\mathrm{UV} + \ldots}.$$

Les trois dénominateurs, substitués à l', m', n' dans les équations (166) homogènes en l', m', n', donnent, si l'on se rappelle encore la dernière (165), une équation unique en l, m, n, savoir, l'équation déterminant la vitesse de propagation ω des ondes en fonction des cosinus directeurs $\cos\alpha = l\omega$, $\cos\beta = m\omega$, $\cos\gamma = n\omega$ de leur normale :

$$(168)\quad l^2\mathrm{VW} + m^2\mathrm{WU} + n^2\mathrm{UV} + \mathrm{P}^2 + \mathrm{d}^2\mathrm{U} + \mathrm{e}^2\mathrm{V} + \mathrm{f}^2\mathrm{W} + \mathrm{UVW} = 0.$$

Écrivons ainsi le dernier terme du premier membre :

$$\mathrm{UVW}(l^2\omega^2 + m^2\omega^2 + n^2\omega^2);$$

et réduisons-le alors avec les trois premiers. Puis divisons par ω^2. Elle prendra la forme, un peu plus simple,

$$(169)\quad \frac{l^2}{a^2}\mathrm{VW} + \frac{m^2}{b^2}\mathrm{WU} + \frac{n^2}{c^2}\mathrm{UV} + \frac{\mathrm{P}^2 + d^2\mathrm{U} + \mathrm{e}^2\mathrm{V} + \mathrm{f}^2\mathrm{W}}{\omega^2} = 0.$$

On l'aurait obtenue aussi en se servant de l'équation (8) (p. 272), devenue ici

$$(170)\quad \begin{cases} \frac{1}{a^2}\frac{d\xi}{dx} + \frac{1}{b^2}\frac{d\eta}{dy} + \frac{1}{c^2}\frac{d\zeta}{dz} + \mathrm{d}\left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right) + \mathrm{e}\left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right) \\ \qquad + \mathrm{f}\left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right) = 0, \end{cases}$$

et, par suite,

$$(171)\quad \frac{ll'}{a^2} + \frac{mm'}{b^2} + \frac{nn'}{c^2} + \mathrm{d}(mn' - nm') + \mathrm{e}(nl' - ln') + \mathrm{f}(lm' - ml') = 0,$$

où l'on aurait substitué à l', m', n' les dénominateurs des rapports (167).

55. Équations approchées, pour les vitesses de propagation et pour la direction des vibrations. — Tous les milieux biréfringents sont, au point de vue optique, assez peu hétérotropes pour qu'on puisse y regarder U, V, W, d, e, f comme de petites quantités, ayant leurs carrés et produits négligeables devant leurs premières puissances. Les trois dernières parties du quatrième terme de (169) étant, dans ces conditions, du troisième ordre, peuvent être supprimées devant la première partie, en P^2, du second ordre; et il vient, à très peu près,

$$\frac{l^2}{a^2}VW + \frac{m^2}{b^2}WU + \frac{n^2}{c^2}UV + \frac{P^2}{\omega^2} = 0. \tag{172}$$

De plus, la direction (l', m', n') ne sera altérée que très peu, si nous substituons à l', m', n' trois autres cosinus directeurs l'_1, m'_1, n'_1, ayant leurs rapports déduits de (167) par des modifications propres à mettre en vue, en les rendant rigoureuses, certaines relations simples qui ne sont vérifiées qu'approximativement. Nous multiplierons à cet effet, dans (167), les différentes parties des trois dénominateurs par des facteurs tous peu différents de $\frac{1}{\omega^2}$, et qui, par exemple, dans le premier dénominateur, seront $\frac{1}{a^2}$ pour le premier terme, $\frac{1}{\omega^2}$ pour le second, $\frac{c}{ab\omega}$ pour le troisième, enfin, $\frac{b}{ac\omega}$ pour le quatrième. Altérons d'une manière analogue les deux autres dénominateurs, et, en même temps, laissant invariables les cosinus directeurs donnés $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$ ou $l\omega$, $m\omega$, $n\omega$ de la normale aux ondes, changeons la vitesse de propagation ω, de quantités du second ordre en d, e, f, de manière à lui faire vérifier exactement, au lieu de (169), l'équation simplifiée (172). Bref, nous aurons, pour définir la direction (l'_1, m'_1, n'_1), analogue à celle de désignation pareille au n° 14 (p. 292), les trois rapports égaux, avec ω donné par (172) :

$$\frac{l'_1}{\frac{l}{a^2}VW + \frac{P}{\omega^2}d - \frac{m.fc^2W - n.eb^2V}{abc\omega}} = \frac{m'_1}{\frac{m}{b^2}WU + \ldots} = \frac{n'_1}{\frac{n}{c^2}UV + \ldots}. \tag{173}$$

Ainsi modifiée quelque peu dans son orientation, la vibration est devenue rigoureusement transversale, de *quasi transversale* qu'elle était. Car, si l'on ajoute terme à terme les trois rapports (173), multipliés respectivement, *haut et bas*, par l, m, n, il vient le quatrième

rapport égal

$$\frac{ll'_1 + mm'_1 + nn'_1}{\frac{l^2}{a^2}\text{VW} + \frac{m^2}{b^2}\text{WU} + \frac{n^2}{c^2}\text{UV} + \frac{\text{P}^2}{\omega^2}}.$$

Or son dénominateur est nul en vertu de (172). Donc le numérateur l'est aussi; et la direction (l'_1, m'_1, n'_1) vérifie, comme au n° 14 (p. 293), la condition de perpendicularité sur la normale aux ondes.

En réalité, la direction (l', m', n') de la vibration fait, avec le plan de l'onde, un petit angle, appelé ε au n° 15 (p. 299), dont le sinus

$$l'\cos\alpha + m'\cos\beta + n'\cos\gamma \quad \text{ou} \quad \omega(ll' + mm' + nn')$$

s'obtiendra si l'on peut évaluer sensiblement le trinome

$$ll' + mm' + nn'.$$

Dans ce but, ou plutôt pour calculer directement $\sin\varepsilon$, appelons K la racine carrée de la somme des carrés des trois dénominateurs qui figurent dans (167). L'on aura

$$(174) \qquad l' = \frac{1}{\text{K}}(l\text{VW} + \text{P}\,\text{d} - m.\text{fW} + n.\text{eV}), \qquad m' = \ldots, \qquad n' = \ldots.$$

Multiplions ces équations par $l\omega$, $m\omega$, $n\omega$, et ajoutons. Il viendra, en utilisant finalement l'équation exacte (168),

$$(175) \qquad \sin\varepsilon = -\frac{\omega}{\text{K}}(\text{UVW} + \text{d}^2\text{U} + \text{e}^2\text{V} + \text{f}^2\text{W}).$$

Or, dans cette expression de $\sin\varepsilon$, la parenthèse est du troisième ordre de petitesse, comme ses quatre termes, tandis que K est seulement du second; en sorte que l'on pourra, sans erreur sensible sur ε, évaluer ω, dont K, U, V, W sont fonctions explicites, par l'équation seulement approchée (172).

56. Ellipsoïde dit (improprement) « d'élasticité », ou ellipsoïde inverse. — Formons, à un facteur constant près, l'expression

$$(176) \qquad a^2\text{U}\,l'^2_1 + b^2\text{V}\,m'^2_1 + c^2\text{W}\,n'^2_1,$$

en élevant au carré les dénominateurs des trois rapports (173) et multipliant respectivement par $a^2\text{U}$, $b^2\text{V}$, $c^2\text{W}$. Le premier des trois pro-

duits est

$$
(177)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{UVW}.\frac{l^2}{a^2}\mathrm{VW}+\frac{\mathrm{P}^2}{\omega^4}\cdot \mathrm{d}^2 a^2\mathrm{U}+\frac{a^2\mathrm{U}(m.\mathrm{f}c^2\mathrm{W}-n.\mathrm{e}b^2\mathrm{V})^2}{a^2b^2c^2\omega^2}\\
&\quad-\frac{2\mathrm{P}}{\omega^3 abc}\cdot \mathrm{d}a^2\mathrm{U}(m.\mathrm{f}c^2\mathrm{W}-n.\mathrm{e}b^2\mathrm{V})\\
&\quad-\frac{2\mathrm{UVW}}{abc\omega}\cdot l(m.\mathrm{f}c^2\mathrm{W}-n.\mathrm{e}b^2\mathrm{V})+2\frac{\mathrm{UVW}}{\omega^2}\mathrm{P}.\mathrm{d}l.
\end{aligned}\right.
$$

Ajoutons-y, terme à terme, les deux autres produits, analogues. La somme (séparée) soit des quatrièmes termes, soit des cinquièmes, sera nulle identiquement; et celle des sixièmes sera, vu la dernière relation (165), $2\dfrac{\mathrm{UVWP}^2}{\omega^2}$, tandis que celle des premiers vaudra, d'après (172), $-\dfrac{\mathrm{UVWP}^2}{\omega^2}$. Nous aurons donc en tout, abstraction faite d'un dénominateur commun ω^2,

$$
(178)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{P}^2\left[\frac{\mathrm{d}^2a^2\mathrm{U}+\mathrm{e}^2b^2\mathrm{V}+\mathrm{f}^2c^2\mathrm{W}}{\omega^2}+\mathrm{UVW}\right]\\
&\quad+\frac{1}{a^2b^2c^2}[a^2\mathrm{U}(m.\mathrm{f}c^2\mathrm{W}-n.\mathrm{e}b^2\mathrm{V})^2+\ldots].
\end{aligned}\right.
$$

Mettons, dans le trinome final entre crochets, le premier terme sous la forme

$$a^2b^2c^2\mathrm{UVW}\left(\frac{m}{b\sqrt{\mathrm{V}}}\cdot \mathrm{f}c\sqrt{\mathrm{W}}-\frac{n}{c\sqrt{\mathrm{W}}}\cdot \mathrm{e}b\sqrt{\mathrm{V}}\right)^2,$$

et joignons-y les deux termes analogues en observant que, si l'on pose

$$\alpha=\frac{l}{a\sqrt{\mathrm{U}}},\qquad \beta=\frac{m}{b\sqrt{\mathrm{V}}},\qquad \gamma=\frac{n}{c\sqrt{\mathrm{W}}},$$
$$\alpha'=\mathrm{d}a\sqrt{\mathrm{U}},\qquad \beta'=\mathrm{e}b\sqrt{\mathrm{V}},\qquad \gamma'=\mathrm{f}c\sqrt{\mathrm{W}},$$

il suffira d'appliquer l'identité classique

$$
\begin{aligned}
&(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2\\
&\quad=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2.
\end{aligned}
$$

Le trinome entre crochets vaudra donc, vu que $\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=\mathrm{P}$,

$$a^2b^2c^2\mathrm{UVW}\left[\left(\frac{l^2}{a^2\mathrm{U}}+\frac{m^2}{b^2\mathrm{V}}+\frac{n^2}{c^2\mathrm{W}}\right)(\mathrm{d}^2a^2\mathrm{U}+\mathrm{e}^2b^2\mathrm{V}+\mathrm{f}^2c^2\mathrm{W})-\mathrm{P}^2\right];$$

et l'expression (178), où se détruiront les deux termes en UVWP^2,

acquerra le facteur commun $d^2a^2U + e^2b^2V + f^2c^2W$, qui s'y trouvera multiplié par le premier membre, nul, de l'équation (172).

Ainsi, l'expression (176) s'annule; et, en y remplaçant U, V, W par leurs valeurs (165), elle donne

$$a^2 l_1'^2 + b^2 m_1'^2 + c^2 n_1'^2 = \omega^2. \tag{179}$$

Cela posé, à partir de l'origine, portons, dans le sens approché (l_1', m_1', n_1') de la vibration, une droite, égale à l'inverse de la vitesse ω de propagation, et dont nous appellerons X, Y, Z les projections sur les axes. Ces coordonnées de son extrémité seront évidemment

$$X = \frac{l_1'}{\omega}, \qquad Y = \frac{m_1'}{\omega}, \qquad Z = \frac{n_1'}{\omega}; \tag{180}$$

et il en résultera des valeurs de l_1', m_1', n_1' qui, portées dans (179), donneront

$$a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2 = 1. \tag{181}$$

Donc *l'ellipsoïde* exprimé par l'équation (181), *indépendant des coefficients* d, e, f *d'asymétrie, a ses demi-diamètres inverses de la vitesse* ω *de propagation des vibrations orientées* (*sensiblement*) *suivant leurs sens respectifs :* c'est l'ellipsoïde dit *d'élasticité*, ou *inverse*, de la théorie de la double réfraction ordinairement exposée dans les cours de Physique ([1]).

([1]) Il résultait, dans le cas simple de symétrie, des équations (30) (p. 292) qui donnent les trois produits $(\omega^2 - a^2)l_1'^2$, $(\omega^2 - b^2)m_1'^2$, $(\omega^2 - c^2)n_1'^2$ exactement proportionnels aux termes $\frac{\cos^2\alpha}{\omega^2 - a^2}$, $\frac{\cos^2\beta}{\omega^2 - b^2}$, $\frac{\cos^2\gamma}{\omega^2 - c^2}$, dont la somme est nulle en vertu de (29).

La seconde propriété capitale, dont jouit alors l'ellipsoïde, d'avoir les deux axes de son ellipse d'intersection par le plan d'une onde orientés suivant les deux vibrations possibles de celle-ci, résulte de ce que les mêmes relations (30) mettent la direction (l_1', m_1', n_1') du rayon de l'ellipsoïde et de cette ellipse suivant lequel se projette sur elle la vibration, dans le plan de la normale à l'ellipsoïde correspondante, qui a la direction (a^2l_1', b^2m_1', c^2n_1') et de la normale même au plan d'onde, à cosinus directeurs $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$. En effet, cette dernière direction est perpendiculaire à la normale aux deux autres, laquelle a ses cosinus directeurs proportionnels à

$$m_1'.c^2n_1' - n_1'.b^2m_1', \quad n_1'.a^2l_1' - l_1'.c^2n_1', \quad l_1'.b^2m_1' - m_1'.a^2l_1',$$

ou à

$$\frac{b^2 - c^2}{l_1'}, \quad \frac{c^2 - a^2}{m_1'}, \quad \frac{a^2 - b^2}{n_1'},$$

L'emploi d'un pareil ellipsoïde, ayant ses diamètres en relation simple avec la vitesse de propagation des vibrations de même sens dans des ondes planes, fournissait le moyen le plus naturel de passer, par voie d'induction ou de généralisation, du cas des cristaux uniaxes, anciennement traité par Huygens, à celui des cristaux biaxes; et c'est à peu près ainsi qu'ont été découvertes les lois générales de la double réfraction. Fresnel, en effet, déduisit d'abord une telle propriété représentative, pour les uniaxes, de la construction d'Huygens relative au rayon réfracté extraordinaire du spath, combinée avec l'hypothèse que l'inclinaison de la vibration sur l'axe déterminait la vitesse de propagation et avec les considérations de symétrie, aussi simples qu'ingénieuses, qui venaient de lui apprendre les directions respectives des vibrations, *supposées transversales*, des deux ondes, l'une, à vitesse constante, l'autre, à vitesse variable, ayant une inclinaison commune quelconque par rapport à l'axe : car de là résultait, pour un certain ellipsoïde *de révolution* déduit de celui d'Huygens, la double propriété de donner, par les deux axes de son ellipse d'intersection avec le plan d'une onde, les directions mêmes des deux vibrations possibles pour cette onde et leurs vitesses de propagation. Puis il eut l'inspiration géniale, dans le cas de cristaux moins symétriques, de rendre simplement *inégaux* ses trois axes, *tout en lui conservant les deux mêmes propriétés* [1]. Il est vrai qu'il supposait les diamètres directement et non pas inversement proportionnels aux vitesses de propagation; mais il se trouvait assez sur la voie pour qu'une rectification ultérieure lui permît bientôt d'atteindre complètement le but [2].

---

ou enfin, d'après (30), à

$$\frac{(b^2-c^2)(\omega^2-a^2)}{\cos\alpha}, \quad \frac{(c^2-a^2)(\omega^2-b^2)}{\cos\beta}, \quad \frac{(a^2-b^2)(\omega^2-c^2)}{\cos\gamma};$$

car les produits respectifs de ces expressions par $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$ ont visiblement la somme zéro. Donc le rayon à direction (l'_1, m'_1, n'_1) coupe bien normalement l'ellipse et en est un axe.

(1) *Œuvres complètes de Fresnel,* t. II, p. 261 : Premier Mémoire sur la double réfraction (19 novembre 1821); *voir* surtout p. 274 à 288.

(2) Cette rectification revenait à remplacer chaque ellipse diamétrale de l'ellipsoïde (181), resté malheureusement inconnu de lui, par la courbe du quatrième degré obtenue en inversant séparément tous ses rayons suivant leur propre direction; ce qui lui laisse ses axes de symétrie.

Alors les coordonnées que j'appellerai X, Y, Z, de la courbe en question, ou même de la surface propre à remplacer, quoique peu avantageusement, l'ellipsoïde inverse, sont $l'_1\omega$, $m'_1\omega$, $n'_1\omega$, avec $\omega=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$; et la relation (179),

La démonstration précédente montre que l'une des deux propriétés de l'ellipsoïde, celle de représenter les vitesses ω par l'inverse de ses demi-diamètres, subsiste encore quand la contexture du corps considéré a perdu toute symétrie. L'idée, qu'avait eue Fresnel, de faire dépendre *uniquement* de la direction de la vibration, dans chaque cristal, la vitesse de propagation des ondes planes, était donc non seulement vraie, mais plus générale qu'on ne l'aurait supposé.

Seule, l'autre propriété, celle qui concerne l'orientation des vibrations suivant les deux axes de l'ellipse d'intersection de l'ellipsoïde par le plan de l'onde, disparaît. Car on devra, pour avoir la direction approchée (l'_1, m'_1, n'_1) de la vibration, prendre, dans cette ellipse (supposée construite autour du centre de l'ellipsoïde), un des deux diamètres dont la moitié aura pour longueur l'inverse d'une racine ω de l'équation (172); or la grandeur de cette racine variera avec P, c'est-à-dire avec les coefficients d'asymétrie d, e, f.

---

multipliée par ω^2, donne, pour le lieu des points (X, Y, Z), la surface de Fresnel (dite à tort *surface d'élasticité*)

$$a^2X^2+b^2Y^2+c^2Z^2=(X^2+Y^2+Z^2)^2.$$

L'identité usuelle qui nous a conduit (p. 417) à la formule (179) prend, en y posant

$$\alpha=aX,\quad \beta=bY,\quad \gamma=cZ\quad \text{et}\quad \alpha'=\frac{X}{a},\quad \beta'=\frac{Y}{b},\quad \gamma'=\frac{Z}{c},$$

la forme

$$(a^2X^2+b^2Y^2+c^2Z^2)\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}\right)$$
$$=(X^2+Y^2+Z^2)^2+\left(\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right)^2Y^2Z^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right)^2Z^2X^2+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)^2X^2Y^2.$$

Comme, *ici, a, b, c* diffèrent peu, les trois derniers termes sont du second ordre de petitesse et négligeables. Donc l'identité, divisée par $a^2X^2+b^2Y^2+c^2Z^2$, devient sensiblement

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=\frac{(X^2+Y^2+Z^2)^2}{a^2X^2+b^2Y^2+c^2Z^2}.$$

Or la surface précédente de Fresnel est, par son équation même, le lieu des points où notre second membre se réduit à 1. On peut donc la confondre avec l'ellipsoïde

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1.$$

C'est celui-là que Fresnel avait d'abord considéré. Il mérite de rester dans l'Histoire de la Science; car il a eu effectivement le rôle, qu'aurait mieux rempli l'ellipsoïde inverse, de *moyen de généralisation* ou d'*instrument de découverte*, pour passer des uniaxes aux biaxes. La notion, pourtant simple, de l'ellipsoïde inverse (181) n'est venue qu'un peu plus tard.

On peut, dès à présent, reconnaître sans calcul que, dans le plan d'onde diamétral donné, les deux vibrations possibles feront, chacune avec l'axe de l'ellipse qui en sera le plus voisin pour la direction, deux angles sensiblement égaux. Car la forme de l'équation (172), où U, V, W, P sont définis par (165), et qui est ainsi homogène en *l*, *m*, *n*, montre que, pour les rapports mutuels de *l*, *m*, *n*, P correspondant au plan d'onde donné, le terme du premier degré, *seul,* contient P, dans l'équation du second degré en $\frac{1}{\omega^2}$. Donc le produit des deux racines $\frac{1}{\omega_1^2}$, $\frac{1}{\omega_2^2}$ est indépendant de P, c'est-à-dire des coefficients d'asymétrie d, e, f; et ce produit garde sa valeur relative au cas où, d, e, f s'évanouissant, les racines sont précisément les carrés des demi-axes de l'ellipse. Ainsi, les carrés des deux rayons suivant lesquels se font les vibrations ont pour produit le produit même des carrés des demi-axes; ou, encore, les carrés des inverses de ces rayons ont même moyenne proportionnelle que les carrés des inverses des demi-axes. Mais nos ellipses étant, par hypothèse, de faible excentricité, cette moyenne géométrique ne diffère pas sensiblement de la moyenne arithmétique correspondante; et l'on peut dire que les carrés des inverses des demi-diamètres considérés ont même somme que les carrés des inverses des demi-axes. Or on sait que, dans une ellipse, ce sont les demi-diamètres également inclinés sur les deux axes respectifs qui jouissent de cette propriété.

A chaque racine de l'équation (172) il correspondra, de part et d'autre de l'axe voisin, deux diamètres différents de l'ellipse, quoique un seul des deux satisfasse aux proportions (173) ou donne la direction cherchée de la vibration. La raison de cette ambiguïté est dans le fait que l'équation (172) en ω contient d, e, f (dans P^2) au second degré : ainsi les vitesses de propagation sont communes au milieu proposé et à celui qui n'en diffère que par les signes de d, e, f. Donc notre construction était tenue de fournir à la fois les directions des vibrations pour ces deux milieux ([1]); et elle resterait incomplète, si nous ne trouvions pas quelque moyen de discerner le diamètre convenant à chaque milieu pour la direction de ses vibrations. A cet effet, nous considérerons ce que nous pouvons appeler l'*axe d'asymétrie* du milieu.

([1]) On remarquera l'analogie de ces milieux avec ceux qui seraient inverses l'un de l'autre, ou à ellipsoïdes communs, dans la théorie de la conductibilité (t. I, p. 147).



57. Axe d'asymétrie : obliquité mutuelle des deux plans de polarisation. — Cet axe sera la droite ayant pour projections sur les axes coordonnés les trois coefficients d'asymétrie d, e, f; nous appellerons ν sa longueur et φ l'angle, aigu ou obtus, que fera avec elle la normale aux ondes données. Nous aurons donc

$$(182) \qquad \nu = \sqrt{\mathrm{d}^2 + \mathrm{e}^2 + \mathrm{f}^2}, \qquad \mathrm{P} = \frac{\nu \cos\varphi}{\omega}.$$

Si la longueur ν de l'axe d'asymétrie est assez petite, les deux racines $\frac{1}{\omega^2}$ de l'équation (172) seront réelles et positives. Car, à part le cas tout exceptionnel de perpendicularité de la normale aux ondes sur l'une des deux sections diamétrales circulaires de l'ellipsoïde, ces racines sont positives et *inégales* dans les milieux symétriques, ou quand $\nu = 0$. Or il est clair qu'une légère variation du coefficient de $\frac{1}{\omega^2}$ dans le premier membre de l'équation, au moment où ν cesse d'être nul, n'empêchera pas ce premier membre de changer de signe, pour une valeur de $\frac{1}{\omega^2}$ voisine de chacune des deux précédentes qui l'en faisaient changer à la limite $\nu = 0$.

Nous supposerons, pour fixer les idées, les axes des x, y, z choisis de telle manière que, d'une part, on ait $a > b > c$, et que, d'autre part, un observateur ayant les pieds à l'origine, la tête du côté des y positifs, enfin l'angle des zx positifs devant lui, voie à sa gauche l'axe des z, à sa droite l'axe des x.

Imaginons d'abord que l'axe ν d'asymétrie ait la direction des y positifs, ou que $\mathrm{d} = 0$, $\mathrm{e} = \nu$, $\mathrm{f} = 0$, et que, de plus, l'angle φ soit très petit, ou que l'on ait sensiblement, à des écarts négligeables près du second ordre, $\mathrm{P} = \frac{\nu}{\omega}$, $m = \frac{1}{\omega}$, l et n étant du premier ordre de petitesse. L'ellipse d'intersection de l'ellipsoïde par le plan de l'onde se confondra donc, presque, avec la section principale ayant respectivement pour demi-petit axe et pour demi-grand axe, suivant les x et les z positifs, les deux inverses de a et de c. Dans ces conditions, le premier et le troisième des rapports (173) donneront, en divisant par V les deux dénominateurs,

$$(183) \quad \left\{ \frac{l'_1}{\frac{l}{a^2}\mathrm{W} + \frac{n}{ac}\frac{\nu b}{\omega}} = \frac{n'_1}{\frac{n}{c^2}\mathrm{U} - \frac{l}{ac}\frac{\nu b}{\omega}}, \quad \text{ou} \quad -\frac{n'_1}{l'_1} = \frac{a}{c}\,\frac{\frac{l}{a}\frac{\nu b}{\omega} + \frac{n}{c}(-\mathrm{U})}{\frac{l}{a}\mathrm{W} + \frac{n}{c}\frac{\nu b}{\omega}}. \right.$$

Or l'équation (172), alors réduite à $\frac{WU}{b^2} + \frac{\nu^2}{\omega^2} = 0$, revient à dire que, dans la dernière fraction figurant à ces formules (183), le rapport de $\frac{\nu b}{\omega}$ à W égale celui de $-$U à $\frac{\nu b}{\omega}$. Donc la dernière formule (183) devient

$$(184) \qquad \frac{n'_1}{l'_1} = -\frac{a}{c}\frac{\nu b}{\omega W}.$$

Mais W, d'après son expression (165), est positif; car nul rayon $\frac{1}{\omega}$ de l'ellipsoïde n'excède la valeur $\frac{1}{c}$ du demi-grand axe. Par conséquent, la tangente $\frac{n'_1}{l'_1}$ de l'angle fait avec les x positifs par la direction de la vibration sera négative; et la vibration se trouvera dans l'un des deux angles où les x et les z ont signes contraires. Les deux secteurs correspondants de l'ellipse d'intersection, compris entre les axes, ont à gauche le petit axe et à droite le grand axe, par rapport à l'observateur ayant les pieds à l'origine, la tête sur l'axe d'asymétrie et regardant devant lui la vibration se faire.

Le résultat serait le même, si la normale aux ondes coïncidait avec les y négatifs, ou que l'on eût $\varphi = \pi$ et non $\varphi = 0$; car les renversements de signe simultanés de l, m, n et (par suite) de P ne changent rien à U, V, W, ni à ω (pris en valeur absolue dans les formules actuelles), ni, enfin, à la double proportion (173) définissant la direction de la vibration.

Imaginons maintenant, d'une part, que l'axe ν d'asymétrie, tournant autour de l'origine, quitte le sens des y positifs, pour arriver avec continuité à toute autre orientation, et en variant au besoin de longueur afin de se maintenir dans la limite de réalité des racines ω; d'autre part, que la normale au plan des ondes, sans cesser de faire avec cet axe des angles φ ou aigus ou obtus (suivant que φ doit être finalement l'un ou l'autre), tourne aussi à volonté, mais en évitant durant ses rotations de coïncider avec les perpendiculaires aux deux sections circulaires de l'ellipsoïde. Dans ces conditions, les axes de l'ellipse d'intersection resteront inégaux et, la valeur (182) de P ne s'annulant jamais, les deux directions (l'_1, m'_1, n'_1) se tiendront à des distances angulaires sensibles des deux bords du secteur elliptique droit, ou quart de l'ellipse variable, qui les comprenait au début. Or, vu la continuité des dénominateurs dans les rapports (173), elles ne pourront à aucun moment sauter brusquement de ce secteur dans

un autre. Donc, *l'observateur dirigé suivant l'axe d'asymétrie, et qui s'orientera de manière à avoir devant lui un secteur de l'ellipse d'intersection limité à gauche par le petit axe de l'ellipse et à droite par le grand axe, verra les deux vibrations possibles se faire dans l'intérieur de ce secteur ou de celui qui lui est directement opposé.*

Les deux autres secteurs, inutilisés, serviraient à leur tour, si l'on changeait simplement les signes de d, e, f, ou qu'on renversât le sens de l'axe ν d'asymétrie. Car l'observateur, obligé de prendre une direction opposée à la première, aurait sa droite et sa gauche échangées par ce retournement, s'il se plaçait d'abord symétriquement à sa précédente position : il devrait donc faire ensuite sur lui-même un quart de tour, pour se mettre en face d'un secteur délaissé d'abord et symétrique des premiers ou ayant son grand et son petit côté disposés autrement.

En résumé, quand l'asymétrie, d'abord nulle, s'accroît, les deux vibrations, considérées sur l'ellipse d'intersection de l'ellipsoïde et d'un plan d'onde donné quelconque, commencent par coïncider avec les deux axes, et, gardant sensiblement leur symétrie de part et d'autre des bissectrices des angles de ces axes, agrandissent ou réduisent leur angle propre suivant que d, e, f, supposés conserver leurs rapports mutuels, s'éloignent de zéro dans un sens ou dans le sens contraire. Et cela a lieu jusqu'à ce que la valeur absolue de ν atteigne la limite qui amène les deux vibrations à se confondre sur les bissectrices en question, ou au delà de laquelle les deux vitesses de propagation, devenues égales, seraient imaginaires.

Les deux vibrations que peut propager une onde cessent donc d'être mutuellement rectangulaires, dès qu'il y a asymétrie.

58. **Conditions de transparence.** — Il nous reste à fixer les limites entre lesquelles d, e, f devront être compris, pour que les vitesses de propagation ω soient *constamment* réelles et correspondent ainsi à des mouvements transmissibles au loin ou *non évanescents,* c'est-à-dire pour que le milieu soit, à l'égard d'ondes planes *de toute direction, transparent* sous des épaisseurs *sensibles,* qui comprennent toujours un grand nombre de longueurs d'ondulation.

Les racines, dans ces conditions, seront réelles, même pour les ondes parallèles soit à l'une, soit à l'autre des deux sections circulaires de l'ellipsoïde. Or les valeurs qu'ont alors l, m, n dans (172) sont celles qui, rendant égaux les deux axes de l'ellipse d'intersection ou égales les deux racines ω^2 que possède cette équation du second

degré (172) quand P y est pris nul, transforment l'ensemble de ses trois premiers termes en un carré parfait, affecté d'un coefficient évidemment positif. Donc le premier membre de (172), y compris son quatrième terme, qui est également un carré, ne peut devenir égal au second membre, zéro, pour des valeurs réelles de ω, que si l'on a alors $P = 0$, ou $\cos\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. L'axe d'asymétrie doit donc être perpendiculaire sur les deux normales aux sections circulaires et, par suite, sur leur plan, qui est celui des zx. En d'autres termes, on devra avoir $d = 0$, $f = 0$; et *l'axe d'asymétrie coïncidera, en direction, avec l'axe moyen de l'ellipsoïde.*

Dès lors, si l'on choisit convenablement les noms et les sens des coordonnées positives, on pourra poser aussi $e = \nu$, $\varphi = \beta$, sans cesser d'avoir $a > b > c$.

L'équation (172) ordonnée par rapport à ω^2, après substitution à l, m, n de $\frac{\cos(\alpha, \beta, \gamma)}{\omega}$ et à U, V, W, P des expressions (165), sera

$$(185)\quad \left\{ \begin{aligned} &\omega^4 - [(b^2 + c^2)\cos^2\alpha + (c^2 + a^2)\cos^2\beta \\ &\qquad + (a^2 + b^2)\cos^2\gamma - \nu^2 a^2 b^2 c^2 \cos^2\beta]\,\omega^2 \\ &\qquad + (b^2 c^2 \cos^2\alpha + c^2 a^2 \cos^2\beta + a^2 b^2 \cos^2\gamma) = 0. \end{aligned} \right.$$

Le troisième terme, produit des deux racines ω^2, étant essentiellement positif, les deux racines ω^2 sont de même signe. D'ailleurs elles ne peuvent être que positives, si elles sont réelles; car leur somme, coefficient de $-\omega^2$ dans le second terme, est voisine de sa valeur (somme de carrés) pour $\nu = 0$, vu que sa dernière partie,

$$-\nu^2 a^2 b^2 c^2 \cos^2\beta,$$

se trouve, à cause du facteur ν^2, beaucoup plus petite que les parties précédentes [1]. Ainsi, les conditions de réalité, pour ω, sont les mêmes que pour ω^2.

Or il vient, en résolvant et négligeant dans $2\omega^2$ un terme

$$-\nu^2 a^2 b^2 c^2 \cos^2\beta,$$

qui est du second ordre :

$$(186)\quad 2\omega^2 = (b^2 + c^2)\cos^2\alpha + (c^2 + a^2)\cos^2\beta + (a^2 + b^2)\cos^2\gamma \pm R,$$

[1] On remarquera que cette petite partie, négative, est sensiblement le produit de la somme tout entière, peu différente de $2b^2$ (ou de $2a^2$, ou de $2c^2$), par $-\frac{1}{2}\nu^2 a^2 c^2 \cos^2\beta$, ou par $-\frac{1}{2}\nu^2 a^2 c^2 \cos^2\varphi$. L'effet de l'asymétrie sur la grandeur des deux racines ω^2 est donc, sans changer leur produit, de réduire leur somme de la petite fraction $\frac{1}{2}\nu^2 a^2 c^2 \cos^2\varphi$ de sa valeur, fraction variable seulement avec l'angle φ de la normale aux ondes et de l'axe d'asymétrie.

où R^2 désigne l'excédent du carré du quadrinome entre crochets, dans (185), sur quatre fois le troisième terme, entre parenthèses. Mais le carré du quadrinome est très sensiblement

$$(187)\quad \left\{\begin{aligned} &[(b^2+c^2)\cos^2\alpha+(c^2+a^2)\cos^2\beta+(a^2+b^2)\cos^2\gamma]^2 \\ &\quad -2v^2a^2b^2c^2[(b^2+c^2)\cos^2\alpha \\ &\qquad\qquad +(c^2+a^2)\cos^2\beta+(a^2+b^2)\cos^2\gamma]\cos^2\beta. \end{aligned}\right.$$

Éliminons-en $\cos^2\beta$, dans le carré entre crochets, par la substitution de $1-\cos^2\alpha-\cos^2\gamma$. De plus, appelons θ l'angle aigu que font avec les x positifs les deux normales aux sections circulaires, angle donnant, pour éliminer les deux différences a^2-b^2 et b^2-c^2, les formules

$$(188)\qquad a^2-b^2=(a^2-c^2)\cos^2\theta,\qquad b^2-c^2=(a^2-c^2)\sin^2\theta.$$

Et désignons enfin par U' et U'' les deux angles de la direction $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ normale aux ondes, avec les deux directions $(\cos\theta, 0, \sin\theta)$, $(\cos\theta, 0, -\sin\theta)$ des normales aux sections circulaires; ce qui donne

$$(189)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos U'=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\cos\gamma, \\ &\cos U''=\cos\theta\cos\alpha-\sin\theta\cos\gamma, \\ &\cos^2 U'+\cos^2 U''=2(\cos^2\theta\cos^2\alpha+\sin^2\theta\cos^2\gamma), \\ &\cos U'\cos U''=\cos^2\theta\cos^2\alpha-\sin^2\theta\cos^2\gamma. \end{aligned}\right.$$

L'expression (187), en y observant d'ailleurs que, dans le *petit* terme (en v^2), le facteur entre crochets et le facteur $2b^2$ équivalent, chacun, à a^2+c^2, devient

$$(190)\quad \left\{\begin{aligned} &[(a^2+c^2)-(a^2-c^2)(\cos^2\theta\cos^2\alpha-\sin^2\theta\cos^2\gamma)]^2 \\ &\quad -v^2a^2c^2(a^2+c^2)^2\cos^2\beta, \end{aligned}\right.$$

tandis que le troisième terme, tout connu, de (185), prend la forme

$$(191)\qquad a^2c^2-(a^2-c^2)(c^2\cos^2\theta\cos^2\alpha-a^2\sin^2\theta\cos^2\gamma).$$

Multiplions celui-ci par 4 et retranchons-le de (190). Nous aurons d'abord partout, sauf dans le terme en v^2, un premier facteur a^2-c^2 commun, et puis même un second, grâce aux derniers termes, en c^2 et a^2, de (191). Il vient alors, vu les deux dernières formules (189),

$$(192)\quad \left\{\begin{aligned} R^2&=(a^2-c^2)^2(1-\cos^2 U'-\cos^2 U''+\cos^2 U'\cos^2 U'') \\ &\qquad -v^2a^2c^2(a^2+c^2)^2\cos^2\beta \\ &=(a^2-c^2)^2\sin^2 U'\sin^2 U''-v^2a^2c^2(a^2+c^2)^2\cos^2\beta. \end{aligned}\right.$$

Le produit $(a^2-c^2)^2\sin^2 U'\sin^2 U''$ se décompose en une somme de

deux carrés pouvant s'annuler séparément, et dont l'un, proportionnel à $1 - \cos^2\alpha - \cos^2\gamma$, c'est-à-dire à $\cos^2\beta$, est susceptible de se réduire avec le terme en ν^2. Cette décomposition s'effectue par l'identité

$$(193)\quad \left\{ \begin{aligned} &1 - \cos^2 U' - \cos^2 U'' + \cos^2 U' \cos^2 U'' \\ &\quad = (\cos 2\theta - \cos U' \cos U'')^2 + \sin^2 2\theta\,(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\gamma) : \end{aligned} \right.$$

on la vérifie en développant, effectuant d'abord les réductions évidentes, puis recourant, pour les réductions plus cachées, aux deux dernières formules (189). Or, si, considérant le trièdre qui a pour faces respectives l'angle 2θ des deux normales aux sections circulaires et les deux angles U', U'' de ces normales avec la normale aux ondes, on appelle Φ le dièdre des deux dernières faces U' et U'', la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique donnera

$$\cos 2\theta = \cos U' \cos U'' + \sin U' \sin U'' \cos \Phi ;$$

ce qui change l'identité (193) en celle-ci :

$$(194)\qquad \sin^2 U' \sin^2 U'' = \sin^2 U' \sin^2 U'' \cos^2\Phi + \sin^2 2\theta \cos^2\beta .$$

Et l'expression (192) devient enfin

$$(195)\quad \left\{ \begin{aligned} R^2 &= (a^2 - c^2)^2 \sin^2 U' \sin^2 U'' \cos^2\Phi \\ &\quad + [(a^2 - c^2)^2 \sin^2 2\theta - \nu^2 a^2 c^2 (a^2 + c^2)^2] \cos^2\beta . \end{aligned} \right.$$

Le premier carré figurant au second membre s'annule, sans que le dernier terme en fasse autant, quand Φ est droit ; ce qui arrive une fois dans chaque demi-rotation de la normale à l'onde autour de la normale à une section circulaire, d'un même côté du plan des zx, du moins lorsque l'angle U ou U', constant dans ce mouvement, est inférieur à 2θ ; car Φ y varie visiblement entre les deux limites zéro et π. Comme alors le dernier terme, en $\cos^2\beta$, seul subsistant, ne doit pas être négatif, une condition nécessaire de réalité sera

$$(196)\qquad \nu a c < \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \sin 2\theta .$$

Cette condition suffira d'ailleurs pour que R et ω soient réels ; car, dès qu'elle est vérifiée, l'expression (195) de R^2, somme de deux carrés, ne peut plus devenir négative.

Lorsque $\nu a c$ atteint sa grandeur maxima $\frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \sin 2\theta$, l'expression de R est, quant à la valeur absolue,

$$(a^2 - c^2) \sin U' \sin U'' \cos\Phi, \quad \text{ou} \quad (a^2 - c^2)(\cos 2\theta - \cos U' \cos U'') ;$$

et la formule (186), où l'on peut remplacer b^2+c^2, a^2+b^2 par $(a^2+c^2)-(a^2-b^2)$, $(a^2+c^2)+(b^2-c^2)$, puis éliminer a^2-b^2, b^2-c^2 par (188), enfin appliquer la quatrième formule (189), montre que l'une des deux racines ω^2 est la moitié de l'expression constante

$$(a^2+c^2)-(a^2-c^2)\cos 2\theta,$$

ou se réduit, vu (188), à b^2.

Mais, même alors, les deux racines ne deviennent égales, ou R ne s'annule, que pour $\Phi=\frac{\pi}{2}$ (ce qui comprend à la limite les deux cas $\sin U'=0$, $\sin U''=0$) : c'est donc seulement pour les ondes planes correspondantes que les deux vibrations arrivent à se confondre, ou à bissecter sensiblement les angles des deux axes de l'ellipse d'intersection de l'ellipsoïde par le plan de l'onde (quand on demande ainsi au milieu la transparence à l'égard d'ondes planes de direction quelconque).

59. **Impossibilité de l'asymétrie dans tous ou presque tous les cristaux transparents des cinq premiers systèmes cristallins.** — Les cristaux des cinq premiers systèmes cristallins ont un de leurs axes minéralogiques perpendiculaire au plan des autres; et ils coïncident avec eux-mêmes quand on les fait tourner, autour de cet axe *principal,* d'un angle sous-multiple de quatre droits. Donc, leurs propriétés optiques se trouvant, à une première approximation, entièrement définies par leur ellipsoïde inverse, que nous imaginerons décrit autour d'un point de l'axe principal, et par leur axe d'asymétrie, la même rotation, dans laquelle ils entraîneront l'ellipsoïde et l'axe d'asymétrie, devra amener ceux-ci en coïncidence avec eux-mêmes. Or l'axe d'asymétrie, en particulier, ne pourra, dans une rotation de moins d'une circonférence, se retrouver en coïncidence avec lui-même que s'il est situé sur l'axe de la rotation; et, pareillement, l'ellipsoïde ne pourra être superposé à sa position première que s'il a tourné autour d'un de ses trois axes. Donc l'axe minéralogique principal doit être, tout à la fois, l'axe d'asymétrie et l'un des axes de l'ellipsoïde.

Or, dans les trois premiers systèmes cristallins (dont le troisième comprend le prisme droit à base hexagonale régulière et le rhomboèdre), la rotation qui superpose ainsi le cristal à lui-même est ou d'un quart, ou d'un sixième, ou d'un tiers de circonférence, bref, inférieure à deux droits; et l'ellipsoïde ne peut s'y remettre en

coïncidence avec sa première position que s'il est de révolution autour de l'axe principal. Mais, alors, un des deux axes égaux perpendiculaires à l'axe principal est forcément l'*axe moyen*, suivant lequel doit se trouver dirigé l'axe d'asymétrie, si le cristal est transparent pour des ondes planes de toute orientation. Donc cet axe d'asymétrie, obligé également d'être sur l'axe principal, se réduit au centre même de l'ellipsoïde; et sa longueur ν est nulle.

Dans le quatrième système, où il y a trois axes rectangulaires inégaux, chacun est principal, pour une rotation d'une demi-circonférence; et l'axe d'asymétrie, tenu, par suite, de se trouver sur les trois à la fois, est également sans longueur; ce qui donne encore $\nu = 0$.

Enfin, dans le cinquième système cristallin, où un seul axe est principal (encore pour une rotation de deux droits), il suffit que le cristal ait un centre pour que le plan mené par ce centre normalement à l'axe soit un plan de symétrie du cristal; en sorte que l'axe d'asymétrie ne peut, alors, pas plus se trouver d'un côté de ce plan que de l'autre. Comme il doit cependant être orienté suivant l'axe principal, on aura encore $\nu = 0$.

Ainsi le sixième système cristallin, ou système triplement oblique, serait à peu près le seul qui pût admettre des cristaux transparents possédant l'asymétrie optique, s'il existait des corps susceptibles d'offrir cette asymétrie (au point de vue de l'inégalité des six coefficients indirects de résistance D et D′, E et E′, F et F′, considérés deux à deux). On ne peut sans doute pas dire encore que la chose soit impossible.

SIXIÈME PARTIE.

DISPERSION.

60. **Introduction de petits termes proportionnels aux déplacements vibratoires, dans les équations de mouvement de l'éther d'un corps.** — Ayant terminé notre étude de première approximation des phénomènes lumineux, essayons maintenant de comprendre dans nos calculs des particularités plus délicates. Et, d'abord, occupons-nous d'une circonstance assez facile à formuler, qui se manifeste principalement dans les radiations dont les périodes sont les moins courtes, ou les ondulations relativement longues, c'est-à-dire dans les radiations purement calorifiques ou *infra-rouges*.

Nous n'avons tenu compte d'aucune autre action des molécules pondérables sur l'éther, que la résistance exercée séparément, pour ainsi dire au contact, par chacune d'elles sur le fluide qui la contourne pour vibrer. Or nous concevons cette résistance comme composée d'actions élémentaires analogues à celles qui prédominent dans les forces élastiques propres de l'éther, c'est-à-dire exercées à des distances moindres que l'intervalle de deux molécules pondérables. Il reste, en dehors d'elles, les actions exercées, entre les deux espèces de matière, aux distances comprenant un ou plusieurs intervalles moléculaires du corps, savoir, celles qui sont analogues aux actions mêmes constituant l'élasticité du corps. Il y a donc lieu de voir si ces sortes d'actions ne pourraient pas avoir un effet sensible sur l'éther vibrant.

Leur nombre, dans un agrégat moléculaire ou atomique quelconque, entre unités de volume les exerçant et les subissant à une certaine distance, est proportionnel au produit de la densité de la matière qui les exerce par la densité de la matière qui les subit. Par exemple, dans un corps pondérable de densité ρ', éprouvant une déformation élastique déterminée, il sera proportionnel, en moyenne, au carré ρ'^2, s'il s'agit d'évaluer la pression exercée à travers un élément plan donné. Mais, pour les mêmes déformations, des actions élémentaires exactement pareilles, exercées entre volumes d'éther, constitueraient, à travers le même élément plan, des composantes en nombre moindre, dans le rapport de ρ'^2 à ρ^2, et donneraient une résultante réduite dans

le même rapport. Si donc μ' désigne, pour le corps pondérable, le coefficient d'élasticité dont le produit par la déformation égalera la pression résultante, les mêmes actions élémentaires, dans l'éther, n'apporteraient au coefficient analogue, μ par exemple, de celui-ci que l'accroissement absolu $\mu'\frac{\rho^2}{\rho'^2}$, et l'accroissement relatif $\frac{\mu'}{\mu}\frac{\rho^2}{\rho'^2}$.

Il suit de là que les actions exercées aux distances dont il s'agit sont complètement négligeables dans l'éther libre, par rapport aux actions exercées aux distances moindres et produisant déjà le coefficient d'élasticité μ. Car, soit ω la vitesse de la lumière dans l'éther libre, et ω' la vitesse du son dans un corps qu'on lui compare. D'une part, on aura $\mu = \omega^2\rho$ et, d'autre part, μ' sera comparable à $\omega'^2\rho'$. Donc l'accroissement relatif de μ dû aux actions considérées, savoir une quantité de l'ordre de $\frac{\mu'}{\mu}\frac{\rho^2}{\rho'^2}$, se trouvera comparable au produit $\left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2\frac{\rho}{\rho'}$, infiniment petit, pour ainsi dire, par chacun de ses trois facteurs $\frac{\omega'}{\omega}$, $\frac{\omega'}{\omega}$, $\frac{\rho}{\rho'}$. Ainsi, dans l'éther, il n'y a nullement lieu de mettre en compte les actions intérieures exercées aux distances qui sont de l'ordre des intervalles moléculaires des corps.

Mais que donneront, sur un petit volume de l'éther d'un corps, celles d'entre ces sortes d'actions qui y sont exercées, à travers un élément plan, par la matière pondérable située au delà de l'élément, jusqu'aux distances où elles deviennent insensibles? Raisonnons d'abord comme si la matière pondérable suivait l'éther dans ses vibrations lumineuses, ou que les deux espèces de matière éprouvassent en commun leurs déformations. Alors, les nombres de ces actions à travers l'élément plan étant proportionnels, entre unités de volume, au produit $\rho'\rho$ des deux densités de la matière les exerçant et de la matière les subissant, elles apporteraient à μ un accroissement absolu de l'ordre de $\mu'\frac{\rho'\rho}{\rho'^2} = \mu'\frac{\rho}{\rho'}$, ou un accroissement relatif de l'ordre de $\frac{\mu'}{\mu}\frac{\rho}{\rho'}$, comparable à $\frac{\omega'^2}{\omega^2}$. Et l'on voit que cet accroissement serait encore négligeable, quoique incomparablement moins petit qu'il n'était dans le cas de l'éther libre.

Seulement, nous savons que les molécules pondérables, infiniment plus massives que l'éther environnant, oscillent à peine sous l'impulsion de celui-ci, tout en prenant une fraction notable de sa quantité de mouvement; en sorte que leurs déplacements, lors du passage des

ondes lumineuses ou calorifiques, ne sont presque rien à côté des déplacements périodiques ξ, η, ζ de l'éther. De là, entre chaque atome éthéré et les molécules pondérables, assez nombreuses, qui exercent sur lui les actions dont il s'agit ici, des variations de distance et, par suite, de répulsion ou d'attraction, incomparablement plus fortes que celles auxquelles donneraient naissance de simples déformations, continues, *communes* aux deux espèces de matière. Et c'est ainsi que passe à un ordre de grandeur plus élevé, au point de pouvoir devenir sensible, l'action totale exercée sur chaque atome d'éther par les molécules pondérables environnantes, mais qui cependant ne le *touchent* pas, c'est-à-dire en sont à des distances plus grandes que le rayon d'activité des actions atomiques ([1]).

D'ailleurs, à très peu près, cette petite force ne variera, pour un même atome, qu'avec les trois composantes actuelles ξ, η, ζ de *son déplacement* vibratoire, puisque *celui-ci définit à lui seul,* très sensiblement, *le changement de configuration* survenu, à partir de l'état d'équilibre, *dans le système de l'atome éthéré* (*ou même de tout l'éther ambiant*) *et de l'ensemble des molécules.* Chacune de ses composantes sera naturellement une fonction *linéaire* de ξ, η, ζ, quand les déplacements de l'éther resteront assez petits.

61. L'effet de ces termes est d'ajouter, aux coefficients de résistance, et aux puissances réfractives, de petites parties proportionnelles au carré de la période. — Appelons M_x, M_y, M_z les trois composantes totales, fonctions linéaires de ξ, η, ζ, des actions exercées ainsi, à des distances relativement grandes, sur l'unité de masse d'une particule d'éther, par l'ensemble des molécules pondérables ([2]). Comme elles résultent d'actions élémentaires, fonctions des distances de la particule aux points *fixes* d'où elles émanent (puisque la matière pondérable reste très sensiblement immobile dans le mouvement lumineux), ces forces admettront un *potentiel,* ou seront les trois dérivées respectives d'une même fonction par rapport aux parties variables ξ, η, ζ des coordonnées de la particule. Donc les coefficients de ζ dans M_y.

([1]) De même, le flux de chaleur traversant la surface libre d'un corps athermane, et qui serait comme infiniment petit si la température variait *avec continuité* du corps à l'éther extérieur, est rendu sensible, comparable aux flux ordinaires de conductibilité entre corps en contact, par le fait d'un *saut* fini de température à la sortie (comme on voit au t. I, p. 173).

([2]) Je les désigne par la lettre M, pour rappeler justement qu'elles proviennent d'actions moléculaires, c'est-à-dire exercées aux distances comprenant un ou plusieurs intervalles moléculaires.

et de η dans M_z, de ξ dans M_z et de ζ dans M_x, de η dans M_x et de ξ dans M_y, seront respectivement égaux. Et l'on aura des expressions de la forme

$$(197) \quad M_x = -a\xi - f\eta - e\zeta, \quad M_y = -f\xi - b\eta - d\zeta, \quad M_z = -e\xi - d\eta - c\zeta.$$

La mise en compte de ces actions, qui vaudront ρM_x, ρM_y, ρM_z par unité de volume, se fera en ajoutant ρM_x, ρM_y, ρM_z aux seconds membres des équations (6) du mouvement (p. 272), où nous admettons, comme on sait, que $D' = D$, $E' = E$, $F' = F$.

Mais bornons-nous à l'étude des radiations simples, c'est-à-dire des mouvements devenus *pendulaires,* où chaque déplacement ξ, η, ζ est sensiblement de la forme $P \cos kt + Q \sin kt$, avec P, Q fonctions de x, y, z. Alors on a identiquement

$$\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} = -k^2(\xi, \eta, \zeta),$$

ou

$$\xi = -\frac{1}{k^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}, \qquad \eta = -\frac{1}{k^2}\frac{d^2\eta}{dt^2}, \qquad \zeta = -\frac{1}{k^2}\frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

Par suite, les nouveaux termes triples ρM_x, ρM_y, ρM_z des seconds membres des équations (6) auront exactement la forme des premiers membres, avec les coefficients $\frac{\rho a}{k^2}$, $\frac{\rho b}{k^2}$, ... Et ces termes, joints à ceux des premiers membres, ne feront que retrancher aux coefficients de résistance A, B, C, D, E, F les petites parties respectives

$$(198) \qquad \frac{a}{k^2}, \quad \frac{b}{k^2}, \quad \frac{c}{k^2}, \quad \frac{d}{k^2}, \quad \frac{e}{k^2}, \quad \frac{f}{k^2},$$

proportionnelles au carré de la période vibratoire (ou au carré de la longueur d'onde dans le vide); car k est en raison inverse de cette période.

Ainsi, *rien ne sera changé aux lois du mouvement, dans le cas d'une lumière simple. Mais les divers coefficients spécifiques exprimant les propriétés d'un même corps varieront un peu, et, en général, inégalement, avec la période ou la longueur d'onde des radiations : ils comprendront, en effet, de petites parties proportionnelles au carré de celle-ci.*

On appelle *termes de Briot* ces parties ou plutôt les termes, proportionnels aux déplacements vibratoires, dont elles proviennent dans les équations du mouvement. Car Briot paraît avoir, le premier, remarqué ceux-ci, comme exprimant une action (qu'il annule d'ail-

leurs) susceptible d'être exercée sur chaque atome d'éther par la matière pondérable environnante.

Nous savons (p. 276) qu'il existera toujours, pour chaque élément de volume d'un corps transparent, un système d'axes rectangles des x, y, z annulant les trois coefficients totaux

$$D - \frac{d}{k^2}, \quad E - \frac{e}{k^2}, \quad F - \frac{f}{k^2}.$$

Il y aura donc encore des *axes principaux*. Mais on voit qu'ils changeront, en général, avec la période; d'où résultera la *dispersion des axes* pour les diverses couleurs.

Toutefois, quel que soit k, ce système sera évidemment celui des axes de symétrie principaux de la contexture, dans les cristaux transparents qui en admettront de tels; et, alors, on aura, tout à la fois, les égalités

$$(D, E, F) = 0, \qquad (d, e, f) = 0.$$

De plus, les *six coefficients subsistants ou directs* A, B, C, a, b, c *seront tous positifs;* non pas seulement A, B, C, que nous savons, depuis longtemps, l'être, mais aussi a, b, c. En effet, la stabilité de l'état naturel, où sont nuls les déplacements tant de l'éther que de la matière pondérable, implique la tendance, pour les atomes d'éther, à revenir vers leurs situations primitives, si l'on suppose imprimée lentement à tous (sans vitesse ni accélération sensibles) une même petite *translation* (ξ, η, ζ) arbitraire, pendant que la matière pondérable restera fixe; ce qui ne fera naître, sur l'unité de masse de chaque atome d'éther, que la force (M_x, M_y, M_z), exercée par la matière pondérable à travers les intervalles moléculaires. Les trois composantes M_x, M_y, M_z, réduites à $-a\xi$, $-b\eta$, $-c\zeta$ dans le système d'axes considéré, devront donc être respectivement de signes contraires à ξ, η, ζ. Ou, ce qui reviendra au même, le potentiel dont M_x, M_y, M_z sont les trois dérivées en ξ, η, ζ doit être essentiellement négatif dans sa partie variable avec ξ, η, ζ, pour que le travail $M_x d\xi + M_y d\eta + M_z d\zeta$, égal à $-d\frac{a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2}{2}$, soit négatif quand le point quitte, suivant une direction quelconque, sa situation d'équilibre.

Pour la même raison tirée du signe négatif de ce potentiel, a, b, c seront, comme A, B, C, positifs quel que soit le système rectangulaire d'axes choisi.

Observons, en terminant, que l'introduction des termes en ξ, η, ζ

dans les équations indéfinies ne change rien (même pour des mouvements non pendulaires) à la démonstration des relations de continuité (90) (p. 343), spéciales aux surfaces séparatives, puisque les déplacements ξ, η, ζ ne deviennent très grands nulle part. Ces termes n'influent donc sur la réflexion et la réfraction qu'en rendant fonction de la période, comme on vient de voir, les coefficients des équations indéfinies et, par suite, les indices N de réfraction [1].

La variabilité des indices N avec la période entraîne, comme on sait, la séparation ou *dispersion*, par la réfraction, des diverses radiations *simples*, c'est-à-dire à vibrations pendulaires, contenues dans un même rayon incident, et l'analyse de la lumière par le prisme.

62. Des corrections que doivent subir les équations du mouvement, à raison de l'extrême petitesse des longueurs d'onde dans les corps. — Le système d'équations indéfinies obtenu ci-dessus, complété par celui des conditions, spéciales aux surfaces limites, que nous avons déduit des équations indéfinies elles-mêmes, suffit pour expliquer la propagation des mouvements vibratoires dont la longueur d'onde est très grande par rapport aux intervalles moléculaires, comme sont, à fort peu près, les radiations infra-rouges. Mais, quoique donnant une première approximation de celle des radiations plus courtes, lumineuses et même ultra-violettes, il ne représente que très imparfaitement leur *dispersion*, et, de plus, est impuissant à faire connaître une circonstance délicate fort importante, la polarisation rotatoire [2]. C'est qu'alors la phase des mouvements varie, d'un point

---

[1] On pourra en dire autant, pour ce qui concerne les conditions (90), des termes soit de dispersion, soit autres, considérés plus loin, mais en s'appuyant seulement alors, sauf des cas spéciaux, sur ce que ce seront des termes de deuxième ou de troisième approximation, qu'il serait peu naturel de supposer, même à l'intérieur des couches de transition, beaucoup plus influents que ceux de première. Et il en résultera aussi, du moins dans les milieux isotropes et pour la dispersion, de simples modifications, liées à la période vibratoire, des coefficients affectant les équations indéfinies. Donc les indices de réfraction, notamment, auront là une nouvelle raison de n'être plus les mêmes pour toutes les radiations, mais de devenir propres à chaque couleur et de produire la *dispersion* des lumières simples composant un rayon incident.

[2] Pour reconnaître que la polarisation rotatoire représente toujours un phénomène de seconde sinon de troisième approximation, il suffit d'observer que les corps les plus *actifs* dévient les plans de polarisation de quelques centièmes de degré au plus, c'est-à-dire d'une fraction presque imperceptible de circonférence, sur un parcours d'une longueur d'onde, étendue néanmoins suffisante pour offrir toutes les phases du mouvement.

à l'autre, avec une excessive rapidité, qui ne permet plus de construire les éléments de volume servant à former les équations, tout à la fois assez petits pour être le siège de déplacements ξ, η, ζ concordants dans toute leur étendue, et cependant assez grands pour contenir, à fort peu près, la même proportion de molécules pondérables que le ferait un espace de dimensions visibles; en sorte que l'on puisse admettre l'*homogénéité* du milieu, ou, dans les équations obtenues, la *constance* des coefficients physiques.

Il est clair que, si la longueur d'onde devient trop courte pour qu'il soit possible de satisfaire à cette dernière condition (d'homogénéité), et que l'on prenne alors, pour former les équations (6) (p. 272), des éléments de volume constitués différemment en deux points voisins, ces équations de mouvement auront des coefficients A, B, C, D, E, F variables avec x, y, z. Peut-être même ne pourra-t-on pas y admettre tout à fait la constance de ρ et de μ : car, les éléments de volume ne contenant plus des molécules pondérables disposées pareillement près de leurs diverses faces ou tout autour, de petites inégalités de densité et, par suite, d'élasticité, ne seront pas impossibles dans l'éther, si elles sont produites, à l'état d'équilibre (ou *primitif*), par les attractions ou répulsions des molécules sur l'éther aux distances intermoléculaires, c'est-à-dire par ces attractions et répulsions d'où viennent les termes ρM_x, ρM_y, ρM_z considérés ci-dessus.

Quoi qu'il en soit de ces petits mais rapides changements présumés de ρ, μ avec x, y, z, trop d'irrégularités locales affecteront alors ξ, η, ζ, ainsi régis par des équations encore du second ordre, mais à termes devenus en général plus nombreux, et à coefficients rapidement variables d'un point à l'autre, pour qu'on puisse espérer obtenir des expressions *saisissables* de ces déplacements, à moins de les *uniformiser*. Les uniformiser, ce sera *les débarrasser de leurs inégalités locales* et, pour cela, leur substituer, en chaque point (x, y, z), leurs *valeurs moyennes*, que j'appellerai ξ_m, η_m, ζ_m, prises, par exemple, dans tout l'intérieur d'une petite sphère d'un rayon constant ε décrite autour de (x, y, z) comme centre.

Une telle valeur moyenne, comme ξ_m, s'exprime aisément en fonction de la quantité correspondante ξ et de ses paramètres différentiels d'ordres pairs $\Delta_2\xi$, $\Delta_2\Delta_2\xi$, $\Delta_2\Delta_2\Delta_2\xi$, ... ([1]); d'où un calcul par approxi-

---

([1]) *Voir* mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, t. II, *Compléments*, p. 205*. La formule (21) de cette page, donnant la moyenne pour tous les points situés à une même distance r de (x, y, z), sa-

mations successives permet, en général, de déduire, à l'inverse, ξ, en fonction linéaire de ξ_m, $\Delta_2\xi_m$, $\Delta_2\Delta_2\xi_m$, ... Or on conçoit que la substitution dans les équations de mouvement, à ξ, η, ζ, de ces sortes de valeurs en ξ_m, $\Delta_2\xi_m$, $\Delta_2\Delta_2\xi_m$, ..., puisse conduire, si l'on prend ensuite les moyennes des résultats dans de petites étendues où se neutralisent les parties variables des coefficients, *sans que* ξ_m, η_m, ζ_m *y varient* d'une manière sensible, à des équations (aux dérivées partielles en ξ_m, η_m, ζ_m) ayant leurs coefficients constants, mais d'ordre plus élevé que celles d'où l'on part.

Seulement, une formation précise et sûre de pareilles équations me semble hérissée de difficultés, quand on veut pouvoir en apprécier (au moins par sentiment) l'approximation. Et ces difficultés sont, peut-être, encore accrues lorsqu'il s'agit d'un corps *amorphe* ou à cristallisation confuse, c'est-à-dire de constitution non périodique ou irrégulièrement périodique en x, y, z. Car quand les coefficients sont périodiques en x, y, z (comme on peut l'admettre dans le cas d'une cristallisation régulière), il semble que les parties rapidement variables de ξ, η, ζ doivent se régler d'après cette périodicité, ainsi que le supposait Cauchy; ce qui est un grand élément de coordination et de simplification dans le problème [1].

---

voir, dans le cas actuel de trois dimensions,

$$\xi + \frac{\Delta_2\xi}{2.3}r^2 + \frac{\Delta_2\Delta_2\xi}{2.3.4.5}r^4 + \frac{\Delta_2\Delta_2\Delta_2\xi}{2.3.4.5.6.7}r^6 + \ldots,$$

conduit aisément à la moyenne dans toute une sphère, qu'il suffit de décomposer en couches concentriques $4\pi r^2 dr$. En multipliant donc l'expression précédente par $4\pi r^2 dr$, puis intégrant depuis zéro jusqu'au rayon ε de la petite sphère, et divisant par le volume $\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$ de celle-ci, il vient

$$\xi_m = \xi + 3\frac{\varepsilon^2}{5}\frac{\Delta_2\xi}{2.3} + 3\frac{\varepsilon^4}{7}\frac{\Delta_2\Delta_2\xi}{2.3.4.5} + 3\frac{\varepsilon^6}{9}\frac{\Delta_2\Delta_2\Delta_2\xi}{2.3.4.5.6.7} + \ldots.$$

Il en résulte, à une première approximation, $\xi_m = \xi$, et, à la deuxième,

$$\xi_m = \xi + \frac{\varepsilon^2}{10}\Delta_2\xi;$$

d'où l'on tire, sensiblement,

$$\xi = \xi_m - \frac{\varepsilon^2}{10}\Delta_2\xi, \qquad \text{ou même} \qquad \xi = \xi_m - \frac{\varepsilon^2}{10}\Delta_2\xi_m.$$

[1] Toutefois, quand une fonction affectée ainsi de courtes inégalités dépend d'une seule variable, l'équation différentielle qui la régit après son *uniformisation* peut être assez facile à former et à intégrer avec une approximation suffisante. J'ai eu occasion de le reconnaître, dans le problème du choc longitudinal d'une barre élastique, fixée à un bout et heurtée à l'autre par un corps d'une masse beaucoup plus forte que la sienne. C'est une équation *aux différences*

63. Termes exprimant la plus importante de ces corrections. — On se perd au milieu d'une pareille complication; et il est difficile de n'y pas sacrifier quelque chose de la rigueur. Comme il s'agit, en somme, d'extraire d'une multitude de variations confuses des moyennes intelligibles et simples, nous admettrons qu'on ait fait choix, pour établir les équations du mouvement, d'éléments de volume dont les dimensions soient un peu comparables aux longueurs d'onde; de manière que leur composition soit celle du milieu lui-même, et que, par suite, leur force motrice suivant les axes, $\rho \frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2}$ par unité de volume, admette directement, dans son expression, les dérivées secondes en t de déplacements ξ, η, ζ tout *uniformisés*.

Il est vrai qu'alors les pressions élastiques exercées sur les faces de l'élément de volume varieront un peu trop, d'une face à son opposée, pour que leurs différences correspondantes soient complètement assimilables à des différentielles; et, de plus, les déformations dont dépendent ces pressions pourront bien n'être pas très exactement exprimées, même en moyenne, par les dérivées premières des déplacements uniformisés (quoiqu'il fût impossible d'y employer celles des déplacements réels, affectés d'inégalités peut-être aussi courtes que les dimensions d'une face). Toutefois, comme les complications qu'il s'agit d'étudier ou mieux d'éliminer n'existent pas dans l'éther libre,

---

mêlées, du premier ordre par rapport aux différences finies et du premier par rapport aux différentielles, qu'il s'agit alors d'intégrer. Elle se transforme en une équation différentielle du second ordre, à coefficients constants et à second membre rapidement variable (de forme implicite, mais très petit et sensiblement nul en moyenne), quand on y introduit, au lieu de la fonction qui y figure, la même fonction *uniformisée*. Or, quoique ce second membre reste inconnu, on peut voir, aux pages 535 à 544 de mon Volume intitulé *Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, etc.*, que toutes les circonstances importantes du choc se déterminent facilement et d'une manière fort approchée, tandis que l'emploi de l'équation exacte aux différences mêlées, ou de la fonction prise avec ses inégalités successives de plus en plus complexes, conduit à des calculs presque inextricables dès que ces inégalités deviennent un peu nombreuses.

Dans l'étude des ondes liquides *de translation*, ou appartenant au type de l'*onde solitaire*, c'est une *sorte d'uniformisation* des deux composantes horizontales u, v de la vitesse, peu variables, il est vrai, du fond à la surface, qui permet d'établir les équations de seconde approximation (aux dérivées partielles) les plus simples dont le problème paraisse susceptible : elle consiste à choisir comme fonctions inconnues, au lieu de u, v, leurs moyennes U, V le long de chaque verticale (x, y). Mais il s'agit alors d'éliminer une *variable*, la coordonnée z, et non pas de *courtes inégalités*, fonctions de cette variable.

qu'elles sont introduites uniquement par la présence de la matière pondérable et par ses résistances $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$, $\mathcal{R}_z$ au mouvement vibratoire, il est assez naturel, dans une évaluation approximative, de négliger l'effet, *indirect,* de l'existence de cette matière sur les seconds membres des équations (6) (p. 272), uniquement dépendants des forces élastiques de l'éther et restés, jusqu'à présent, de même forme dans les corps que dans l'éther libre.

Ne touchons donc pas à ces seconds membres, censés contenir également les ξ, η, ζ *moyens* ou sans irrégularités; mais contentons-nous, pour saisir le gros des phénomènes en vue, d'uniformiser les déplacements ξ, η, ζ, dans l'expression (1) (p. 269) de la résistance (R_x, R_y, R_z) des molécules que contient l'élément de volume. Les quantités ξ, η, ζ, qui y figurent par leurs dérivées secondes en t, sont les déplacements effectifs de l'éther entourant la molécule; et une formule approchée de calcul intégral, donnée tout à l'heure en note (p. 437), montre qu'on peut les rattacher aisément aux déplacements uniformisés. Si ε désigne le rayon de la petite *sphère d'uniformisation,* rayon en rapport de longueur avec les intervalles moléculaires mais beaucoup plus grand qu'eux, les ξ, η, ζ réels seront sensiblement, d'après cette formule, les excédents des ξ, η, ζ uniformisés, sur les trois produits des paramètres Δ_2 de ceux-ci par $\frac{\varepsilon^2}{10}$. Il n'y aura ainsi qu'à remplacer ξ, η, ζ, dans les expressions (1) de R_x, R_y, R_z, puis dans les suivantes, (4), des résistances moyennes $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$, $\mathcal{R}_z$, respectivement par

(199) $$\xi - \frac{\varepsilon^2}{10}\Delta_2\xi,\quad \eta - \frac{\varepsilon^2}{10}\Delta_2\eta,\quad \zeta - \frac{\varepsilon^2}{10}\Delta_2\zeta,$$

avant de porter les expressions de $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$, $\mathcal{R}_z$ dans les équations (6) du mouvement.

Comme l'hétérotropie est assez faible, chez tous les corps transparents, pour que les coefficients indirects de résistance, D, E, F, soient petits à côté des coefficients directs A, B, C, et pour que ceux-ci soient presque égaux, on pourra négliger les termes qui contiendraient à la fois le facteur ε^2 et l'un des facteurs D, E, F, $B - C$, $C - A$, $A - B$. Si alors on pose, par exemple,

(200) $$\rho\frac{A + B + C}{3}\frac{\varepsilon^2}{10} = \varkappa\mu,$$

où $\varkappa$ désignera un coefficient spécifique *positif* en rapport de petitesse avec ε^2, les premiers membres des équations (6) s'accroîtront simplement du terme

(201) $$-\varkappa\mu\frac{d^2\Delta_2\xi}{dt^2},\quad -\varkappa\mu\frac{d^2\Delta_2\eta}{dt^2},\quad -\varkappa\mu\frac{d^2\Delta_2\zeta}{dt^2}.$$

64. Dispersion soit dans les corps en repos, soit dans les corps en mouvement. — Supposons qu'il s'agisse d'une lumière simple, où ξ, η, ζ et, par suite, leurs paramètres différentiels Δ_2 seront, comme au n° 61 (p. 433) de la forme

$$P \cos kt + Q \sin kt.$$

Alors on aura

$$\frac{d^2 \Delta_2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} = -k^2 \Delta_2(\xi, \eta, \zeta),$$

et les termes (201) des équations (6) de mouvement se grouperont tout naturellement avec ceux des seconds membres, où ils deviendront $-\varkappa k^2 \mu \Delta_2(\xi, \eta, \zeta)$. Vu d'ailleurs les faibles valeurs qu'aura toujours la dilatation cubique θ, il est permis, à cause du très petit facteur $\varkappa$, d'écrire ces termes

$$(202) \qquad -\varkappa k^2 \mu \left[\Delta_2(\xi, \eta, \zeta) - \frac{d\theta}{d(x, y, z)} \right];$$

et leur effet sur les équations du mouvement se réduit à y multiplier le coefficient μ par le binome $1 - \varkappa k^2$, fonction de la période vibratoire.

En conséquence, le carré de la vitesse de propagation dans un corps isotrope, qui était $\frac{\mu}{\rho(1 + A)} = a^2$, deviendra $a^2(1 - \varkappa k^2)$; et cette vitesse, si on l'appelle ω, sera sensiblement

$$(203) \qquad \omega = a\left(1 - \frac{\varkappa}{2} k^2\right).$$

Comme k est en raison inverse de la période (ou de la longueur d'onde dans le vide), cette *vitesse croît avec la période*, conformément à la formule simplifiée de dispersion qu'on doit à Cauchy et qu'emploient les physiciens.

Le terme, inversement proportionnel à k^2, qu'y ajoute l'action moléculaire (p. 433) et qui est sensible surtout lors des périodes les moins petites, permet de compléter la formule précédente, ou celle, corrélative, de l'indice N de réfraction. Alors l'expression du carré ω^2 de la vitesse de propagation, développé finalement en série, prend la forme

$$(204) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega^2 &= \frac{\mu(1 - \varkappa k^2)}{\rho(1 + A)\left(1 - \frac{a}{1 + A} \frac{1}{k^2}\right)} \\ &= \frac{\mu(1 + A - \varkappa a)}{\rho(1 + A)^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{a}{1 + A} \frac{1}{k^2}} - \frac{\varkappa k^2}{1 - \frac{\varkappa a}{1 + A}} \right) \\ &= \alpha - \beta k^2 + \gamma \frac{1}{k^2} + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Sous cette forme, elle devient presque suffisante, pour l'ensemble des radiations caloriques et lumineuses, dans les corps transparents, c'est-à-dire quand on peut négliger les phénomènes d'absorption, comme nous l'admettons ici.

Mais nous avons supposé notre corps en repos. S'il était animé d'une translation rapide (V_x, V_y, V_z), les dérivées secondes de $\Delta_2\xi$, $\Delta_2\eta$, $\Delta_2\zeta$ par rapport au temps devraient être prises, comme on a vu (p. 397), en faisant croître t de dt et x, y, z de $V_x dt$, $V_y dt$, $V_z dt$. Alors, dans le cas d'ondes planes, non évanescentes et se propageant, où ξ, η, ζ, $\Delta_2\xi$, ... sont presque uniquement fonctions de la variable *principale* $t - lx - my - nz$ considérée souvent au cours de cette étude, chacune des dérivations complètes en t dont il s'agit donne évidemment la dérivée partielle en t correspondante, ou *prise sur place,* multipliée par le facteur constant

$$(205)\quad \begin{cases} 1 - lV_x - mV_y - nV_z = 1 - \dfrac{V_x \cos\alpha + V_y \cos\beta + V_z \cos\gamma}{\omega} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = 1 - \dfrac{V'}{\omega}, \end{cases}$$

en désignant par V' la vitesse de transport du corps, *estimée suivant le sens de la progression des ondes.*

Les deux dérivations à effectuer sur $\Delta_2\xi$, $\Delta_2\eta$, $\Delta_2\zeta$ multiplieront donc ces paramètres différentiels non plus par $-k^2$, mais par $-k^2\left(1 - \frac{V'}{\omega}\right)^2$. Et, *le terme principal de dispersion* étant justement le terme $-\varkappa k^2$, la propagation se fera sensiblement comme si, toutes choses égales d'ailleurs, le mouvement avait, dans le corps supposé en repos, non pas sa période vraie, inverse de k, mais une période inverse du coefficient, un peu différent,

$$(206)\qquad k' = k\left(1 - \frac{V'}{\omega}\right) = k\,\frac{\omega - V'}{\omega}.$$

Ainsi, la *dispersion* se produira presque comme dans le même corps en repos, mais où la lumière proposée aurait une période vibratoire égale à sa période vraie multipliée par le rapport $\frac{\omega}{\omega - V'}$. Or $\omega - V'$ est la vitesse des ondes par rapport à un observateur entraîné avec le corps. Pendant une unité de temps, un tel observateur compte, ou voit passer à côté de lui, seulement les ondes qui le dépassent ou qui, au commencement de cette unité de temps, occupaient derrière lui la longueur $\omega - V'$. Elles y étaient moins nombreuses que sur la lon-

gueur ω, dans le rapport $\frac{\omega - V'}{\omega}$; et leur période lui aura justement paru être le produit de la période vraie par $\frac{\omega}{\omega - V'}$.

La *dispersion* doit donc se faire *sensiblement*, dans les corps animés d'une translation rapide, comme si ces corps étaient en repos, mais que *la période des radiations fût leur période apparente* par rapport à un observateur entraîné avec le corps.

C'est précisément la loi déduite par M. Mascart d'un certain nombre d'observations très soignées qu'il a faites ou, du moins, publiées de 1872 à 1874, et qu'il juge suffisamment précises pour avoir pu manifester l'absence du facteur $\frac{\omega - V'}{\omega}$ dans la formule de la dispersion, si la translation des corps expérimentés (c'est-à-dire de la terre qui les portait) avait dû se trahir même seulement à la faveur de l'écart entre les deux périodes réelle et apparente (¹).

Il importe peu, d'ailleurs, que l'on apprécie la composante V' de translation, toujours fort petite devant ω, suivant la normale aux ondes ou suivant le rayon lumineux : ce sera, dans le problème, une simple constante (ne compliquant nullement les questions de délimitation latérale), dès que l'on connaîtra *approximativement* la direction des ondes.

65. **Dispersion anomale, en rapport avec le pouvoir absorbant des corps pour les radiations d'une période déterminée : vibrations exceptionnellement grandes qu'y éprouve une partie de la matière pondérable.** — Quand le corps étudié cesse d'être transparent sous des épaisseurs comparables aux longueurs d'onde, les lois précédentes ne subsistent plus et la dispersion devient *anomale*. Cela peut arriver de deux manières, suivant que l'opacité du milieu et, par conséquent, l'absorption des radiations qui y pénètrent se produisent pour toutes les valeurs de la période τ du mouvement vibratoire comprises entre deux limites écartées, ou suivant qu'elles se produisent seulement pour des *raies* étroites du spectre, les mêmes qui deviendraient lumineuses si la substance expérimentée émettait les radiations au lieu de les recevoir.

Abordons d'abord le dernier cas, où la transparence subsiste au voisinage de chaque raie d'absorption, sauf pour les valeurs de la période τ presque identiques à celle, τ_0, qui correspond à l'axe de la

(¹) *Voir* son *Traité d'Optique*, t. III, p. 92 et 99.

raie. C'est par lui qu'il convient de commencer; car l'anomalie de dispersion, s'y produisant seulement pour ces radiations à périodes τ peu différentes de τ_0, y est exceptionnelle et n'empêche pas les lois ordinaires de s'appliquer dans presque toute l'étendue du spectre.

Si l'on appelle N_0 l'indice moyen de réfraction pour les radiations dont les périodes diffèrent un peu de τ_0, et K une petite constante spéciale à chaque raie, l'anomalie dont il s'agit ici consiste en ce que le carré de l'indice de réfraction, pour les radiations *non éteintes,* mais à période τ *voisine* de τ_0, admet très sensiblement la formule

$$N^2 = N_0^2\left(1 + K\frac{\tau_0^2}{\tau^2 - \tau_0^2}\right). \tag{207}$$

Donc, sauf pour les rayons absorbés qui annulent presque le dénominateur $\tau^2 - \tau_0^2$ et au sujet desquels l'observation optique est muette, la valeur de N^2 décroît rapidement quand τ grandit, tant d'un côté que de l'autre de la raie obscure; et elle diffère sensiblement de N_0^2, *dans les deux sens,* pour les radiations les plus voisines de celles qui ne sont pas transmises (¹).

Il est naturel de chercher la raison de la formule (207) dans l'existence même de la raie obscure, c'est-à-dire dans le fait d'actions intérieures de la matière pondérable expérimentée, aptes à faire emmagasiner par elle l'énergie vibratoire de période τ_0. Or il est bien connu que la force propre à entretenir chez un point matériel, de masse M, faisant partie de cette matière, des déplacements pendulaires δ' de période τ_0, doit être, au moins d'une manière approchée, dirigée vers la situation moyenne ou d'équilibre du point et égale, en valeur absolue, à $M\frac{4\pi^2}{\tau_0^2}\delta'$. L'étroitesse même de la raie obscure est un signe de la précision avec laquelle est indiquée cette période τ_0 : car l'extinction tient vraisemblablement à la perte de la forme linéaire par les équations du mouvement, ou à l'entrée en jeu, dans ces équations, des termes de degré supérieur qu'amène l'exagération des amplitudes; exagération due elle-même, comme on sait, au *synchronisme* presque absolu du mouvement introduit dans le système avec son mouvement

(¹) C'est ce que les physiciens savent depuis diverses expériences de Kundt, mais surtout depuis celles de M. Henri Becquerel sur la dispersion anomale d'une flamme colorée par du sel marin, et dont on examine le pouvoir réfringent pour les radiations voisines des deux raies jaunes du sodium (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* 5 décembre 1898 et 16 janvier 1899, t. CXXVII, p. 899, et t. CXXVIII, p. 145).



propre (t. I, p. 76) ([1]). La formule $-M\frac{4\pi^2}{\tau_0^2}\delta'$ de l'action intérieure semble donc nettement imposée, si, du moins, on se borne aux mouvements pendulaires.

Mais comment expliquer la présence, à l'intérieur de chaque élément de volume ϖ d'éther, d'une telle force, qui agirait, dans notre milieu, tout au moins sur plusieurs ou de ses *molécules* pondérables, ou des *atomes* de ses molécules? La manière de le concevoir la plus simple, paraissant même la seule précise, et que nous adopterons pour nous représenter le phénomène, sera d'admettre l'existence, dans le corps, d'un certain nombre, relativement assez petit, de molécules ou d'atomes, vibrant, sous l'impulsion de l'éther, incomparablement plus que le reste de la matière pondérable. Il faudra et il suffira pour cela que ces molécules ou atomes, dont nous appellerons l'ensemble la *substance active* du milieu, aient un coefficient de résistance à l'éther *exceptionnellement grand*, presque au point de compromettre la transparence (par raccourcissement énorme de la longueur d'onde) *s'il était commun à toute la matière pondérable du corps* (t. I, p. 64 et 74).

Supposons-les, pour fixer les idées, identiques quant à la masse, la figure, l'orientation, et éprouvant, dans chaque élément ϖ de volume, sous l'impulsion de l'éther, des déplacements δ' pareils, suivant le sens même des déplacements δ de l'éther. Nous savons que, dans l'étendue ϖ, l'impulsion totale de celui-ci sur ces molécules ou atomes sera le produit de son accélération relative $\frac{d^2(\delta-\delta')}{dt^2}$ par la masse $\rho\varpi$ d'éther et par un *coefficient de résistance*, α', variable avec la nature des molécules ou atomes, mais, pour une nature donnée, proportionnel à leur nombre dans l'unité de volume, c'est-à-dire à la *densité* ρ' de la substance active. Donc, la force motrice $\rho'\varpi\frac{d^2\delta'}{dt^2}$ de la matière active en

---

([1]) L'on s'explique aisément, dans cette hypothèse, l'élargissement que chaque raie d'absorption éprouve, de part et d'autre de son axe correspondant à la période τ_0, lorsque croît l'intensité lumineuse des radiations traversant le milieu. Alors, en effet, il y a de plus en plus de radiations simples, c'est-à-dire, au-dessous et au-dessus de τ_0, un champ de plus en plus étendu de valeurs de τ, pour lesquelles l'agitation de la substance active dont on va parler atteint la limite d'amplitude mettant notablement en jeu les termes non linéaires des équations du mouvement, termes qui empêchent la propagation simple par ondes de continuer à se faire et lui substituent un mode de communication de l'agitation identique ou analogue à la transmission par conductibilité.

question ne provenant, du moins au début du phénomène, que de l'impulsion $\alpha'\varpi\rho\frac{d^2(\delta-\delta')}{dt^2}$ de l'éther, sensiblement réductible à $\alpha'\varpi\rho\frac{d^2\delta}{dt^2}$ tant que δ' est négligeable devant δ, l'on y aura $\delta'=\frac{\alpha'\rho}{\rho'}\delta$ (t. I, p. 66), déplacement beaucoup plus grand pour la substance active que pour le reste, c'est-à-dire que pour l'ensemble de la matière pondérable du corps, où le rapport, à la densité, de notre coefficient α de résistance sera loin, par hypothèse, d'atteindre d'aussi fortes valeurs que $\frac{\alpha'}{\rho'}$.

Dès lors, l'ensemble de la matière pondérable est comme *fixe*, comparativement aux molécules ou atomes de la substance *active*, points matériels épars çà et là dans la masse et soumis à son action ou intermoléculaire, ou atomique, qui, dépendant des situations relatives, variera d'un instant à l'autre, pour chacun de ces points, avec son déplacement δ' seul. Ainsi, abstraction faite des impulsions de l'éther, la force sollicitant chaque molécule ou chaque atome de la substance active, un peu écartés de leur situation moyenne ou d'équilibre, ne sera fonction que du déplacement même δ'. S'il y a isotropie de structure, elle ne dépendra que de la grandeur $\sqrt{\delta'^2}$ de celui-ci et se trouvera dirigée en sens inverse, ou tendra à ramener le point matériel vers sa situation de repos, vu la stabilité de l'état naturel. Enfin, δ' étant supposé assez petit, on pourra attribuer à cette force, par unité de masse, la forme linéaire $-\frac{4\pi^2}{\tau_0^2}\delta'$, si τ_0 désigne un temps d'autant plus court que sera plus grande la résistance à un même déplacement δ', de la part de la matière pondérable environnante.

Comme les actions interatomiques ou chimiques sont, en général, beaucoup plus puissantes que les actions physiques ou intermoléculaires, il sera naturel de leur attribuer la force en question quand τ_0 recevra ses plus petites valeurs. On pourra donc faire consister la *substance active* en des *molécules entières,* ou seulement en *quelques atomes* de certaines molécules du milieu, suivant que la période propre τ_0 de vibration du corps, correspondant à l'axe d'une raie obscure, sera relativement longue ou brève.

Cela posé, voyons comment se régleront les déplacements δ' de la substance active quand les frottements, inévitables dans tous les phénomènes, mais que leur petitesse, ici, dispense de figurer dans nos équations approchées, auront, autour du point (x, y, z) du corps, rendu périodique, de période τ, le mouvement de la matière pondé-

rable, comme l'est celui de l'éther, suffisamment entretenu par les vibrations de la source lumineuse. Il nous suffira de poser l'équation de mouvement

$$\rho'\varpi \frac{d^2\delta'}{dt^2} = -\rho'\varpi \frac{4\pi^2}{\tau_0^2}\delta' + \alpha'\varpi\rho \frac{d^2\delta}{dt^2} \quad \text{ou} \quad \frac{d^2\delta'}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{\tau_0^2}\delta' = \frac{\alpha'\rho}{\rho'}\frac{d^2\delta}{dt^2},$$

en exprimant que la substance active $\rho'\varpi$ a sa force motrice $\rho'\varpi\frac{d^2\delta'}{dt^2}$ composée de l'action $-\rho'\varpi\frac{4\pi^2}{\tau_0^2}\delta'$, de la matière pondérable environnante et de l'impulsion, $\alpha'\varpi\rho\frac{d^2\delta}{dt^2}$, de l'éther; puis de faire, dans cette équation, δ de la forme donnée $U\cos\frac{2\pi t}{\tau} + V\sin\frac{2\pi t}{\tau}$, avec U, V fonctions de x, y, z, et d'attribuer à δ' la même forme pendulaire, propre, comme on voit, à vérifier l'équation. On aura ainsi

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{\tau^2}\delta, \qquad \frac{d^2\delta'}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{\tau^2}\delta';$$

et, en divisant par δ le résultat de la substitution, il viendra, si ε' désigne le rapport, dès lors constant, $\frac{\delta'}{\delta}$,

(208) $$\frac{\delta'}{\delta} \quad \text{ou} \quad \varepsilon' = \frac{\alpha'\rho}{\rho'}\frac{\tau_0^2}{\tau_0^2 - \tau^2}.$$

Négligeons les actions intérieures de la matière pondérable, ou faisons τ_0 infini; et cette formule donnera le rapport analogue, que j'appellerai ε'', pour la matière *non active*, dont δ'', ρ'', α'' exprimeront respectivement, à l'endroit (x, y, z), le déplacement moyen, la densité et le coefficient moyen de résistance à l'éther. Nous aurons donc simplement

(209) $$\frac{\delta''}{\delta} \quad \text{ou} \quad \varepsilon'' = \frac{\alpha''\rho}{\rho''};$$

et ce rapport ε'', à raison de ce que le quotient $\frac{\alpha''}{\rho''}$ est, par hypothèse, beaucoup plus petit que $\frac{\alpha'}{\rho'}$, sera négligeable en comparaison de ε', même quand τ différera notablement de τ_0.

66. Explication de la dispersion anomale considérée, par la participation sensible de la matière pondérable au mouvement. — Nous pouvons maintenant former l'équation du mouvement de l'éther. Celui-ci aura, dans le volume ϖ, sa force motrice $\rho\varpi\frac{d^2\delta}{dt^2}$, constituée par l'action élastique de l'éther extérieur, $\varpi\mu\frac{d^2\delta}{dx^2}$ (si x est une abscisse normale aux ondes planes produisant les radiations), et par les deux résistances

$$-\alpha'\varpi\rho\frac{d^2(\delta-\delta')}{dt^2},\qquad -\alpha''\varpi\rho\frac{d^2(\delta-\delta'')}{dt^2},$$

ou

$$-\alpha'(1-\varepsilon')\varpi\rho\frac{d^2\delta}{dt^2},\qquad -\alpha''(1-\varepsilon'')\varpi\rho\frac{d^2\delta}{dt^2},$$

de la substance active et du reste de la matière pondérable ([1]). L'équation du mouvement sera donc, après transposition des deux derniers termes dans le premier membre et division par $\varpi\mu$,

$$\frac{\rho}{\mu}(1+\alpha'+\alpha''-\alpha'\varepsilon'-\alpha''\varepsilon'')\frac{d^2\delta}{dt^2}=\frac{d^2\delta}{dx^2}. \tag{210}$$

Or, quoique nous supposions $\frac{\alpha'}{\rho'}$ beaucoup plus grand que $\frac{\alpha''}{\rho''}$, comme ρ'' est très supérieur à ρ', α' sera comparable à α'' et, alors, le produit $\alpha''\varepsilon''$ disparaîtra devant $\alpha'\varepsilon'$, à cause de la petitesse de ε'' par rapport à ε'. Donc, vu la valeur (208) de ε', l'équation cherchée du mouvement sera

$$\frac{\rho}{\mu}\left(1+\alpha'+\alpha''+\frac{\alpha'^2\rho}{\rho'}\frac{\tau_0^2}{\tau^2-\tau_0^2}\right)\frac{d^2\delta}{dt^2}=\frac{d^2\delta}{dx^2}.$$

Dans la mesure où l'on peut supposer α' et α'' les mêmes pour tous les éléments de volume voisins ([2]), le coefficient de $\frac{d^2\delta}{dt^2}$ égale l'inverse

---

([1]) Il y aura bien, en outre, la petite force, considérée plus haut (p. 432 à 434), qui est due aux actions de la matière pondérable sur l'éther exercées aux distances de l'ordre des intervalles moléculaires. Mais cette force, proportionnelle au déplacement δ et dirigée, pour chaque atome d'éther, vers sa situation d'équilibre, n'a pas dans la question un rôle essentiel; car son petit effet sur le mouvement est, à fort peu près, le même pour toutes les radiations à périodes τ plus ou moins voisines de τ_0.

([2]) Et négliger le petit terme, proportionnel à δ, provenant des actions exercées sur l'éther par la matière pondérable à travers les intervalles moléculaires.

du carré de la vitesse de la lumière dans le milieu; et comme son facteur $\frac{\rho}{\mu}$ est l'inverse analogue pour l'éther libre, l'autre facteur, entre parenthèses, revenant à $1+\alpha'+\alpha''-\alpha'\varepsilon'$, sera le carré de l'indice N de réfraction. Ainsi, abstraction faite de la dispersion ordinaire ou normale, la formule de N^2 est

$$N^2 = 1+\alpha'+\alpha''-\alpha'\varepsilon' = 1+\alpha'+\alpha''+\frac{\alpha'^2\rho}{\rho'}\frac{\tau_0^2}{\tau^2-\tau_0^2}. \tag{211}$$

Ajoutons au troisième membre, afin de tenir compte de cette dispersion ordinaire, une petite quantité, à très peu près constante pour toutes les valeurs de τ considérées ou voisines de τ_0; et appelons alors N_0^2 la somme $1+\alpha'+\alpha''$, accrue de la petite quantité dont il s'agit. Il viendra sensiblement, en définitive,

$$N^2 = N_0^2\left(1+\frac{\alpha'^2}{1+\alpha'+\alpha''}\frac{\rho}{\rho'}\frac{\tau_0^2}{\tau^2-\tau_0^2}\right). \tag{212}$$

Cette expression de N^2 a bien la forme (207) indiquée par l'expérience; et la valeur théorique du coefficient K y est

$$K = \frac{\alpha'}{1+\alpha'+\alpha''}\frac{\alpha'\rho}{\rho'}. \tag{213}$$

Le rapport $\frac{\alpha'}{1+\alpha'+\alpha''}$, compris entre zéro et 1, étant généralement sensible, le coefficient K sera de l'ordre de grandeur du facteur $\frac{\alpha'\rho}{\rho'}$. Il resterait absolument inappréciable, si ce dernier facteur y conservait sa petitesse habituelle, ou commune chez les corps transparents. Mais nous le supposons exceptionnellement grand pour chaque substance *active,* productrice d'une étroite raie obscure du spectre; et, dès lors, rien ne s'oppose à ce que son produit par le facteur $\frac{\tau_0^2}{\tau^2-\tau_0^2}$, très grand dans le voisinage de la raie, devienne un peu comparable à l'unité [1].

---

[1] **Possibilité d'une vitesse de la lumière plus forte dans certains corps transparents que dans l'éther libre.** — Le terme en K, dans la formule (207), peut-il, lorsqu'il est négatif, acquérir des valeurs absolues suffisantes pour abaisser au-dessous de 1 l'indice N de réfraction d'une flamme et rendre, par conséquent, la vitesse de propagation de la lumière dans cette flamme supérieure à sa vitesse dans le vide? Il faudra, pour cela, vu la première expression approchée (211) de N^2, savoir $1+\alpha'+\alpha''-\alpha'\varepsilon'$, que le rapport ε' des

Quand on fait varier dans le milieu la densité ρ' de la substance active, le quotient $\frac{\alpha'}{\rho'}$ reste constant, comme nous savons, et K varie

---

déplacements δ' de la substance active à ceux δ de l'éther excède assez notablement l'unité. Or on ne voit pas ce qui l'empêcherait de pouvoir le faire. En effet, les formules (208) et (209) expriment l'état relatif *stationnaire*, ou *de régime*, qui tend à s'établir entre le mouvement de la matière pondérable et celui de l'éther, quelle que soit celle des deux espèces de matière qui meut l'autre; et les élongations respectives δ, δ', δ'', dans cet état devenu périodique, sont réglées, quant à leurs rapports ε', ε'', par la nature du système matériel, non par leur rôle actuel de déplacement soit *actif* (en quelque sorte) ou moteur, soit *passif*. Comme il faut, généralement, que l'un des deux appelés δ et δ' excède l'autre, il n'y a pas d'impossibilité à ce que le plus grand soit δ'.

Mais dès que δ' est comparable à δ, l'équation du mouvement de la substance active a besoin d'être complétée; car l'impulsion $\alpha'\rho\varpi\frac{d^2(\delta-\delta')}{dt^2}$ n'y est plus réductible à $\alpha'\rho\varpi\frac{d^2\delta}{dt^2}$.

On trouve aisément que la formule (208) doit alors faire place à celle-ci :

$$\varepsilon' = \frac{\frac{\alpha'\rho}{\rho'}\tau_0^2}{\left(1+\frac{\alpha'\rho}{\rho'}\right)\tau_0^2-\tau^2} = \frac{\frac{\alpha'\rho}{\rho'}\tau_0^2}{\frac{\alpha'\rho}{\rho'}\tau_0^2-(\tau^2-\tau_0^2)}.$$

La valeur de τ^2 qui rend ε' infini, ou qui correspond à l'axe de la raie obscure, est ainsi accrue dans le rapport de 1 à $1+\frac{\alpha'\rho}{\rho'}$, ou excède τ_0^2 de sa petite fraction $\frac{\alpha'\rho}{\rho'}$; et c'est pour τ^2 compris entre τ_0^2 et $\left(1+\frac{\alpha'\rho}{\rho'}\right)\tau_0^2$ que se produisent les valeurs du rapport $\frac{\delta'}{\delta}$ (ou ε') excédant l'unité.

Si ce cas se réalise sans que les équations cessent d'être linéaires et la lumière de se propager régulièrement, l'élasticité de la matière pondérable, mise en jeu par les déplacements de la substance active, sera plus que suffisante pour entretenir l'état vibratoire de celle-ci. Quand τ était inférieur à τ_0, cette élasticité, contribuant dans une proportion plus ou moins forte au mouvement de la substance active, se bornait à réduire la charge ou, en quelque sorte, le *poids mort*, qu'était cette substance pour l'éther. Mais que le rapport ε' vienne à dépasser suffisamment l'unité, et l'élasticité de la matière pondérable fera plus qu'entretenir le mouvement vibratoire de la substance active : par l'intermédiaire de cette substance, qui poussera l'éther, elle fournira un excédent de force se reportant sur celui-ci, pour s'ajouter à son élasticité propre; et l'on s'explique qu'alors la vitesse de la lumière soit plus grande dans le corps que dans l'éther libre.

Ce fait, de valeurs N inférieures à l'unité chez un corps transparent, paraît avoir été bien constaté par M. Henri Becquerel, dans ses expériences si remarquables sur la dispersion produite par une flamme saturée de sodium en vapeur, et pour les radiations d'une période τ atteignant presque celle de la première raie jaune de son spectre, comme on le voit dans le second des deux articles cités

comme la fraction $\frac{\alpha'}{1+\alpha'+\alpha''}$; α'' ne changeant pas, K croît donc avec ρ'.

On voit que le coefficient K sera même sensiblement proportionnel à ρ' si cette fraction est petite devant l'unité ([1]).

Lorsque le milieu contient plusieurs substances actives, il est clair que les termes correspondants s'ajoutent simplement, dans le premier membre de (210), ou dans le second de (211); et il en est de même dans le troisième membre de (211), ou quand on remplace les rapports ε' par leurs valeurs, que donne encore la formule (208). En effet, les substances actives n'étant qu'en petite quantité, chacune d'elles se comporte, sous la double action de l'éther et de la matière environnante, comme si les autres n'existaient pas. Cela doit être vrai surtout pour les substances à raies spectrales de nature chimique, ou constituées par quelques atomes de certaines molécules et ayant, par suite, leur période propre τ_0 de vibration dépendante des actions interatomiques d'une molécule seule. Ainsi, au troisième membre de (211), il y aura autant de termes fractionnaires, fonctions de τ^2, que de substances actives; mais les seuls d'entre eux perceptibles, ou qui aient à figurer dans (212) et (213), seront ceux où ε' atteindra une certaine grandeur, c'est-à-dire où figurera une période propre τ_0 assez voisine de la période effective τ.

Substituons maintenant, à chaque *point matériel* (molécule ou atome) de la substance active, un *groupe déformable* de points, soumis à leurs actions mutuelles; et un tel groupe comportera un certain nombre, croissant avec sa complication, de vibrations simples ou pendulaires, à périodes τ_0 *distinctes*. Il pourra donc expliquer toute une série de raies du spectre, au lieu d'une seule raie ([2]).

---

ci-dessus des *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences (t. CXXVIII, p. 148). Le terme en K de la formule (207) ne valait cependant que quelques millièmes; mais N_0^2 ne dépassait l'unité que de quelques dix-millièmes.

([1]) Cette théorie de la dispersion anomale au voisinage des raies d'absorption a fait l'objet d'une Note insérée le 16 juin 1902 aux *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris (t. CXXXIV, p. 1389).

([2]) Est-ce ainsi, c'est-à-dire par l'intermédiaire d'une substance active, ou très mobile, disséminée en fort petite quantité dans une sorte de gangue, relativement fixe, tendant à la maintenir en place, que se font en général les communications d'énergie entre l'éther et la matière pondérable, dans les phénomènes du refroidissement et de l'échauffement par rayonnement? C'est peu probable, à part le cas des spectres à raies étroites. Peut-être même notre substance active n'est-elle qu'une image de la totalité ou d'une notable partie de la matière du corps, mais considérée dans son aptitude spéciale à exécuter, par l'effet de ses actions intérieures, des vibrations d'une période τ_0 déterminée (t. I, p. 71). Ce serait, en

67. Dispersion anomale, en rapport avec le pouvoir absorbant des corps pour toutes les radiations comprises dans une étendue notable du spectre. — Les considérations précédentes cessent de s'appliquer lorsque l'absorption se produit indifféremment pour toutes les radiations comprises dans une partie notable du spectre, puisqu'il n'y a plus de période déterminée τ_0, propre à la matière du corps. Mais alors l'opacité de celui-ci est analogue à celle des métaux; et l'hypothèse approchée d'une résistance supplémentaire des molécules à l'éther, proportionnelle à la vitesse, qui nous a permis de calculer la réflexion sur ces corps, devient applicable. Il n'y a donc qu'à reprendre les calculs faits plus haut à propos de la réflexion métallique, en développant ce qui y concerne le rayon réfracté.

Nous avons vu (p. 375) que, dans le cas d'ondes planes, entrées dans le milieu opaque sous un angle i d'incidence, et où les phases des vibrations se propageaient, à sa surface, suivant un axe des y qu'on lui avait mené tangent, avec une vitesse donnée $\frac{\omega}{\sin i}$, les déplacements ζ_1, ξ_1, η_1 du milieu opaque contenaient en facteur une exponentielle, $e^{-k\frac{Lx}{\omega}\sin\nu}$ ou $e^{-\frac{2\pi Lx}{\tau\omega}\sin\nu}$, évanouissante quand grandissait la profondeur normale x atteinte par les ondes sous la surface, et qu'ils étaient, en outre, proportionnels aux cosinus d'arcs de la forme

$$k\left(t-\frac{Lx}{\omega}\cos\nu-\frac{y\sin i}{\omega}\right)+\text{const.},$$

ou

$$\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{Lx\cos\nu+y\sin i}{\omega}\right)+\text{const.},$$

τ désignant la période de vibration, et L, ν deux paramètres, fonctions de i, de τ et de la nature du corps, définis par les formules (125) et par la seconde (117) (p. 375 et 373). Si l'on appelle r et Ω les deux constantes auxiliaires que déterminent, entre les limites $r=0$ et $r=\frac{\pi}{2}$, $\Omega=0$ et $\Omega=\infty$, les formules

$$(214)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\cos r}{\Omega}=\frac{L\cos\nu}{\omega},\qquad \frac{\sin r}{\Omega}=\frac{\sin i}{\omega},\\ &\text{ou}\\ &\frac{1}{\Omega}=\frac{\sqrt{L^2\cos^2\nu+\sin^2 i}}{\omega},\qquad \operatorname{tang} r=\frac{\sin i}{L\cos\nu},\end{aligned}\right.$$

---

quelque sorte, un peu de matière, mais adapté à un rôle précis, mis fictivement à la place, pour produire un certain effet, de beaucoup de matière, n'agissant que d'une manière confuse.

les déplacements dans le rayon réfracté seront, abstraction faite de l'exponentielle évanouissante, fonctions de la variable

$$t - \frac{x \cos r + y \sin r}{\Omega},$$

qui est celle d'un rayon réfracté faisant l'angle r avec la normale à la surface et animé de la vitesse de propagation Ω. L'indice de réfraction, $\frac{\sin i}{\sin r}$ ou N, a donc pour valeur, d'après la deuxième formule (214),

$$(215) \qquad \text{N} \quad \text{ou} \quad \frac{\omega}{\Omega} = \sqrt{\text{L}^2 \cos^2 \nu + \sin^2 i}.$$

Il est fonction de l'angle d'incidence i; ou, plus précisément, et en n'introduisant aucun élément étranger au milieu opaque, la vitesse de propagation Ω, dans ce milieu, dépend de la vitesse $\frac{\omega}{\sin i}$ avec laquelle les diverses phases du mouvement se transmettent, suivant le sens pris pour celui des y, sur les surfaces $x =$ const. d'*égale amplitude*. Dans les milieux transparents, où aucune variation appréciable d'amplitude ne se produisait dans des étendues de dimensions comparables aux longueurs d'onde, il n'y avait pas lieu de considérer de pareilles surfaces; et il suffisait de remarquer celles des *ondes,* ou *surfaces d'égale phase*. Mais il est naturel qu'ici les phénomènes dépendent, à la fois, et des surfaces d'égale phase, et de celles d'égale amplitude.

Pour simplifier, bornons-nous au cas de l'*incidence normale,* où $i = 0$ et où coïncident ces deux sortes de surfaces. L'indice N de réfraction, que nous appellerons N_0, devient alors $\text{L}_0 \cos \nu_0$ ou, à cause des deux premières relations (125) (p. 375) définissant L_0 et ν_0,

$$\text{N}_0 = \frac{\omega}{a_1} \sqrt[4]{1 + \tan^2 2\nu_0} \cos \nu_0 = \frac{\omega}{a_1} \frac{\cos \nu_0}{\sqrt{\cos 2\nu_0}}$$
$$= \frac{\omega}{a_1} \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\cos 2\nu_0}\right)} = \frac{\omega}{a_1} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + \text{K}^2}}{2}}.$$

Vu l'expression (117) de K (p. 373), on aura donc, pour la vitesse de propagation Ω_0 de la lumière à l'intérieur du milieu opaque, dans ce cas où les surfaces d'égale amplitude se confondent avec les surfaces d'onde,

$$(216) \qquad \Omega_0 = \frac{\omega}{\text{N}_0} = a_1 \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \text{K}^2}}} = a_1 \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{a_1^4 \text{H}^2 \tau^2}{4\pi^2 \mu^2}}}}.$$

Comme nous savons (p. 379) que le produit $H\tau$ grandit avec la période τ de vibration, cette formule montre que la *célérité* Ω_0 de propagation variera en sens inverse. Par conséquent, *la vitesse de la lumière dans les milieux opaques décroît quand augmente la période ou longueur d'onde,* contrairement à ce qui arrive dans les milieux transparents; et *la dispersion* y est anomale.

Quand l'opacité n'est pas très grande, le développement du dernier membre suivant les puissances de $\frac{a_1^4 H^2 \tau^2}{4\pi^2\mu^2}$, par la formule du binome appliquée deux ou trois fois successivement, donne à très peu près

$$(217) \qquad \Omega_0 = a_1\left(1 - \frac{a_1^4 H^2 \tau^2}{32\pi^2\mu^2}\right).$$

La partie en τ^2 y serait, pour H constant, de la forme du terme en γ de la formule normale (204) (p. 440), mais avec signe contraire [1].

---

(1) **Pouvoir absorbant des corps à dispersion anomale.** — La théorie de la réflexion métallique, qui permet ainsi d'expliquer la dispersion anomale des corps opaques ou à couleurs *superficielles,* permet aussi, comme on l'a vu à la fin du numéro 39 (p. 380), de prévoir certaines particularités qu'y présente l'absorption de la lumière. A raison de l'exponentielle réelle figurant dans la formule (123) (p. 374), leur pouvoir absorbant est $\frac{kL\sin\nu}{\omega}$ ou, sous l'incidence normale, $k\frac{L_0\sin\nu_0}{\omega}$, c'est-à-dire, d'abord, d'après la deuxième formule (125) (p. 375),

$$\frac{k}{a_1}\sqrt[4]{1+K^2}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\tang^2 2\nu_0}}\right)},$$

et ensuite, successivement, vu la première formule (125) et la seconde (117) (p. 373),

$$\frac{k}{a_1}\sqrt{\tfrac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+K^2}\right)} = \frac{kK}{a_1\sqrt{2\left(1+\sqrt{1+K^2}\right)}} = \frac{a_1 H}{\sqrt{2\mu\left(\mu+\sqrt{\mu^2+\frac{a_1^4 H^2}{k^2}}\right)}}.$$

A valeur constante de k, c'est-à-dire pour des radiations d'une période donnée, ce pouvoir absorbant croît visiblement avec K ou, par suite, avec H et avec le pouvoir réflecteur, comme on l'a déjà dit (p. 380). Mais sa dernière forme montre de plus que, lorsque k varie, sans que H soit trop petit, le dénominateur varie en sens inverse de k, et le numérateur, $a_1 H$, plutôt dans le même sens, par son facteur H, d'après l'analogie tirée de la résistance des fluides (p. 379). Donc le pouvoir absorbant des corps opaques semble devoir, en général, croître avec k, c'est-à-dire en allant du rouge au violet, contrairement au pouvoir réflecteur.

Supposons maintenant le corps *translucide,* ou H assez petit pour que la der-

Dans les milieux *translucides,* où interviendront à la fois, avec des coefficients relatifs d'intensité divers, toutes les causes de dispersion et où, par suite, se combineront les relations (204) et (216), le mode de variation de l'indice N avec la période τ deviendra très complexe et pourra présenter des particularités multiples, comme on le reconnaît par la superposition, dans la formule de N, de tous les petits termes correspondants.

---

nière expression ci-dessus ait son dénominateur très sensiblement réductible à

$$\sqrt{2\mu(\mu+\mu)} = 2\mu.$$

Le pouvoir absorbant devient alors $\frac{a_1 H}{2\mu}$; et il ne varie guère avec k que comme le fait H, c'est-à-dire *peu*, savoir, par un terme proportionnel à $\sqrt{k}$, si l'on continue à suivre l'analogie empruntée à la résistance des fluides. Mais une telle analogie, pour un phénomène dès lors si délicat, devient très incertaine; et tout en continuant à admettre, comme indication générale, une variation du pouvoir absorbant en sens inverse de la période, ou une extinction moins rapide des rayons rouges et infra-rouges que des rayons violets et ultra-violets, il est plus sûr de ne pas admettre de loi absolue et de regarder les absorptions *électives*, c'est-à-dire spéciales aux divers corps, ou dues à des circonstances de structure inconnues, comme dominant dans le phénomène.

SEPTIÈME PARTIE.

POLARISATION ROTATOIRE; DOUBLES RÉFRACTIONS CIRCULAIRE ET ELLIPTIQUE; POLYCHROÏSME.

---

68. **Résistance spéciale de certaines molécules, par laquelle s'expliquera la polarisation rotatoire.** — Il reste à expliquer la polarisation rotatoire. Nous le ferons en admettant dans certaines molécules pondérables une ampleur relative de dimensions, peut-être exceptionnelle, et aussi une forme, qui leur permettront d'accuser, dans leur résistance aux vibrations de l'éther environnant, les minimes différences de phase existant d'un bout à l'autre de leur surface.

Les impulsions de l'éther sur la molécule ne sont plus, alors, tout à fait concordantes, aux divers points de celle-ci. Elles dépendent, d'une part, des accélérations (suivant les axes) de l'éther, que j'appellerai ξ'', η'', ζ'', évaluées pour le centre de la molécule, et, d'autre part, quelque peu aussi des dérivées de ξ'', η'', ζ'' relatives à x, y, z, telles qu'elles seraient également en ce centre; car ces dérivées partielles définissent la manière dont varient, autour de la molécule, ξ'', η'', ζ'' et, par suite, les impulsions de l'éther sur les diverses parties de sa surface. Donc, les trois composantes totales, R_x, R_y, R_z, de la résistance opposée par la molécule pondérable au mouvement vibratoire de l'éther, seront des fonctions linéaires non seulement, comme aux précédents numéros, de ξ'', η'', ζ'', mais aussi des dérivées partielles $\frac{d(\xi'', \eta'', \zeta'')}{d(x, y, z)}$.

Nous avons à nous occuper seulement, ici, des nouveaux termes affectés à ces dérivées; et non pas précisément pour une molécule, mais pour toutes les molécules existant dans une même petite région du corps, où les accélérations ξ'', η'', ζ'' seront sensiblement pareilles, ainsi que leurs dérivées premières en x, y, z. Il s'agira effectivement d'évaluer, par la sommation des résistances individuelles, la résistance totale $(\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y, \mathcal{R}_z)$ exercée sur l'unité de volume d'une particule d'éther. Les coefficients d'une même dérivée de ξ'', η'', ζ'', pour les diverses molécules qui s'y trouvent, s'y associeront donc, d'après la règle des moyennes; et l'on aura des formules de $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$, $\mathcal{R}_z$ compre-

nant, outre les termes donnés par les précédentes formules (4) (p. 271), les nouveaux termes dont il s'agit maintenant, en $\frac{d(\xi'', \eta'', \zeta'')}{d(x, y, z)}$.

Ces termes seront assez petits pour que, vu d'ailleurs (autant qu'il nous est permis d'en juger) le faible degré d'hétérotropie de tous les corps *transparents*, on puisse réduire très sensiblement leurs expressions à ce qu'elles seraient dans un corps *isotrope*, c'est-à-dire dans un corps se comportant de même, relativement à tous les systèmes d'axes coordonnés rectangulaires qui se déduisent de l'un d'eux par une rotation arbitraire autour de l'origine.

Considérons, par exemple, la composante $\mathcal{R}_x$; et contentons-nous d'abord de faire tourner l'ensemble des axes, d'une demi-circonférence, autour de l'un d'eux. Si c'est autour de l'axe des x, $\mathcal{R}_x$, ξ'' et dx ne changeront pas, mais η'', ζ'', dy, dz changeront de signe. Donc les quatre dérivées $\frac{d\xi''}{d(y, z)}$, $\frac{d(\eta'', \zeta'')}{dx}$, qui changeront, ne peuvent pas figurer linéairement dans $\mathcal{R}_x$, resté invariable; et c'est tout au plus si l'expression de $\mathcal{R}_x$ pourra contenir les cinq autres dérivées, $\frac{d\xi''}{dx}$, $\frac{d(\eta'', \zeta'')}{d(y, z)}$. Mais effectuons une pareille rotation des axes autour de celui des y, ou de celui des z. Alors $\mathcal{R}_x$ change de signe; et les trois dérivées directes $\frac{d\xi''}{dx}$, $\frac{d\eta''}{dy}$, $\frac{d\zeta''}{dz}$, qui n'en changent pas, ne peuvent continuer à figurer dans son expression. Celle-ci est ainsi réduite, si α et β désignent deux coefficients spécifiques, à la forme $\rho\alpha\frac{d\eta''}{dz} + \rho\beta\frac{d\zeta''}{dy}$.

Faisons enfin tourner les axes, autour de celui des x, d'un angle droit seulement : ce qui change ζ'' en η'', η'' en $-\zeta''$, dz en dy et dy en $-dz$. La formule de $\mathcal{R}_x$ devient $-\rho\beta\frac{d\eta''}{dz} - \rho\alpha\frac{d\zeta''}{dy}$; et comme elle doit s'être conservée, on ne peut se dispenser de poser $\beta = -\alpha$. Ainsi, les parties à ajouter à la formule (4) de $\mathcal{R}_x$ et, par suite, vu l'isotropie, aux formules analogues (4) de $\mathcal{R}_y$ et $\mathcal{R}_z$, sont respectivement

$$(218) \qquad \rho\alpha\left(\frac{d\eta''}{dz} - \frac{d\zeta''}{dy}\right), \quad \rho\alpha\left(\frac{d\zeta''}{dx} - \frac{d\xi''}{dz}\right), \quad \rho\alpha\left(\frac{d\xi''}{dy} - \frac{d\eta''}{dx}\right).$$

Celles-ci gardent d'ailleurs leur forme et leur coefficient $\rho\alpha$, quand on opère une rotation arbitraire des axes. Car les accélérations ξ'', η'', ζ'' se transformeront évidemment comme des déplacements ξ, η, ζ; et les expressions (218) seront assimilables à des *rotations moyennes*,

dont elles ont les formules (à un facteur constant près). Si, par exemple, une rotation quelconque des axes amène les x dans une direction définie (relativement aux x, y, z primitifs) par trois cosinus directeurs donnés a, b, c, la résistance suivant ce nouvel axe sera, comme on sait, $a\mathcal{R}_x + b\mathcal{R}_y + c\mathcal{R}_z$, ou, quant à sa partie dépendant des dérivées de ξ'', η'', ζ'',

$$\rho\alpha\left[a\left(\frac{d\eta''}{dz} - \frac{d\zeta''}{dy}\right) + b\left(\frac{d\zeta''}{dx} - \frac{d\xi''}{dz}\right) + c\left(\frac{d\xi''}{dy} - \frac{d\eta''}{dx}\right)\right].$$

Or l'expression qui y multiplie $\rho\alpha$ est justement la composante, relative au nouvel axe, d'une rotation moyenne dont les composantes relatives aux axes primitifs seraient $\frac{d\eta''}{dz} - \frac{d\zeta''}{dy}$, $\frac{d\zeta''}{dx} - \frac{d\xi''}{dz}$, $\frac{d\xi''}{dy} - \frac{d\eta''}{dx}$; car les rotations moyennes se composent et décomposent, tout comme les rotations, à la manière des forces.

Les nouveaux termes (218) disparaîtraient, si la contexture du corps admettait un *plan de symétrie,* celui des xy, par exemple, ou qu'on pût renverser le sens d'un axe, de l'axe des z, sans changer les expressions de $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$, $\mathcal{R}_z$. Car, par exemple, ce renversement du sens des z, qui altère le signe de la première expression (218) en y changeant ζ en $-\zeta$ et dz en $-dz$, devrait cependant ne pas modifier $\mathcal{R}_x$. On serait donc forcé de poser $\alpha = 0$.

Ainsi, un liquide contenant en dissolution, orientées indifféremment dans tous les sens, soit des molécules *symétriques* (pourvues d'un plan de symétrie), soit, par égales quantités, des molécules *dissymétriques* (sans plan de symétrie) et les symétriques de celles-là, ne pourra donner lieu à des résistances où figurent les termes (218). Et les parties de la résistance, qui dépendent des petites inégalités de la phase des mouvements aux divers points de leur surface, s'y évanouiront, quoique ces molécules puissent être aussi étendues ou même plus étendues que celles des corps où $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$, $\mathcal{R}_z$ manifestent de telles différences de phase.

69. Ondes planes à vibrations circulaires. — Supposons d'abord isotrope le corps considéré, ce que l'on pourra admettre si c'est une dissolution fluide. Alors divisons par μ les équations (6) du mouvement (p. 272), où A, B, C seront égaux, D, E, F, D', E', F' nuls, et aux premiers membres desquelles on aura joint les termes (218). Puis posons, comme plus haut,

(219) $$\frac{\rho(1+A)}{\mu} = \frac{1}{a^2}, \quad \text{et, en outre,} \quad \frac{\rho\alpha}{\mu} = \frac{2g}{a},$$

où g désignera ainsi un nouveau coefficient spécifique dérivé de α. D'ailleurs, rien n'empêche, s'il doit être question de vibrations pendulaires, que A et μ comprennent implicitement leur petite partie, dont il a été parlé plus haut (p. 433 et 440), proportionnelle, directement pour A et inversement pour μ, au carré de la période. Les trois équations, condensées en une, seront alors :

$$(220)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\xi}{a^2}+\frac{2g}{a}\left(\frac{d\eta}{dz}-\frac{d\zeta}{dy}\right),\right.\\ &\qquad\frac{\eta}{a^2}+\frac{2g}{a}\left(\frac{d\zeta}{dx}-\frac{d\xi}{dz}\right),\\ &\qquad\left.\frac{\zeta}{a^2}+\frac{2g}{a}\left(\frac{d\xi}{dy}-\frac{d\eta}{dx}\right)\right]=\Delta_2(\xi,\eta,\zeta)-\frac{d\theta}{d(x,y,z)}.\end{aligned}\right.$$

On pourra supprimer, aux seconds membres, les termes en θ; car ces trois équations (220), différentiées en x, y, z et ajoutées, donnent $\frac{d^2\theta}{dt^2}=0$, comme dans le cas $g=0$; et il en résulte de même, pour les catégories de mouvements que l'on étudie,

$$(220\ bis)\qquad \theta=0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}=0.$$

Bornons-nous au cas d'ondes planes se propageant, à vibrations pendulaires; et choisissons le sens de leur progression pour celui des z positifs.

Les déplacements ξ, η, ζ y seront fonction, à une première approximation, de la variable unique ordinaire $t-lx-my-nz$, ici réduite à $t-nz$ ou à $t-\frac{z}{\omega}$, et qui, à une approximation plus élevée, devient seulement leur variable *principale*, x, y, z pouvant alors figurer comme variables accessoires, corrélatives à des variations *lentes*. Ces déplacements ξ, η, ζ ont ainsi la forme $A\cos[a+k(t-nz)]$, avec k, n constants et communs aux trois, mais avec A et a propres à chacun et *un peu* fonctions de x, y, z. Reculons-y de $\frac{\pi}{2k}$, vers le passé, l'origine des temps, ou remplaçons kt par $kt-\frac{\pi}{2}$: ils constitueront alors une deuxième solution particulière des équations (220), mais avec des sinus au lieu de cosinus. Et si enfin nous ajoutons ces nouvelles expressions de ξ, η, ζ, multipliées par $\sqrt{-1}$, aux proposées, les trois sommes respectives fourniront encore une solution, mais symbolique, de la forme

$$A e^{[a+k(t-nz)]\sqrt{-1}}=\left(A e^{a\sqrt{-1}}\right)e^{k(t-nz)\sqrt{-1}}$$

pour chaque déplacement, solution où la partie réelle ne sera autre que la fonction proposée ξ, η, ζ elle-même.

Ainsi, *les vraies expressions de* ξ, η, ζ *correspondant à des ondes planes, propagées dans une direction donnée et à vibrations pendulaires, pourront toujours s'obtenir par la formation d'intégrales symboliques, dont elles constitueront la partie réelle, et où* ξ, η, ζ *seront les produits respectifs de trois fonctions imaginaires* L, M, N, *lentement variables, de* x, y, z, *par une même exponentielle de la forme* $e^{k(t-lx-my-nz)\sqrt{-1}}$, réduite ici à $e^{k(t-nz)\sqrt{-1}}$ ou à $e^{k\left(t-\frac{z}{\omega}\right)\sqrt{-1}}$, l, m, n, ω *étant réels et constants, comme* k.

Nous prendrons, par conséquent,

$$(221)\qquad \xi = \mathrm{L}\,e^{k\left(t-\frac{z}{\omega}\right)\sqrt{-1}},\qquad \eta = \mathrm{M}\,e^{k\left(t-\frac{z}{\omega}\right)\sqrt{-1}},\qquad \zeta = \mathrm{N}\,e^{k\left(t-\frac{z}{\omega}\right)\sqrt{-1}};$$

et, abstrayant d'abord les lentes variations de L, M, N, ou supposant latéralement indéfinies les ondes, nous ferons L, M, N constants.

Or ces expressions imaginaires de ξ, η, ζ, portées, en premier lieu, dans (220 *bis*), donnent

$$(222)\qquad \mathrm{N} = 0 \quad \text{ou} \quad \zeta = 0,$$

relation indiquant la transversalité du mouvement vibratoire.

En substituant ensuite les deux premières, ξ, η, dans (220) et multipliant les résultats par $a^2\omega^2$, il vient

$$(223)\qquad \begin{cases} (\omega^2 - a^2)\,\mathrm{L} - \left(2gka\omega\sqrt{-1}\right)\mathrm{M} = 0, \\ \left(2gka\omega\sqrt{-1}\right)\mathrm{L} + (\omega^2 - a^2)\,\mathrm{M} = 0. \end{cases}$$

Ajoutons celles-ci, multipliées respectivement par $-\mathrm{M}$ et par L. La suppression du facteur commun $2gka\omega\sqrt{-1}$ donnera $\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 = 0$, ou $\mathrm{M} = \pm \mathrm{L}\sqrt{-1}$. C'est dire que l'on a

$$(224)\qquad \text{soit}\quad \mathrm{M} = -\mathrm{L}\sqrt{-1},\qquad \text{soit}\quad \mathrm{M} = \mathrm{L}\sqrt{-1}.$$

Les deux vitesses ω_1, ω_2 de propagation correspondantes, essentiellement positives par hypothèse, sont données ensuite par les équations (223), réduites à

$$(225)\qquad \omega_1^2 - 2gka\omega_1 = a^2,\qquad \omega_2^2 + 2gka\omega_2 = a^2.$$

Leur expression est donc $a\left(\pm gk + \sqrt{1+g^2k^2}\right)$, ou, très sensiblement et en les séparant,

$$(226)\qquad \omega_1 = a(1+gk),\qquad \omega_2 = a(1-gk).$$

Laissons subsister L comme coefficient arbitraire (de la forme $Ce^{c\sqrt{-1}}$), dans les deux solutions simples ainsi obtenues. Les parties réelles des expressions (221) de ξ et η donneront alors, pour les déplacements effectifs des molécules dans ces deux systèmes d'ondes planes, à un facteur constant près et en choisissant convenablement, dans chacun, l'origine des temps :

$$(227) \qquad \xi = \cos\left(kt - \frac{kz}{\omega_1}\right), \qquad \eta = \sin\left(kt - \frac{kz}{\omega_1}\right);$$

$$(228) \qquad \xi = \cos\left(kt - \frac{kz}{\omega_2}\right), \qquad \eta = -\sin\left(kt - \frac{kz}{\omega_2}\right).$$

On a, *dans tous les deux,* $\xi^2 + \eta^2 = \text{const.}$: donc *les molécules y décrivent des cercles.* Mais ces cercles sont parcourus, dans le premier système d'ondes, en tournant suivant le sens que nous appellerons *direct* et qui, dans l'angle des xy positifs, va des x positifs vers les y positifs, tandis qu'ils le sont en sens *inverse* dans le second système.

70. Polarisation rotatoire, pouvoir rotatoire des dissolutions. — La superposition des deux solutions simples donne une nouvelle solution, où les vibrations sont rectilignes, savoir :

$$(229) \quad \begin{cases} \xi = 2\cos\left[\frac{k}{2}\left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_1}\right)z\right]\cos\left[kt - \frac{k}{2}\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right)z\right], \\ \eta = 2\sin\left[\frac{k}{2}\left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_1}\right)z\right]\cos\left[kt - \frac{k}{2}\left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2}\right)z\right]; \end{cases}$$

ou, vu les formules approchées (226),

$$(229\ bis) \quad \begin{cases} \xi = 2\cos\frac{gk^2z}{a}\cos\left(kt - \frac{kz}{a}\right), \\ \eta = 2\sin\frac{gk^2z}{a}\cos\left(kt - \frac{kz}{a}\right). \end{cases}$$

La vibration s'y fait dans le plan dont l'azimut φ a pour tangente $\frac{\eta}{\xi}$, c'est-à-dire $\tang\frac{gk^2z}{a}$, et a, par suite, la valeur

$$(230) \qquad \varphi = \frac{gk^2z}{a}.$$

L'azimut de polarisation varie donc proportionnellement au

chemin parcouru z. C'est en cela même que consiste la rotation du plan de polarisation, ou la *polarisation rotatoire*.

D'après la formule (230), cette rotation, dans les dissolutions transparentes considérées ici, est, conformément à la loi expérimentale approchée de Biot, proportionnelle à k^2, c'est-à-dire inverse du carré de la période, quand on regarde a comme indépendant de k, ou que l'on néglige la dispersion.

Nous avons vu que, dans les expressions (218), le coefficient α s'était formé (à un facteur constant près) par simple addition de coefficients analogues, relatifs à chacune des molécules pondérables existant dans l'unité de volume du corps et supposées *actives*, c'est-à-dire pourvues, dans leur résistance à l'éther, de termes dépendant des dérivées en x, y, z des accélérations. Il en sera de même, d'après la seconde formule (219), du coefficient g, pourvu toutefois que les molécules actives soient, dans le milieu, en proportion insuffisante pour influer notablement sur la vitesse a de la lumière.

Comme cette condition sera le plus souvent réalisée dans les solutions salines ou autres, on voit qu'alors, si la solution ne contient qu'une seule espèce de molécules actives, orientées, d'ailleurs, indifféremment en tous sens, le coefficient g sera proportionnel à la densité partielle de la substance active dans le milieu. Son rapport à cette densité mesure le *pouvoir rotatoire* de la substance. Et s'il y a plusieurs espèces de matières actives, mais sans action chimique les unes sur les autres ou n'altérant pas mutuellement leurs molécules, le pouvoir rotatoire de la dissolution se formera évidemment, comme le pouvoir réfringent, par la simple règle des mélanges.

On sait que toutes ces lois sont conformes à l'observation.

71. Perpendicularité des rayons aux plans d'onde, dans les ondes à vibrations circulaires. — Mais revenons aux solutions simples symboliques (221), pour y tenir compte des lentes variations de L, M, N avec x, y, z. Les dérivées premières de L, M, N s'écriront donc par les notations $\dfrac{\partial}{\partial(x, y, z)}$ et leurs dérivées secondes seront négligeables. Comme, dès lors, l'équation $\theta = 0$ deviendra

$$-\frac{k}{\omega}\sqrt{-1}\,N + \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0,$$

N sera de l'ordre des petites dérivées de L, M ; et ses propres dérivées s'évanouiront, réduisant ainsi, dans la troisième équation (220), $\Delta_2\zeta$ à $-\dfrac{k^2}{\omega^2}\zeta$ et faisant disparaître ζ des deux premières équations (220).

Vu que, d'ailleurs, $\Delta_2(\xi, \eta)$, réduits à $\frac{d^2(\xi,\eta)}{dz^2}$, vaudront

$$\frac{(\xi'', \eta'')}{\omega^2} - \frac{2}{\omega}\frac{\partial(\xi', \eta')}{\partial z} = -\frac{k^2}{\omega^2}(\xi, \eta) - \frac{2k\sqrt{-1}}{\omega}\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial z},$$

ces deux premières équations (220), multipliées par $a^2\omega^2$, deviendront immédiatement, au lieu de (223) :

$$(223\ bis)\quad \begin{cases} (\omega^2 - a^2)L - (2gka\omega\sqrt{-1})M = -2ga\omega^2\frac{\partial M}{\partial z} + \frac{2a^2\omega\sqrt{-1}}{k}\frac{\partial L}{\partial z}, \\ (2gka\omega\sqrt{-1})L + (\omega^2 - a^2)M = +2ga\omega^2\frac{\partial L}{\partial z} + \frac{2a^2\omega\sqrt{-1}}{k}\frac{\partial M}{\partial z}. \end{cases}$$

Multipliées respectivement par $-M$, L, et ajoutées, elles donnent

$$(2gka\omega\sqrt{-1})(L^2 + M^2)$$
$$= 2ga\omega^2\left(L\frac{\partial L}{\partial z} + M\frac{\partial M}{\partial z}\right) + \frac{2a^2\omega\sqrt{-1}}{k}\left(L\frac{\partial M}{\partial z} - M\frac{\partial L}{\partial z}\right).$$

Substituons à M, dans le second membre, *qui est très petit*, les valeurs de première approximation $\mp L\sqrt{-1}$, et l'équation reste, *même à la deuxième approximation*,

$$(2gka\omega\sqrt{-1})(L^2 + M^2) = 0,$$

continuant ainsi à donner $M = \mp L\sqrt{-1}$, ou à imposer aux orbites de l'éther la forme circulaire, *en projection sur les plans d'onde.*

Dès lors, les deux équations (223 *bis*) se réduisent à l'une d'elles, dont le premier membre est même annulé identiquement par la relation (225) qui a déterminé ω; et l'on a simplement, après suppression du facteur $2a\omega\sqrt{-1}$,

$$\left(\frac{a}{k} + g\omega\right)\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = 0.$$

C'est donc selon le sens des z que ξ et, par suite, η conservent leurs valeurs, sur chaque onde plane suivie dans sa propagation. Ainsi, *les rayons lumineux, à vibrations circulaires, que transmettent les corps transparents isotropes-dissymétriques, sont perpendiculaires à leurs plans d'onde;* et, si l'on décrit deux sphères concentriques de rayons respectifs ω_1 et ω_2, constituant ensemble l'*onde courbe* enveloppe des ondes planes de toute direction dont les milieux auront passé simultanément par son centre depuis une unité de temps, le rayon lumineux suivi par le milieu de l'une de ces ondes sera la droite

joignant le centre au point de contact de l'onde plane correspondante avec l'onde courbe.

L'équation $\theta = 0$, devenue d'ailleurs,

$$\left(\frac{k}{\omega}\sqrt{-1}\right) N = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial x} \mp \sqrt{-1}\,\frac{\partial L}{\partial y},$$

fera connaître N, c'est-à-dire le petit déplacement symbolique ζ, puis, par la partie réelle de celui-ci, le petit déplacement *longitudinal* effectif ζ. Et la troisième équation (220), réduite à

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) N = -\frac{2g}{a}\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right) = -\frac{2g}{a}\left(\frac{\partial L}{\partial y} \pm \sqrt{-1}\,\frac{\partial L}{\partial x}\right),$$

deviendra, vu (225), identique à la relation $\theta = 0$ ci-dessus. On savait, en effet, que celle-ci peut remplacer l'un des trois (220).

Remarquons que L, de la forme $Ce^{c\sqrt{-1}}$, reste une fonction lentement variable sans doute, mais *arbitraire*, de x et de y, permettant ainsi, dans le milieu dissymétrique, *une délimitation latérale quelconque* des rayons, non moins que dans un milieu symétrique.

72. Conditions définies, spéciales aux surfaces séparatives. — Prenons pour plan $x = 0$ des yz le feuillet moyen de la mince couche de transition existant entre deux milieux homogènes et isotropes dissymétriques. Les considérations qui, au n° 31, ont permis d'établir les conditions définies (90) (p. 343) s'appliqueront encore, malgré la présence, dans les termes en g des deux dernières équations (220), des dérivées premières en x de ζ'' et de η''. Car la petitesse du coefficient g assurera leur valeur finie à une première approximation; et comme, dès lors, η, ζ seront graduellement variables avec x, ainsi que, par suite, leurs dérivées secondes en t, la démonstration subsistera même à une approximation plus élevée. Donc on aura toujours les quatre conditions définies (90), exprimant l'égalité des rotations moyennes et des déplacements tangentiels dans les deux milieux contigus, à leur limite commune.

D'ailleurs la relation $\theta = 0$ ne laisse encore distinctes que deux des fonctions ξ, η, ζ; et il y a lieu de continuer à juger suffisantes ces quatre conditions (90). En effet, malgré les nouveaux termes (en g), les relations définies (220) restent du second ordre *quant aux dérivées relatives à* x, y, z, les seules à considérer dans la fixation du nombre des relations définies, spéciales aux surfaces limites.

73. Double réfraction circulaire. — Cela posé, imaginons qu'un

rayon lumineux à cosinus directeurs donnés ($\cos i$, $\sin i$, zéro), traversant le premier milieu (situé du côté des x négatifs) et exprimé par la partie réelle d'un système d'intégrales symboliques dans le genre des précédentes (221), atteigne la surface séparative à l'origine des coordonnées. Si l'on y appelle ω la vitesse de propagation, l, m les deux quotients $\frac{(\cos i, \sin i)}{\omega}$ et A le coefficient réel ou imaginaire d'amplitude $Ce^{c\sqrt{-1}}$, très lentement variable de l'axe du rayon aux parallèles qu'on lui mène dans le voisinage, les composantes de l'amplitude suivant les x et les y, c'est-à-dire dans ξ et η, seront les deux *projections* (en quelque sorte) $-A\sin i$, $A\cos i$, ou $-Al\omega$, $Am\omega$, de A, tandis que, dans ζ, suivant la direction des z, parallèle aux ondes, où l'écart de phase d'avec les autres composantes est $\frac{\pi}{2}$, mais où l'amplitude atteint sa valeur totale C, le coefficient analogue sera $Ae^{\mp\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$, c'est-à-dire $\mp A\sqrt{-1}$, les signes supérieur et inférieur correspondant respectivement au sens *direct* et au sens *inverse* du mouvement de l'éther dans ses orbites circulaires. Ainsi, les formules de ξ, η, ζ, pour le rayon incident, seront les parties réelles des trois expressions *données*

$$(\xi, \eta, \zeta) = A(-l\omega, m\omega, \mp\sqrt{-1})\, e^{k(t-lx-my)\sqrt{-1}}.$$

Devant avoir à vérifier, pour $x=0$, les quatre conditions (90), il convient de n'associer à ce rayon incident que des rayons réfléchis et réfractés, de formes analogues, où l'exponentielle se réduise alors à $e^{k(t-my)\sqrt{-1}}$ et, se trouvant facteur commun dans tous les termes de (90), réduise ces quatre conditions à de simples équations entre constantes; car on peut y négliger, comme aux n°s 32 à 45 (p. 350 à 393), sauf d'insignifiantes erreurs relatives, les petites variations d'amplitude et de phase existant d'un point à l'autre d'une même onde. Ainsi, d'une part, les normales menées de l'origine aux ondes réfléchies et réfractées seront toutes dans le plan des xy; d'autre part, le quotient m de tout sinus soit de réflexion, soit de réfraction, par la vitesse de propagation des ondes réfléchies ou réfractées correspondantes, devra avoir la valeur donnée $\frac{\sin i}{\omega}$.

C'est dire que la construction d'Huygens s'appliquera. Mais comme, ici, la surface d'onde courbe relative à chaque milieu consiste en deux sphères décrites autour de l'origine comme centre, ou que tout rayon lumineux coïncide avec la normale à ses ondes, les rayons soit réflé-

chis, soit réfractés, se construiront, *dans le plan même d'incidence*, au moyen de la simple proportion de Descartes ou des sinus.

Il y aura ainsi, pour le rayon incident proposé, quatre rayons réfléchis ou réfractés distincts, réels ou imaginaires, un par nappe sphérique d'onde courbe dans chaque milieu ou par valeur possible du paramètre analogue à l. Nous appellerons cette valeur l' et l'' dans les deux rayons réfléchis, l_1 et l_2 dans les deux rayons réfractés, valeur (quand elle se trouve réelle) négative pour les deux premiers, dirigés vers la région des x négatifs, et positive pour les deux derniers, qui vont dans la région des x positifs : ω' et ω'' (dont l'une se confondra avec ω), ω_1 et ω_2 désigneront les vitesses de propagation correspondantes, constantes et connues. Enfin A′ et A″, A_1 et A_2 seront les coefficients d'amplitude, à déterminer, affectant respectivement

$$\left(-l'\omega', m\omega', -\sqrt{-1}\right)e^{k(t-l'x-my)\sqrt{-1}}, \quad \left(-l''\omega'', m\omega'', \sqrt{-1}\right)e^{k(t-l''x-my)\sqrt{-1}},$$
$$\left(-l_1\omega_1, m\omega_1, -\sqrt{-1}\right)e^{k(t-l_1x-my)\sqrt{-1}}, \quad \left(-l_2\omega_2, m\omega_2, \sqrt{-1}\right)e^{k(t-l_2x-my)\sqrt{-1}},$$

dans les expressions symboliques des déplacements ξ, η, ζ réfléchis ou réfractés. Alors les conditions (90) (p. 343), dont deux contiendront seulement ξ, η ou leurs dérivées premières en x, y, et les deux autres, seulement ζ ou sa dérivée en x, sur les deux faces du plan $x = 0$, deviendront les quatre équations du premier degré, homogènes en A, A′, A″, A_1, A_2, justement nécessaires et suffisantes pour déterminer les quatre rapports $\frac{(A', A'', A_1, A_2)}{A}$. Le problème des *doubles réflexion et réfraction circulaires* sera donc résolu.

On voit que, si les rayons tant réfléchis que réfractés se trouvent réels *tous les quatre*, ou qu'aucun des paramètres l', l'', l_1, l_2 ne soit imaginaire, le symbole $\sqrt{-1}$ ne figurera pas dans ces équations, après suppression de facteurs communs évidents. Il y aura donc, à la surface $x = 0$ et aux diverses époques t, simple proportionnalité des déplacements réfléchis ou réfractés, suivant un axe quelconque, au déplacement incident *suivant le même axe*, c'est-dire *synchronisme* des mouvements sur *tous* les rayons, comme dans les réflexion et réfraction simples, sans différences de phase autres que des demi-périodes, produisant suivant chaque axe de simples renversements de sens.

Quand le premier milieu devient symétrique, par l'annulation de son coefficient g, les deux sphères constituant sa surface d'onde courbe se confondent, et l'on obtient, pour deux rayons incidents de même direction à vibrations circulaires inverses, où nous appellerons A et B les coefficients respectifs donnés d'amplitude, les mêmes

valeurs de l', l'', l_1, l_2, dont les deux premières égalent alors $-l$. Donc la superposition de ces deux rayons incidents conduit à superposer aussi, sur les mêmes voies d'ébranlement, les vibrations réfléchies et réfractées respectives. On n'a ainsi que deux rayons réfractés distincts et un seul rayon réfléchi, au lieu de quatre réfractés et de trois réfléchis (deux réfléchis, inclinés d'un même angle $\pi - i$ sur les x positifs, se confondant toujours). De plus, il suffira d'adopter deux nouvelles constantes arbitraires, égales à $(A - B)\sqrt{-1}$ et à $A + B$, pour réduire le mouvement transversal, sur le rayon incident composé (où les vibrations circulaires de sens inverses auront mêmes vitesses de propagation et garderont partout leurs différences de phase), à deux composantes rectilignes mutuellement indépendantes, l'une suivant les z, l'autre suivant la direction perpendiculaire transversale, c'est-à-dire pour réduire le mouvement incident à des vibrations élémentaires rectilignes et non circulaires.

Nous savons, par les théories des réflexion et réfraction simples, que, si le second milieu devenait également symétrique, la même réduction aurait lieu sur les rayons réfléchis et réfractés : preuve qu'alors chacun des deux rayons incidents rectilignes élémentaires donnerait deux rayons égaux soit réfléchis, soit réfractés, à vibrations circulaires inverses, animés des mêmes vitesses de propagation et produisant ainsi, par leur superposition, des rayons rectilignement polarisés.

Le coefficient g est, dans tous les corps, assez petit pour qu'on puisse effectivement, aux distances d'une surface séparative comparables à la longueur d'onde, raisonner comme si les milieux étaient symétriques et, par conséquent, se dispenser d'y décomposer un rayon incident, rectilignement polarisé, en deux rayons égaux à vibrations circulaires de sens inverses, mais évaluer dans l'hypothèse de coefficients g nuls les rayons réfléchi et réfracté, rectilignes aussi, qui en résulteraient.

Cela revient à faire abstraction de la dissymétrie, *seulement* dans les calculs d'amplitudes vibratoires, pourvu que l'on dédouble ensuite les rayons rectilignes, réfléchi et réfracté, ainsi obtenus, en deux circulaires égaux et inverses à chacun desquels on attribue alors la vitesse de propagation qui lui est spéciale, légèrement différente de celle de son conjugué inverse. Et on lui attribuera aussi, par suite, la direction corrélative, ou propre, assignée par la loi des sinus, si du moins on doit suivre les deux rayons circulaires jusqu'aux distances où ils se séparent.

Les deux milieux pourraient ne différer que par le signe ou la gran-

deur de g [1]. Alors l'annulation de la dissymétrie, dans les conditions relatives à leur limite mutuelle, les rendrait fictivement identiques; et il est clair que les rayons ou rectilignes, ou circulaires, passeraient de l'un à l'autre sans dédoublement ni altération (soit de phase, soit d'amplitude) appréciables. Les changements seuls de leurs vitesses de propagation et, par suite, de leurs directions, dont les effets *observables* croissent comme la longueur des trajets parcourus, seraient perceptibles. Et ils obligeraient à choisir comme éléments, dans la question, des rayons circulaires; car les rectilignes ne constituent plus des solutions simples dès qu'intervient la dissymétrie.

74. Double réfraction elliptique. — Supposons enfin qu'un corps homogène transparent, sensiblement isotrope quant aux petits termes (218) (p. 456), soit hétérotrope, quant aux termes principaux (4) (p. 271) de sa résistance ($\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$, $\mathcal{R}_z$) aux vibrations de l'éther. Dans tout système d'axes rectangulaires, les équations de mouvement y seront donc (6) (p. 272), avec $D' = D$, $E' = E$, $F' = F$, accrues, aux premiers membres, des expressions respectives (218).

Pour traiter d'abord le cas le plus simple, admettons que notre corps soit, abstraction faite des termes en g, un cristal uniaxe, parcouru par des ondes planes sensiblement normales à l'axe. Si nous prenons celui-ci pour axe des z, nous aurons $(D, E, F) = 0$, $B = A$; de sorte que les équations du mouvement seront les précédentes (220) (p. 458), dans la troisième desquelles seulement il faudra remplacer a, au premier terme, par une autre constante c. Dès lors, la relation obtenue en différentiant respectivement ces équations par rapport à x, y, z et ajoutant n'est plus $\theta = 0$, mais

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{d\zeta}{dz} = 0.$$

Or, pour les ondes planes parallèles aux xy, où la variable principale ne contient que la coordonnée z, ξ, η, ζ ne dépendent de x et de y que par leurs variations *lentes;* et cette relation donne ζ de l'ordre de petitesse des $\dfrac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}$, tout comme quand on avait $c = a$. Il en résulte donc les mêmes conséquences qu'au n° 71 (p. 462), relati-

(1) C'est ce qui arrive quand ce sont deux mélanges de même densité, mais à proportions inégales, de molécules individuellement dissymétriques, d'une composition chimique commune, mais de deux formes géométriques distinctes, symétriques l'une de l'autre.

vement à la disparition de ζ dans les deux premières équations (220) et, par suite, aux lois des déplacements *transversaux* ξ, η. La nouvelle constante c n'influe que sur le déplacement *longitudinal* ζ, ici insignifiant. Donc les phénomènes observables seront ceux d'un milieu isotrope dissymétrique où l'on aurait $c=a$; et, par raison de continuité, il en sera sensiblement de même si les ondes font de petits angles avec le plan des xy.

Comme, d'ailleurs, les relations définies (90) continueront visiblement à subsister aux surfaces séparatives de tels milieux, et même avec des ondes planes d'orientation arbitraire, il est clair que les lois précédentes de la double réfraction circulaire s'observeront pour tous les rayons presque parallèles à l'axe. C'est, en particulier, ce qui a lieu dans le quartz : fait remarquable, découvert et constaté par Fresnel.

Mais passons à des ondes planes de direction quelconque. En raison de la complication des calculs, nous nous y bornerons ([1]) au cas simple où leur amplitude sera supposée uniforme et, par suite, leur étendue, indéfinie latéralement, comme il s'en produira, par exemple, un système de parallèles à la surface, à l'entrée dans le corps par une face plane, si un tel système extérieur, venu de l'infini, atteint cette face sous l'incidence normale.

Afin de pouvoir employer, dans notre présente étude, les formules symboliques simples (221) de ξ, η, ζ, fonctions de t et de z seulement, adoptons, comme aux numéros 69 à 71, un axe des z dirigé suivant le sens de la progression même des ondes, et associons-lui, comme axes des x et des y, les axes mêmes de l'ellipse d'intersection de l'ellipsoïde inverse par un plan d'onde diamétral. Les expressions (218) deviendront respectivement

$$(231)\qquad \rho\alpha\frac{d^3\eta}{dt^2\,dz},\quad -\rho\alpha\frac{d^3\xi}{dt^2\,dz},\quad \text{zéro}.$$

Elles ne donneront donc rien dans la troisième des équations (6) (p. 272) qui aura, d'ailleurs, son second membre identiquement nul. Cette troisième équation (6), ainsi devenue, après suppression du facteur ρ,

$$\frac{d^2}{dt^2}[\mathrm{E}\xi+\mathrm{D}\eta+(1+\mathrm{C})\zeta]=0,$$

conduira évidemment, pour les catégories de phénomènes étudiées, à

([1]) Du moins dans le texte; car la note des pages 472 à 476 aura pour but le cas d'ondes latéralement limitées.

l'intégrale

$$(232)\quad E\xi + D\eta + (1 + C)\zeta = 0 \qquad \text{ou} \qquad \zeta = -\frac{E}{1+C}\xi - \frac{D}{1+C}\eta.$$

Éliminons donc, par cette formule, ζ des deux premières équations (6), qui ont actuellement pour seconds membres $\mu\frac{d^2\xi}{dz^2}$ et $\mu\frac{d^2\eta}{dz^2}$. La première, par exemple, en n'y comprenant pas encore le terme (231) correspondant, sera

$$(233)\quad \rho\left(1 + A - \frac{E^2}{1+C}\right)\frac{d^2\xi}{dt^2} + \rho\left(F - \frac{DE}{1+C}\right)\frac{d^2\eta}{dt^2} = \mu\frac{d^2\xi}{dz^2}.$$

Or nous savons que les deux vibrations rectilignes alors possibles sont respectivement parallèles aux deux plans des zx et des zy, de manière que l'on puisse poser soit $\eta = 0$, soit $\xi = 0$. L'équation (233) admet donc des solutions où ξ est nul, mais non η. Cela exige que l'on ait

$$F - \frac{DE}{1+C} = 0.$$

Ainsi, les fonctions ξ, η se séparent, dans l'équation (233) et dans son analogue en η. Alors, d'après (233), $\frac{\rho}{\mu}\left(1 + A - \frac{E^2}{1+C}\right)$ est l'inverse du carré de la vitesse avec laquelle se propage la vibration parallèle aux zx, dans l'hypothèse présente où les termes (231) n'existent pas. Appelons a cette vitesse de propagation, b la vitesse analogue pour la vibration orientée dans le plan des zy; et admettons, afin de fixer les idées, que l'on ait choisi les axes de manière à avoir $a > b$.

Cela fait, restituons aux premiers membres de l'équation (233) et de son analogue en η les termes correspondants (231). Après division par μ, nous pourrons poser, pareillement à (219) (p. 457),

$$(234)\quad \begin{cases} \frac{\rho}{\mu}\left(1 + A - \frac{E^2}{1+C}\right) = \frac{1}{a^2}, \qquad \frac{\rho}{\mu}\left(1 + B - \frac{D^2}{1+C}\right) = \frac{1}{b^2}, \\ \qquad\qquad \frac{\rho\alpha}{\mu} = \frac{2g}{\sqrt{ab}}; \end{cases}$$

et les équations définitives en ξ, η seront

$$(235)\quad \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\xi}{a^2} + \frac{2g}{\sqrt{ab}}\frac{d\eta}{dz}\right) = \frac{d^2\xi}{dz^2}, \qquad \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\eta}{b^2} - \frac{2g}{\sqrt{ab}}\frac{d\xi}{dz}\right) = \frac{d^2\eta}{dt^2}.$$

On aura, par suite, au lieu des relations (223) du cas précédent :

$$(236)\quad \begin{cases} (\omega^2 - a^2)L - \left(2gk\,a\,\omega\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{-1}\right)M = 0, \\ \left(2gk\,b\,\omega\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{-1}\right)L + (\omega^2 - b^2)M = 0. \end{cases}$$

L'élimination du rapport $\frac{L}{M}$ entre elles donne l'équation aux vitesses de propagation

$$(237)\quad (\omega^2 - a^2)(\omega^2 - b^2) = 4g^2k^2 ab\,\omega^2.$$

Celle-ci peut, dans la pratique, être résolue en négligeant les termes en g^2, sauf sous le radical, où ils figurent à côté d'un carré également très petit $(a^2 - b^2)^2$, mais où le produit $(a^2 + b^2)k^2$ pourra, tout de même, être remplacé par $2ab\,k^2$. On aura ainsi

$$(238)\quad \omega^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{2}\right)^2 + 4g^2a^2b^2k^2}.$$

Nous appellerons ω_1 la vitesse de propagation la plus grande, celle qui serait a si g tendait vers zéro, et ω_2 la plus petite. Comme le radical sera très petit par rapport au terme qui le précède, la différence, $\omega_1 - \omega_2$ ou $\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{\omega_1 + \omega_2}$, de ces deux vitesses pourra s'écrire $\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\sqrt{ab}}$. On aura donc

$$(239)\quad \omega_1 - \omega_2 = \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{2\sqrt{ab}}\right)^2 + 4g^2ab\,k^2}.$$

Admettons que la direction des ondes soit définie par les deux angles U′ et U″ (toujours compris entre zéro et π) de leur normale avec les deux normales aux sections circulaires de l'ellipsoïde. Alors la différence $a^2 - b^2$ sera celle des deux expressions de ω^2 données par la formule (186) (p. 425), où l'on aura $\nu = 0$, c'est-à-dire justement la quantité R fournie par la formule (195) (p. 427), et égale à $(a^2 - c^2)\sin U' \sin U''$. Et, vu d'ailleurs que $a^2 - c^2$ ne différera pas sensiblement de $(a - c)\,2\sqrt{ac}$, ni (sous le radical) ab de ac, il viendra

$$(240)\quad \omega_1 - \omega_2 = \sqrt{(a - c)^2 \sin^2 U' \sin^2 U'' + 4g^2ac\,k^2}.$$

Occupons-nous maintenant des rapports de L à M ou de M à L, définis par les relations (236), compatibles grâce à (237). Sauf dans les petites différences $\omega^2 - a^2$, $\omega^2 - b^2$, que donnera la formule (238),

a, b, ω pourront y être faits égaux à $\sqrt{ac}$. Et, par exemple, dans le cas de la racine ω_1, nous aurons

$$(241)\qquad M = -qL\sqrt{-1},$$

si l'on pose

$$q = \frac{\omega_1^2 - a^2}{2gack} = \frac{2gack}{\omega_1^2 - b^2}.$$

Substituons à $\omega_1^2 - b^2$ la valeur tirée de (238), où nous mettrons ensuite pour $\frac{1}{2}(a^2 - b^2)$ son expression déjà employée ci-dessus,

$$\sqrt{ac}(a-c)\sin U' \sin U''.$$

Il viendra

$$(242)\qquad q = \frac{2g\sqrt{ac}\,k}{(a-c)\sin U' \sin U'' + \sqrt{(a-c)^2 \sin^2 U' \sin^2 U'' + 4g^2 ack^2}}.$$

Dans le cas de la seconde racine ω_2, les équations (236) donnent de même

$$(241\ bis)\qquad L = -qM\sqrt{-1},$$

si l'on pose

$$q = \frac{2gack}{a^2 - \omega_2^2};$$

et l'expression de $a^2 - \omega_2^2$ tirée de (238) montre que le nouveau coefficient q est égal au précédent, ou défini encore par (242).

Enfin, prenons, dans (221), soit L, soit M, de la forme $Ce^{c\sqrt{-1}}$; et gardons comme expressions des déplacements effectifs les parties réelles de ces formules symboliques, en faisant encore abstraction du coefficient d'amplitude C et de la constante de phase c. Nous aurons les équations des deux systèmes possibles d'ondes planes :

$$(243)\qquad \xi = \cos\left(kt - \frac{kz}{\omega_1}\right), \qquad \eta = q\sin\left(kt - \frac{kz}{\omega_1}\right);$$

$$(244)\qquad \xi = q\sin\left(kt - \frac{kz}{\omega_2}\right), \qquad \eta = \cos\left(kt - \frac{kz}{\omega_2}\right).$$

Dans le premier système, où la vitesse de propagation est ω_1, les trajectoires des particules éthérées sont les ellipses $q^2\xi^2 + \eta^2 =$ const.; et ces ellipses, si le coefficient k est positif, se trouvent décrites dans le sens direct, c'est-à-dire en tournant des x positifs vers les y positifs (dans l'angle des xy positifs). La valeur (242) de q étant plus petite que l'unité, sauf quand l'un des deux angles U′, U″ s'annule et

qu'elle atteint ainsi l'unité, le grand axe est dirigé suivant l'axe des x.

Dans le second système, les trajectoires sont les ellipses

$$\xi^2 + q^2\eta^2 = \text{const.}$$

semblables aux précédentes; mais elles ont leur grand axe suivant les y, et elles sont décrites (si k est positif) dans le sens rétrograde, savoir celui qui, dans l'angle des coordonnées xy positives, va des y positifs vers les x positifs.

Quand les deux systèmes se produisent ensemble, l'avance de phase acquise, après un parcours z, par les mouvements du premier système sur ceux du second, est la différence des deux arguments figurant dans (243) et (244), savoir l'excédent

$$k\left(t - \frac{z}{\omega_1}\right) - k\left(t - \frac{z}{\omega_2}\right)$$

ou

$$\frac{k(\omega_1 - \omega_2)z}{\omega_1\omega_2} = (\text{sensiblement})\,\frac{k(\omega_1 - \omega_2)z}{ac}.$$

Appelons Δ sa valeur par unité de longueur, et substituant à $\omega_1 - \omega_2$ la valeur (240), nous aurons

$$(245) \qquad \Delta = \frac{k}{\sqrt{ac}}\sqrt{\frac{(a-c)^2}{ac}\sin^2 U' \sin^2 U'' + 4g^2k^2}.$$

En résumé, *un cristal légèrement hétérotrope et dissymétrique peut propager, dans chaque direction, deux systèmes d'ondes planes à vibrations quasi transversales, animés de vitesses de propagation différentes, et dans lesquels les particules d'éther décrivent, en projection sur les plans d'ondes, des ellipses de même forme. Ces ellipses sont parcourues en sens inverses dans les deux systèmes, et leurs grands axes y sont disposés à angle droit.* D'après les formules (242) et (240), leur aplatissement et l'écart des deux vitesses de propagation grandissent avec le produit $\sin U' \sin U''$, c'est-à-dire quand la direction du plan de l'onde s'éloigne des directions des sections circulaires de l'ellipsoïde inverse [1].

---

[1] **Aperçu sur le cas d'ondes planes latéralement limitées et démonstration générale de la construction des rayons par les surfaces d'onde courbes.** — Dans le cas d'ondes planes latéralement limitées, où L, M, N seront lentement variables avec x, y, z, les seconds membres de l'équation (232), divisée par l'exponentielle imaginaire, et des équations (236), cesseront d'être nuls pour devenir des expressions linéaires et homogènes en $\frac{\partial(L, M, N)}{\partial(x, y, z)}$, à coefficients

Cette théorie ne trouve guère d'application qu'au quartz, où l'ellipsoïde inverse est de révolution (en sorte que U″ y égale U′). La

---

constants. On pourra remplacer, dans celles-ci, et sauf erreur négligeable de l'ordre des dérivées secondes, M, N par leurs valeurs approchées proportionnelles à L, que fourniront, par exemple, (241) et puis (232); ce qui réduira ces seconds membres à trois trinomes en $\frac{\partial L}{\partial(x, y, z)}$. Alors les équations (236) ainsi transformées, résolues par rapport à M, feront connaître en fonction de L ce coefficient M, qui peut différer de sa valeur (241) par de petits termes en $\frac{\partial L}{\partial(x, y, z)}$; mais l'égalité nécessaire des deux expressions de M ainsi obtenues donnera, pour tenir lieu de l'une d'elles, une relation de la forme

$$(\alpha) \qquad P\frac{\partial L}{\partial x} + Q\frac{\partial L}{\partial y} + R\frac{\partial L}{\partial z} = 0,$$

qui régira le coefficient d'amplitude L. Après quoi, l'équation remplaçant (232) fera connaître N, qui peut, comme M, différer de sa valeur de première approximation par des termes en $\frac{\partial L}{\partial(x, y, z)}$.

L'équation (α) montre que le coefficient L d'amplitude se trouvera constant suivant les droites parallèles à la direction (P, Q, R). Celle-ci sera donc celle du *rayon lumineux*. Comme dans tous les cas que nous avons rencontrés jusqu'ici, *le rayon vecteur émané de l'origine et affectant la direction* (P, Q, R) *aboutira au point de contact de l'onde plane avec la surface correspondante d'onde courbe, enveloppe des ondes planes de toute orientation parties de l'origine en même temps que la proposée.*

Cette propriété, admise par Huygens et Fresnel, est en effet, on va le voir, générale, ainsi que je l'ai démontré récemment (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXXV, p. 559; 13 octobre 1902) : elle s'applique quelles que soient les équations du mouvement, linéaires en ξ, η, ζ et leurs dérivées d'ordres quelconques relatives à x, y, z, t, du moins lorsqu'on les vérifie par les parties réelles de solutions symboliques ayant la forme

$$(\beta) \qquad (\xi, \eta, \zeta) = (L, M, N)\, e^{k(t-t_0)\sqrt{-1}}, \qquad \text{avec} \qquad t_0 = lx + my + nz,$$

c'est-à-dire quand il s'agit (p. 459) d'ondes planes persistantes, à propagation uniforme et à vibrations pendulaires. Dans ces formules (β), t_0 est le temps employé par les ondes à atteindre le point (x, y, z) après leur passage à l'origine; et, par suite, l, m, n ont des valeurs réelles constantes, proportionnelles aux cosinus directeurs donnés de la normale aux ondes. Mais, comme on a vu page 459, les coefficients d'amplitude L, M, N sont généralement imaginaires, et n'ont de valeurs rigoureusement constantes que dans les ondes dites *indéfinies*, pour devenir des fonctions *lentement* variables de x, y, z dans les ondes latéralement délimitées.

Les dérivées de L, M, N, que nous écrirons $\frac{\partial(L, M, N)}{\partial(x, y, z)}$, seront donc petites et, ne variant de fractions notables de leurs valeurs que sur de longs parcours, elles auront, comme on l'a vu ci-dessus encore, leurs propres dérivées négligeables. Dès lors, chaque différentiation en x, y ou z, effectuée sur les expressions (β)



valeur de g, susceptible de changer de signe suivant les deux dispositions, symétriques l'une de l'autre, que peuvent présenter les faces

---

de ξ, η, ζ ou sur leurs dérivées, revient à introduire devant l'expression différentiée (abstraction faite de l'exponentielle), le facteur symbolique

$$-k\,(l, m, n)\sqrt{-1} + \frac{\partial}{\partial(x, y, z)},$$

ou

$$-k\sqrt{-1}\left(l + \frac{\sqrt{-1}}{k}\frac{\partial}{\partial x},\quad m + \frac{\sqrt{-1}}{k}\frac{\partial}{\partial y},\quad n + \frac{\sqrt{-1}}{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Les symboles $\frac{\sqrt{-1}}{k}\frac{\partial}{\partial(x, y, z)}$, ajoutés, dans ces formules, à l, m, n et que suivra finalement L, M ou N, pourront, dans les combinaisons d'opérations, être assimilés à des accroissements très petits de l, m, n, et être désignés par ∂l, ∂m, ∂n, en ce sens que leurs carrés et produits symboliques se trouveront négligeables, chacun d'eux indiquant une dérivation *très rapetissante* à effectuer sur la quantité qui suit. Quant aux dérivations en t, elles reviendront à multiplier simplement par $k\sqrt{-1}$ l'expression différentiée.

Cela posé, si φ, χ, ψ, φ_1, χ_1, ψ_1, φ_2, χ_2, ψ_2 sont, dans le cas d'ondes planes *indéfinies*, les polynomes en l, m, n résultant de la substitution des expressions (β) de ξ, η, ζ dans les divers termes, respectivement en ξ, η et ζ, des équations proposées du mouvement, les équations obtenues en l, m, n, L, M, N s'écriront alors, après suppression de l'exponentielle :

$$(\gamma)\qquad \begin{cases} \varphi L + \chi M + \psi N = 0, \\ \varphi_1 L + \chi_1 M + \psi_1 N = 0, \\ \varphi_2 L + \chi_2 M + \psi_2 N = 0. \end{cases}$$

Et elles entraîneront, outre la proportionnalité de L, M, N à trois polynomes λ, μ, ν en l, m, n, l'équation entre l, m et n qu'exprime l'annulation du déterminant de ce système homogène.

Si, au contraire, les ondes étant *latéralement limitées*, L, M, N varient lentement d'un point à l'autre, l, m, n se trouveront accompagnés, dans φ, χ, ψ, ..., de leurs petits accroissements symboliques ∂l, ∂m, ∂n définis ci-dessus, *à traiter comme des différentielles*. Appelons $\partial\varphi$, $\partial\chi$, $\partial\psi$, ... les accroissements symboliques analogues $\frac{d\varphi}{dl}\partial l + \frac{d\varphi}{dm}\partial m + \frac{d\varphi}{dn}\partial n$, ...; et le système ($\gamma$) fera place au système plus complexe, en partie symbolique,

$$(\gamma')\qquad \begin{cases} \varphi L + \chi M + \psi N + \partial\varphi.L + \partial\chi.M + \partial\psi.N = 0, \\ \varphi_1 L + \chi_1 M + \psi_1 N + \partial\varphi_1.L + \partial\chi_1.M + \partial\psi_1.N = 0, \\ \varphi_2 L + \chi_2 M + \psi_2 N + \partial\varphi_2.L + \partial\chi_2.M + \partial\psi_2.N = 0. \end{cases}$$

Or cherchons l'enveloppe des ondes planes indéfinies, de toute direction,

$$t_0 = \text{const.},\qquad \text{ou}\qquad lx + my + nz = \text{const.},$$

passées simultanément à l'origine. Son point (x, y, z) de contact avec l'onde enveloppée produisant les déplacements exprimés symboliquement par (β) véri-

du cristal, y est assez petite pour annuler sensiblement le rapport q des axes dès que l'angle U' excède une quinzaine de degrés. Pour les

---

fiera, comme on sait, quel que soit le rapport de dl à dm, l'équation

$$x\,dl + y\,dm + z\,dn = 0;$$

et il y a lieu, pour déterminer la direction (x, y, z), de chercher l'équation aux différentielles totales en dl, dm, dn résultant du système (γ).

Différentions donc complètement celui-ci. Nous aurons, en appelant maintenant dl, dm, dn, $d\varphi$, $d\chi$, ..., des différentielles *effectives* et non plus symboliques,

$$(\gamma'')\quad \begin{cases} \varphi\,dL + \chi\,dM + \psi\,dN + d\varphi.L + d\chi.M + d\psi.N = 0,\\ \varphi_1\,dL + \chi_1\,dM + \psi_1\,dN + d\varphi_1.L + d\chi_1.M + d\psi_1.N = 0,\\ \varphi_2\,dL + \chi_2\,dM + \psi_2\,dN + d\varphi_2.L + d\chi_2.M + d\psi_2.N = 0. \end{cases}$$

Appelons λ', μ', ν' les trois multiplicateurs, fonctions entières et connues de l, m, n, qui vérifient le système homogène

$$(\delta)\quad \varphi\lambda' + \varphi_1\mu' + \varphi_2\nu' = 0,\qquad \chi\lambda' + \chi_1\mu' + \chi_2\nu' = 0,\qquad \psi\lambda' + \psi_1\mu' + \psi_2\nu' = 0,$$

parfaitement compatible, à raison de ce que son déterminant est celui du système (γ) et a été annulé. Alors les équations (γ') et (γ''), multipliées respectivement par λ', μ', ν' et ajoutées, donneront

$$\begin{aligned} (\lambda'\,\partial\varphi + \mu'\,\partial\varphi_1 + \nu'\,\partial\varphi_2)L + (\lambda'\,\partial\chi + \mu'\,\partial\chi_1 + \nu'\,\partial\chi_2)\,M &\\ + (\lambda'\,\partial\psi + \mu'\,\partial\psi_1 + \nu'\,\partial\psi_2)N &= 0,\\ (\lambda'\,d\varphi + \mu'\,d\varphi_1 + \nu'\,d\varphi_2)L + \ldots\ldots\ldots\ldots &= 0, \end{aligned}$$

ou, en développant $\partial\varphi$, $\partial\chi$, ..., $d\varphi$, $d\chi$, ..., et faisant, dans la première équation, abstraction du facteur commun $\frac{\sqrt{-1}}{k}$,

$$(\delta')\quad \begin{cases} \left[\left(\lambda'\frac{d\varphi}{dl} + \mu'\frac{d\varphi_1}{dl} + \nu'\frac{d\varphi_2}{dl}\right)\frac{\partial L}{\partial x} + \left(\lambda'\frac{d\chi}{dl} + \ldots\right)\frac{\partial M}{\partial x} + \left(\lambda'\frac{d\psi}{dl} + \ldots\right)\frac{\partial N}{\partial x}\right] + \ldots = 0,\\ \left[\left(\lambda'\frac{d\varphi}{dl} + \mu'\frac{d\varphi_1}{dl} + \nu'\frac{d\varphi_2}{dl}\right)L + \left(\lambda'\frac{d\chi}{dl} + \ldots\right)M + \left(\lambda'\frac{d\psi}{dl} + \ldots\right)N\right]dl + \ldots = 0. \end{cases}$$

Mais, à une première approximation, les rapports mutuels de L, M, N sont partout ceux de λ, μ, ν; et dans les *petites* dérivées premières $\frac{\partial}{\partial(x, y, z)}$, on peut, sauf erreurs négligeables de l'ordre des dérivées secondes, supposer proportionnelles les variations *simultanées* de L, M, N. Par conséquent, si I désigne un *coefficient* quelconque *d'amplitude,* par exemple, le rapport commun de L, M, N à λ, μ, ν, les dérivées $\frac{\partial(L, M, N)}{\partial(x, y, z)}$ vaudront les produits respectifs de L, M, N par $\frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial(x, y, z)}$. Soient donc P, Q, R les trois quantités entre crochets dans la seconde équation (δ'), après substitution de λ, μ, ν à L, M, N; et ces deux équations deviendront :

$$(\delta'')\quad \frac{P}{I}\frac{\partial I}{\partial x} + \frac{Q}{I}\frac{\partial I}{\partial y} + \frac{R}{I}\frac{\partial I}{\partial z} = 0,\qquad P\,dl + Q\,dm + R\,dn = 0.$$

La première, analogue à (α), montre que l'amplitude I se conserve suivant la

inclinaisons plus grandes de la normale aux ondes par rapport à l'axe du cristal, les termes en g sont donc négligeables dans les formules précédentes; et l'on observe alors les lois de la double réfraction ordinaire. Mais, au-dessous, les vibrations simples sont elliptiques; et les observations confirment très sensiblement les formules (242) et (245) tant de l'ellipticité que des écarts de phase entre les deux ondes [1].

75. Rotation du plan de polarisation par le magnétisme. — Un corps transparent, isotrope-symétrique, placé dans un champ magnétique *homogène*, c'est-à-dire entre les deux pôles d'un aimant convenablement constitué, acquiert un genre spécial de symétrie, ou plutôt d'*isotropie* dissymétrique. En assimilant l'aimant à un ensemble de

---

direction (P, Q, R); et la seconde, rapprochée de l'équation $x\,dl + y\,dm + z\,dn = 0$, fait voir que les coordonnées (x, y, z) du point de contact de l'onde plane avec son enveloppe sont proportionnelles à P, Q, R, ou que le rayon vecteur tiré de l'origine au point de contact a bien cette direction *suivant laquelle le mouvement se transmet*, en d'autres termes, qu'il trace le *rayon lumineux*.

Il suffit, on le voit, que l'équation en l, m, n puisse être débarrassée du symbole $\sqrt{-1}$, et qu'elle admette des racines réelles quand l, m, n reçoivent les rapports mutuels soit donnés, soit voisins de ceux-là, pour que des ondes planes persistantes, ou d'une amplitude I se conservant à toute distance dans le sens des rayons, se trouvent possibles. Elles seront, de plus, délimitables latéralement, avec continuité, *d'une manière arbitraire;* car, dès que I sera *invariable le long des rayons*, la première équation (δ') étant satisfaite, les relations (γ') se réduiront à deux (distinctes) seulement; et on les vérifiera, quelles que soient les petites dérivées $\frac{\partial(\mathrm{L, M, N})}{\partial(x, y, z)}$ subsistantes, par d'imperceptibles altérations des rapports mutuels de L, M, N, c'est-à-dire par d'insignifiants changements des trajectoires de l'éther ou des différences de phase qu'y offre le mouvement projeté suivant les divers axes.

Pour revenir, en terminant, à nos milieux hétérotropes-dissymétriques, il est clair que les conditions (90) (p. 343) s'appliqueront encore à leurs surfaces séparatives, que, par suite, la construction d'Huygens y donnera généralement, pour un rayon incident constituant une solution simple, ou à polarisation elliptique, deux rayons réfléchis et deux rayons réfractés, exprimant aussi des solutions simples des équations de mouvement respectives de leurs milieux, bref, que les considérations du n° 73 (p. 464), relatives aux doubles réflexion et réfraction circulaires, s'y étendront.

[1] Si l'on tenait compte de l'*hétérotropie* du cristal, *même* dans les petits termes qui expriment sa dissymétrie, il est clair qu'on aurait des formules plus générales, ou à plusieurs paramètres disponibles au lieu du paramètre *unique* g auquel les réduit l'hypothèse restrictive de l'isotropie. On pourrait donc, par une détermination convenable de ces multiples paramètres, reproduire avec une précision encore plus grande les résultats des expériences les mieux soignées que l'on possède. Mais ce serait au prix d'une notable complication dont la nécessité ne me paraît guère s'imposer jusqu'à présent, surtout dans un aperçu synthétique.

solénoïdes ou de courants circulaires, tournant autour de la ligne des pôles prise pour axe des z, on voit que la contexture du corps reste symétrique de part et d'autre du plan normal des xy, mais que, en même temps, l'axe des z devient un axe d'*isotropie*, en ce sens qu'une rotation quelconque des x et des y, autour de cet axe Oz, opérée *sans renversement ou retournement de celui-ci*, ne peut rien changer aux formules des propriétés physiques du corps.

Il suit de là que certains termes de l'expression de la résistance des molécules au mouvement vibratoire de l'éther, incompatibles avec l'isotropie primitive, peuvent maintenant exister. Ce sont, en particulier, certains des termes proportionnels aux composantes ξ', η', ζ' de la vitesse vibratoire de l'éther. Une rotation de 180°, opérée sur les x et les y autour de l'axe des z, changeant simplement les signes de ξ', η' et des composantes $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$ de la résistance, sans modifier ζ' ni la troisième composante $\mathcal{R}_z$, et, de plus, une telle transformation de coordonnées devant laisser les formules de $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$, $\mathcal{R}_z$ invariables, ζ' ne pourra pas figurer dans $\mathcal{R}_x$ ou dans $\mathcal{R}_y$, ni ξ', η' dans $\mathcal{R}_z$. D'ailleurs, si le corps est transparent, ξ' ne paraîtra pas dans $\mathcal{R}_x$, non plus que η' dans $\mathcal{R}_y$, ni ζ' dans $\mathcal{R}_z$; car on a vu (p. 375) que des résistances proportionnelles aux composantes correspondantes de la vitesse produisent, quand elles sont notables, l'extinction des ondes, sous des épaisseurs comparables à la longueur d'ondulation. Donc $\mathcal{R}_x$ aura acquis seulement un terme en η' et $\mathcal{R}_y$ un terme en ξ'.

Enfin, les coefficients de ces deux termes seront égaux et contraires; car une rotation moitié moindre des x et des y, ou égale à 90°, qui transforme η' en ξ' et $-\xi'$ en η', $\mathcal{R}_y$ en $\mathcal{R}_x$ et $-\mathcal{R}_x$ en $\mathcal{R}_y$, devra, toujours à raison de l'isotropie du milieu autour de l'axe des z, changer la formule de $\mathcal{R}_y$ en celle de $\mathcal{R}_x$, mais la formule de $-\mathcal{R}_x$ en celle de $\mathcal{R}_y$. Et l'on reconnaît facilement que, dans ces conditions, les expressions de $\mathcal{R}_x$ et de $\mathcal{R}_y$, en η' et ξ', seront bien isotropes par rapport à l'axe z, aucune rotation des axes rectangles des x et des y autour de Oz ne les modifiant.

Mais l'expérience montre que les deux termes ainsi obtenus sont insensibles, quand on y remplace purement et simplement η', ξ' par leurs valeurs *uniformisées* (p. 436), tandis que la seconde partie, ordinairement très inférieure à la première, des expressions de η', ξ', en fonction des vitesses de même nom *uniformisées*, fait connaître des termes utiles à introduire dans les équations du mouvement. Cette seconde partie est respectivement, d'après ce qu'on a vu (p. 437), $-\frac{\varepsilon^2}{10}\Delta_2\eta'$, $-\frac{\varepsilon^2}{10}\Delta_2\xi'$; et les termes qu'elle donne, aux seconds

membres des trois équations du mouvement, auront respectivement les formes

$$\nu \Delta_2 \frac{d\eta}{dt}, \quad -\nu \Delta_2 \frac{d\xi}{dt}, \quad \text{zéro},$$

où ν désigne un petit coefficient, fonction de la nature du corps transparent et de l'intensité du champ magnétique.

Donc, si nous admettons, ce qui est *à peu près* exact, la conservation, dans notre corps naturellement isotrope, de la monoréfringence, ou du coefficient des termes principaux de $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$, $\mathfrak{R}_z$ (contenant les accélérations ξ'', η'', ζ''), les équations du mouvement seront

$$(\alpha)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{d^2\xi}{dt^2} = \Delta_2\left(\xi + \nu\dfrac{d\eta}{dt}\right) - \dfrac{d\theta}{dx}, \\ \dfrac{1}{a^2}\dfrac{d^2\eta}{dt^2} = \Delta_2\left(\eta - \nu\dfrac{d\xi}{dt}\right) - \dfrac{d\theta}{dy}, \\ \dfrac{1}{a^2}\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = \Delta_2\zeta - \dfrac{d\theta}{dz}. \end{cases}$$

Soit i l'angle de la normale aux ondes (supposée située dans le plan des xz) avec la droite des pôles. Alors les expressions *symboliques* de ξ, η, ζ seront les produits de trois constantes réelles ou imaginaires L, M, N par l'exponentielle

$$e^{k\left(t - \frac{x\sin i + z\cos i}{\omega}\right)\sqrt{-1}};$$

et les équations (α), multipliées par $a^2\omega^2$, deviendront

$$(\alpha')\quad \begin{cases} (\omega^2 - a^2)\mathrm{L} + a^2 \sin i(\mathrm{L}\sin i + \mathrm{N}\cos i) = -\left(\nu a^2 k\sqrt{-1}\right)\mathrm{M}, \\ (\omega^2 - a^2)\mathrm{M} = \left(\nu a^2 k\sqrt{-1}\right)\mathrm{L}, \\ (\omega^2 - a^2)\mathrm{N} + a^2 \cos i(\mathrm{L}\sin i + \mathrm{N}\cos i) = 0. \end{cases}$$

Ajoutons-les, après les avoir multipliées respectivement soit par $\dfrac{\sin i}{\omega^2}$, zéro, $\dfrac{\cos i}{\omega^2}$, soit par L, M, N : il vient, pour remplacer, par exemple, la première et la troisième (α'), les deux relations

$$(\alpha'')\quad \begin{cases} \mathrm{L}\sin i + \mathrm{N}\cos i = -\left(\nu\dfrac{a^2}{\omega^2}k\sin i\right)\mathrm{M}\sqrt{-1}, \\ (\omega^2 - a^2)(\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2) + a^2(\mathrm{L}\sin i + \mathrm{N}\cos i)^2 = 0. \end{cases}$$

L'une prouve que $\mathrm{L}\sin i + \mathrm{N}\cos i$ est de l'ordre de petitesse de ν, ou qu'il y a quasi-transversalité des vibrations ; et l'autre montre ensuite que le produit

$$(\omega^2 - a^2)(\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2)$$

est de l'ordre de ν^2. Comme, d'ailleurs, d'après la seconde (α'), le facteur $\omega^2 - a^2$ est de l'ordre de ν, le trinome $L^2 + M^2 + N^2$ sera du même ordre; et les deux équations (α'') reviendront sensiblement à

$$(\alpha''') \qquad L \sin i + N \cos i = 0, \qquad L^2 + M^2 + N^2 = 0.$$

Elles signifient que L, M, N sont proportionnels à $\cos i$, $\mp\sqrt{-1}$, $-\sin i$, ou que la solution symbolique fournit les deux solutions réelles approchées

$$(\beta) \qquad \begin{cases} (\xi, \zeta) = (\cos i, -\sin i) \cos\left(kt - k\dfrac{x \sin i + z \cos i}{\omega}\right), \\ \eta = \pm \sin\left(kt - k\dfrac{x \sin i + z \cos i}{\omega}\right). \end{cases}$$

Quant à l'équation restante, savoir, la seconde (α'), elle devient

$$\omega^2 - a^2 = \mp \nu a^2 k \cos i$$

et donne les deux vitesses correspondantes de propagation

$$(\beta') \qquad \omega = a\left(1 \mp \frac{\nu}{2} k \cos i\right).$$

On a, dans chacun des deux systèmes ainsi obtenus d'ondes planes, à vibrations quasi transversales :

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \text{const.}$$

Les trajectoires, intersections (à très peu près) d'une sphère et d'un plan, y sont donc circulaires, avec parcours en sens inverses dans les deux systèmes et inégalité des vitesses respectives de propagation; d'où résulte bien la polarisation rotatoire. De plus, la différence des deux vitesses de propagation, $\nu a k \cos i$, est proportionnelle (abstraction faite de la dispersion) à $k \cos i$, conformément à l'expérience, y compris même le changement de signe de $\cos i$ quand i varie de part et d'autre de l'angle droit ([1]).

Mais il nous manque peut-être encore une conception des phénomènes électromagnétiques assez claire, pour nous permettre de mo-

([1]) La sphère de rayon a, décrite autour du point de l'axe des z dont l'abscisse est $z = \mp \frac{1}{2}\nu a k$, *touche* l'onde plane partie de l'origine depuis une unité de temps; car cette onde, de vitesse $a \mp \frac{1}{2}\nu a k \cos i$, peut être censée avoir marché d'abord, suivant sa normale, de $\mp \frac{1}{2}\nu a k \cos i$, ou être venue au centre de la sphère, et avoir parcouru ensuite un rayon a. Donc *la surface d'onde courbe comprend* les *deux sphères* ainsi obtenues, *de rayon a, et à centres distants* de $\nu a k$.



tiver le rejet ou la disparition des termes principaux, en η' et ξ', dont les deux précédents, $\nu\Delta_2(\eta', -\xi')$ semblent n'être que les parties correctives d'uniformisation; ou, si ceux-ci proviennent d'ailleurs et s'ils ont, par exemple, leur origine dans des tourbillonnements intérieurs soit des molécules pondérables, soit de l'éther, pour que nous puissions nous représenter avec netteté ces tourbillonnements ([1]).

76. Biréfringence spéciale engendrée par un champ magnétique. — Le raisonnement fait ci-dessus pour introduire, dans les résistances $\mathfrak{R}_x$, $\mathfrak{R}_y$, $\mathfrak{R}_z$, des termes en ξ', η', ζ', appliqué aux termes ordinaires en ξ'', η'', ζ'' ou contenant linéairement les accélérations, conduirait à rendre le coefficient de ξ'', dans $\mathfrak{R}_x$, ou de η'', dans $\mathfrak{R}_y$, différent de celui de ζ'' dans $\mathfrak{R}_z$, et, en outre, à compléter $\mathfrak{R}_x$ par un terme en η'' et, avec même coefficient changé de signe, $\mathfrak{R}_y$ par un terme en ξ''. Mais les égalités générales (2) (p. 270), en partie démontrées et en partie admises, obligent d'annuler ces deux derniers termes ([2]); de sorte qu'il ne reste de possible qu'une légère inégalité entre les deux coefficients principaux, A ou B d'une part, affectant ξ'' dans $\mathfrak{R}_x$ ou η'' dans $\mathfrak{R}_y$, et C d'autre part, affectant ζ'' dans $\mathfrak{R}_z$. Cette inégalité, si elle est réelle, aura évidemment pour effet de rendre le corps biréfringent, à la manière d'un cristal uniaxe, dont l'axe optique ou principal coïnciderait avec la ligne des pôles de l'aimant.

Il paraît bien, en effet, qu'une telle inégalité existe, mais beaucoup plus difficile à constater que la polarisation rotatoire due aux deux

---

([1]) On peut voir aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris (t. CXXV, p. 679, et t. CXXVII, p. 647; 8 novembre 1897 et 31 octobre 1898) une tentative de ce genre, faite par M. Henri Becquerel, et qui indique une forte augmentation du pouvoir rotatoire magnétique, pour les valeurs de la période vibratoire où l'indice de réfraction varie très vite, c'est-à-dire pour les périodes voisines de celles des raies étroites existant dans le spectre de la substance expérimentée (p. 443 ci-dessus). Or une telle augmentation a été constatée effectivement, dans l'intervalle de la publication des deux Notes citées de M. Becquerel, par MM. Macaluso et Corbino (*voir,* par exemple, le second article cité des *Comptes rendus,* et un article suivant, de MM. Macaluso et Corbino, t. CXXVII, p. 951; 5 décembre 1898).

([2]) Sans cela, d'ailleurs, le milieu ne serait plus transparent. Il aurait, en effet, les équations de mouvement (17) (p. 276), prises avec $A = B$, $D = 0$ et $E = 0$. Or nous avons vu (p. 425) que la transparence des milieux pour les ondes perpendiculaires aux axes optiques permet l'existence d'un seul des trois coefficients d'asymétrie D, E, F, savoir, de celui qui correspond à l'axe moyen d'élasticité. Et ce ne pourrait être ici F, notre axe des z (axe d'isotropie ou de révolution de l'ellipsoïde inverse) étant forcément un axe *extrême.* La transparence obligera donc à poser $F = 0$.

termes précédents en ν. Et, de même que ceux-ci semblent ne s'être révélés que par les *corrections d'uniformisation*, $\nu\Delta_2(\eta', -\xi')$, de deux autres termes en η' et ξ' *restés insensibles*, de même aussi, c'est par leurs paramètres Δ_2, ou comme par leurs corrections d'uniformisation, que les accélérations ξ'' ou η'', d'une part, ζ'' d'autre part, apparaissent, les unes, dans les deux premières équations du mouvement, l'autre, dans la troisième, avec deux coefficients *différents*. Bref, les phénomènes s'expliqueraient en introduisant, par exemple, un seul terme, que l'on mettra alors au second membre de la troisième équation du mouvement; et ce terme serait proportionnel à l'expression $\Delta_2\zeta''$, identique, dans un mouvement pendulaire de période $\frac{2\pi}{k}$, à $-k^2\Delta_2\zeta$. C'est, du moins, ce qu'indiquent les expériences de M. Quirino Majorana, résumées dans le numéro du 21 juillet 1902 des *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris (t. CXXXV, p. 159): en effet, la biréfringence engendrée par le champ magnétique s'y est montrée proportionnelle à k^2, c'est-à-dire inverse du carré de la période vibratoire.

Elle est, naturellement, le plus sensible, et l'on se contente de l'observer, sur des rayons normaux à l'axe. En effet, pour ces rayons, qui correspondent à des plans d'onde parallèles à l'axe, ou à la valeur $\frac{\pi}{2}$ de l'angle i, la polarisation rotatoire, étudiée au numéro précédent, ne peut, en aucun cas, masquer la biréfringence; car elle s'annule. La vibration y est, d'après les équations (α'), soit parallèle aux z, soit perpendiculaire aux z (et, alors, légèrement elliptique ou accompagnée d'une petite composante longitudinale ξ), avec une vitesse de propagation égale à a dans les deux hypothèses, savoir, exactement dans la première, mais à un écart près de l'ordre de ν^2, dans la seconde. Et le terme nouveau, ou de biréfringence, introduit dans la troisième équation du mouvement, vient simplement modifier la première de ces deux vitesses.

Il serait nul, au contraire, pour des ondes normales à l'axe, mais altérerait la forme circulaire des trajectoires pour des ondes inclinées sur l'axe. Cette altération et la double réfraction elliptique spéciale qui en résulte ne paraissent pas avoir encore été étudiées.

76 *bis*. **Phénomènes d'absorption ou d'extinction, liés à l'hétérotropie soit magnétique, soit de toute autre espèce.** — Dans un second article, du 28 juillet 1902 (*Comptes rendus*, même t. CXXXV, p. 235), M. Quirino Majorana a observé que la biréfringence ou, plutôt, l'hétérotropie, due ainsi au magnétisme, accusée surtout chez des liquides imparfaitement transparents, offre, avec la biréfringence ou l'hétérotropie ordinaires des cristaux uniaxes légèrement opaques, un caractère commun, remarqué ou admis déjà par Fresnel chez la

tourmaline, et consistant en ce que le pouvoir absorbant est, comme la vitesse de propagation des ondes, fonction seulement de l'orientation de la vibration, mais non, en outre, de la direction des plans d'onde.

C'est évident, abstraction faite de la polarisation rotatoire, pour les vibrations différentes de celles qui sont ou parallèles ou perpendiculaires à l'axe principal de symétrie, naturel ou acquis, du corps; car, la transparence étant suffisante pour que les propriétés de l'ellipsoïde inverse (p. 419) s'appliquent sensiblement, la vibration n'a une direction donnée, inclinée sur l'équateur de cet ellipsoïde, que dans un seul système d'ondes planes, celui où le plan d'onde est normal à la section principale ou méridienne de l'ellipsoïde menée suivant la direction donnée, plan unique (contenant à très peu près celle-ci) qui fasse, dans l'ellipsoïde, une section ayant pour sens d'un de ses axes cette direction même.

Mais un examen plus attentif est nécessaire pour les directions ou parallèles, ou perpendiculaires à l'axe de symétrie, qui sont, chacune, celle des vibrations possibles dans une infinité de systèmes d'ondes planes. Il faut y considérer la résistance au mouvement, proportionnelle à la vitesse, que nous a fait annuler tout à l'heure (p. 477) l'hypothèse d'une transparence parfaite. Il est clair qu'elle comporte dans notre cas deux coefficients distincts, H et H', au lieu du coefficient unique H affectant les trois composantes $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ de la vitesse, dans les équations (113) (p. 371) qui régissent les vibrations de l'éther d'un corps opaque isotrope. Si l'axe de symétrie ou d'isotropie du corps est pris pour axe des z, les équations du mouvement auront donc, par exemple, au lieu de cette forme (113), celle-ci,

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \frac{1}{a^2}\frac{d^2(\xi, \eta)}{dt^2} + \frac{H}{\mu}\frac{d(\xi, \eta)}{dt} = \Delta_2(\xi, \eta) - \frac{d\theta}{d(x, y)}, \\ \frac{1}{a'^2}\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{H'}{\mu}\frac{d\zeta}{dt} = \Delta_2\zeta - \frac{d\theta}{dz}, \end{cases}$$

avec quatre paramètres a, a', H, H' tous distincts et pouvant être, d'ailleurs, fonction de la période. On peut même, dans le cas de biréfringence magnétique, faire porter sur le premier terme, en ζ'', de la troisième équation, ou, par conséquent, sur le paramètre a', la *petite* modification, proportionnelle à $\Delta_2\zeta''$ ou à $-k^2\Delta_2\zeta$, alors éprouvée par le terme $\Delta_2\zeta$ du second membre; car, dans nos ondes planes se propageant et assez sensiblement persistantes, à vibrations pendulaires, $\Delta_2\zeta''$ ne différera jamais guère de $\frac{\zeta^{iv}}{\omega^2}$, c'est-à-dire de $-\frac{k^2\zeta''}{\omega^2}$ ou même de $-\frac{k^2\zeta''}{a^2}$, expression de même forme que le premier terme de la troisième équation (α).

Or ces équations (α) sont visiblement celles du mouvement vibratoire d'un corps isotrope autour de l'axe des z. Dès lors, pour tous les plans d'onde menés suivant cet axe et admettant par suite une vibration parallèle à l'axe même, l'extinction sera évidemment pareille.

Il ne reste donc qu'à considérer les vibrations perpendiculaires à l'axe, ou pour lesquelles $\zeta = 0$. Or, vu l'annulation des termes où figurent a' et H', les équations (α) sont alors identiques à (113) (p. 371), qui sont celles du mouvement de l'éther dans un corps entièrement isotrope; et, par suite, l'extinction y est encore la même, quelle que soit l'orientation des ondes.

Ainsi, conformément à la pensée de Fresnel, tant les coefficients d'extinction que les vitesses de propagation ne varient qu'avec la direction de la vibration.

Nous admettons toutefois que les ondes dont il s'agit soient constituées, à très peu près, comme des ondes planes latéralement indéfinies *d'amplitude uniforme,* ou dont le décroissement, pendant la propagation, se ferait de même sur toute leur étendue : condition vérifiée (par raison de symétrie ou de parité) sous l'*incidence normale,* c'est-à-dire pour des ondes sensiblement parallèles à la face d'entrée de la lumière dans le corps *translucide.* Une telle uniformité *approchée* n'empêche pas, d'ailleurs, les ondes de pouvoir être limitées latéralement: elle n'implique l'absence de variations notables de l'amplitude que dans les étendues dont les dimensions comprennent un nombre modéré de longueurs d'onde.

Nous regardons enfin comme négligeables ici (c'est-à-dire au point de vue de l'absorption), dans le cas d'isotropie-dissymétrique autour de l'axe des z, les termes respectifs en η' et $-\xi'$, à coefficient commun, des deux premières équations du mouvement, termes producteurs de la polarisation rotatoire magnétique sinon par eux-mêmes, du moins par leur correction d'uniformisation. Or une telle correction peut, dans l'étude de nos ondes planes à vibrations pendulaires, être effectuée approximativement sur le terme même que l'on corrige, par un changement constant convenable de son coefficient, comme on l'a vu après les formules (α) pour celui auquel est due la biréfringence magnétique. Ces termes en η' et en $-\xi'$, même ainsi modifiés ou complétés, étant compatibles avec la transparence, il est assez naturel de les laisser de côté dans une première étude d'un phénomène, l'absorption, qu'ils n'impliquent pas. Mais, vers la fin de la présente note, nous les introduirons; et leur suppression provisoire sera justifiée, au moins pour le cas des expériences de M. Quirino Majorana.

Dans un milieu biaxe imparfaitement transparent, à trois plans rectangulaires de symétrie de contexture, on aurait de même comme équations du mouvement de l'éther, en changeant un peu les notations, savoir, en désignant par a, b, c les constantes que nous appelions a, a, a', et par $2a'$, $2b'$, $2c'$ celles que nous appelions $\frac{\mathrm{H}}{\mu}, \frac{\mathrm{H}}{\mu}, \frac{\mathrm{H}'}{\mu}$:

$$(\alpha')\qquad \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\xi}{a^2}, \frac{\eta}{b^2}, \frac{\zeta}{c^2}\right) + 2\frac{d}{dt}(a'\xi, b'\eta, c'\zeta) = \Delta_2(\xi, \eta, \zeta) - \frac{d\theta}{d(x, y, z)}.$$

Les expressions *symboliques* de ξ, η, ζ, pour des ondes planes périodiques latéralement indéfinies, seront de la forme

$$(\alpha'')\qquad (\xi, \eta, \zeta) = (\mathrm{L}', \mathrm{M}', \mathrm{N}')\, e^{k(t-\mathrm{L}x-\mathrm{M}y-\mathrm{N}z)\sqrt{-1}},$$

avec six paramètres L, M, N, L′, M′, N′ comprenant de petites parties imaginaires, nécessitées par la présence des termes de (α') en a', b', c'; et l'on pourra négliger dans les calculs les carrés et produits tant de a', b', c' que de ces parties imaginaires.

Or, si l'on pose

$$(\alpha''')\quad \mathrm{A} = a\left(1 + \frac{a^2 a'}{k}\sqrt{-1}\right),\quad \mathrm{B} = b\left(1 + \frac{b^2 b'}{k}\sqrt{-1}\right),\quad \mathrm{C} = c\left(1 + \frac{c^2 c'}{k}\sqrt{-1}\right),$$

les valeurs (α'') de ξ, η, ζ rendront les équations (α') identiques à

$$(\beta)\qquad \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\xi}{\mathrm{A}^2}, \frac{\eta}{\mathrm{B}^2}, \frac{\zeta}{\mathrm{C}^2}\right) = \Delta_2(\xi, \eta, \zeta) - \frac{d\theta}{d(x, y, z)}.$$

Mais, à part l'imaginarité de A, B, C, celles-ci ont précisément la forme (20) (p. 276), que vérifieront les expressions (α'') de ξ, η, ζ, pourvu qu'entre les constantes A, B, C, L, M, N, L', M', N' existent les trois relations (24) (p. 291), écrites avec des lettres capitales au lieu de minuscules, ou même, si l'on prend d'ailleurs les constantes L', M', N' dans des rapports convenables, pourvu que L, M, N soient reliés à A, B, C par l'équation (p. 361)

$$(\beta') \qquad \frac{A^2L^2}{A^2S^2-1}+\frac{B^2M^2}{B^2S^2-1}+\frac{C^2N^2}{C^2S^2-1}=1, \qquad \text{où} \qquad S^2=L^2+M^2+N^2.$$

Quand, pour extraire des expressions symboliques (α'') de ξ, η, ζ leurs parties réelles, destinées à représenter les déplacements effectifs de l'éther dans des systèmes d'ondes planes, on mettra finalement L', M', N' sous les formes $l'\,e^{\lambda'\sqrt{-1}}$, $m'\,e^{\mu'\sqrt{-1}}$, $n'\,e^{\nu'\sqrt{-1}}$, avec l', m', n' réels et λ', μ', ν' à la fois réels et très petits, l', m', n' différeront peu de ce qu'ils seraient si a', b', c' étaient nuls; et λ', μ', ν', joints à l'arc du cosinus en t, x, y, z qu'on extraira de l'exponentielle imaginaire figurant dans (α''), ne feront qu'établir de petites différences de phase entre les trois composantes du déplacement réel, c'est-à-dire rendre légèrement courbes les trajectoires. De telles perturbations étant sans importance, tout l'intérêt de la question se résume dans l'expression que recevra l'exponentielle à raison de l'équation (β').

Donnons donc à L, M, N, comme à A, B, C, leurs formes explicites, pour séparer le réel de l'imaginaire. Les petites parties imaginaires de L, M, N seront toujours entre elles comme les trois cosinus directeurs λ, μ, ν d'une certaine droite; et nous admettrons, pour fixer les idées, qu'on ait choisi comme sens de cette droite celui qui fait un angle aigu avec la normale aux ondes planes, tirée du côté vers lequel les ondes progressent. Si $\frac{f}{k}$ désigne une quantité de l'ordre de a', b', c' et que l, m, n soient les parties réelles de L, M, N, nous pourrons poser

$$(\beta'') \quad \left\{ \begin{array}{l} L=l-\frac{f}{k}\lambda\sqrt{-1}, \qquad M=m-\frac{f}{k}\mu\sqrt{-1}, \qquad N=n-\frac{f}{k}\nu\sqrt{-1}, \\ S^2=(l^2+m^2+n^2)-2\frac{f}{k}(l\lambda+m\mu+n\nu)\sqrt{-1}=s^2-2\frac{f}{k}(l\lambda+m\mu+n\nu)\sqrt{-1}. \end{array} \right.$$

L'exponentielle des expressions (α'') deviendra donc

$$e^{k(t-lx-my-nz)\sqrt{-1}}\, e^{-f(\lambda x+\mu y+\nu z)}:$$

elle représentera, par sa partie réelle, des déplacements pendulaires proportionnels à $\cos k(t-lx-my-nz)$, mais avec le *facteur d'amortissement* ou *d'extinction* $e^{-f(\lambda x+\mu y+\nu z)}$ constant sur les plans perpendiculaires à la direction (λ, μ, ν).

Or les expressions (β'') de L, M, N, portées dans (β') en même temps que celles, (α'''), de A, B, C, permettent de dédoubler le premier membre de (β') en deux parties, l'une, pareille à ce qu'est ce premier membre quand a', b', c', f s'annulent, l'autre, petit accroissement *linéaire* de la première, corrélatif aux accroissements $(a^3a', b^3b', c^3c')\frac{\sqrt{-1}}{k}$ et $-(\lambda, \mu, \nu)\frac{f}{k}\sqrt{-1}$ de A, B, C, L, M, N. Comme cette seconde partie, affectée *seule*, dans l'équation, de $\sqrt{-1}$, devra être séparément annulée, la relation en l, m, n restera ce qu'elle est dans un milieu

transparent; et, pour chaque direction donnée ($\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$) de la normale aux ondes, elle deviendra l'équation (29) de Fresnel (p. 292) aux vitesses ω de propagation de ces ondes, entraînant par suite, sensiblement, la direction (l', m', n') des vibrations définie par (28) (même page 292).

Mais il restera, pour déterminer le coefficient d'extinction f, la petite partie imaginaire, annulée à part. Celle-ci, en appelant provisoirement $\delta(A, B, C, L, M, N)$ les petits accroissements donnés à A, B, C, L, M, N, puis posant, pour abréger,

$$(\beta'')\qquad K = \left(\frac{a^2 l}{a^2 s^2 - 1}\right)^2 + \left(\frac{b^2 m}{b^2 s^2 - 1}\right)^2 + \left(\frac{c^2 n}{c^2 s^2 - 1}\right)^2,$$

donne, par la différentiation complète de (β'), après division par -2, et vu l'expression $L^2 + M^2 + N^2$ de S^2,

$$-\frac{al(a\,\delta L + l\,\delta A)}{a^2 s^2 - 1} + \frac{a^3 l^2 s^2\,\delta A}{(a^2 s^2 - 1)^2} + \ldots + K(l\,\delta L + m\,\delta M + n\,\delta N) = 0,$$

ou bien, en groupant les termes affectés du même accroissement δ,

$$(\gamma)\qquad \left(Kl - \frac{a^2 l}{a^2 s^2 - 1}\right)\delta L + \ldots + \left(\frac{a^2 l}{a^2 s^2 - 1}\right)^2 \frac{\delta A}{a^3} + \ldots = 0.$$

Or, l, m, n étant $\dfrac{\cos(\alpha, \beta, \gamma)}{\omega}$, les trois fonctions $\dfrac{a^2 l}{a^2 s^2 - 1}$, $\dfrac{b^2 m}{b^2 s^2 - 1}$, $\dfrac{c^2 n}{c^2 s^2 - 1}$ sont entre elles comme $\dfrac{a^2 \cos\alpha}{\omega^2 - a^2}$, $\dfrac{b^2 \cos\beta}{\omega^2 - b^2}$, $\dfrac{c^2 \cos\gamma}{\omega^2 - c^2}$, c'est-à-dire, d'après (28) (p. 292), comme les trois cosinus directeurs l', m', n' de la vibration. On peut donc poser

$$\frac{a^2 l}{a^2 s^2 - 1} = l'\sqrt{K}, \qquad \frac{b^2 m}{b^2 s^2 - 1} = m'\sqrt{K}, \qquad \frac{c^2 n}{c^2 s^2 - 1} = n'\sqrt{K},$$

à la condition de compter positivement la vibration dans un sens convenable; et, vu (β'), en ajoutant ces relations après les avoir multipliées respectivement par l, m, n, on aura

$$1 = (ll' + mm' + nn')\sqrt{K}.$$

Appelons, d'une part, V, V' les angles faits avec la vibration par les deux normales aux plans d'onde et aux plans d'égale amplitude, d'autre part, V'' l'angle aigu de ces deux normales elles-mêmes; en sorte que

$$ll' + mm' + nn' = \frac{\cos V}{\omega}, \qquad \lambda l' + \mu m' + \nu n' = \cos V',$$

$$\lambda \cos\alpha + \mu \cos\beta + \nu \cos\gamma = \cos V''.$$

Il viendra, notamment,

$$\sqrt{K} = \frac{\omega}{\cos V}, \qquad \frac{a^2 l}{a^2 s^2 - 1} = \frac{\omega l'}{\cos V}, \qquad \ldots, \qquad Kl = \frac{\omega \cos\alpha}{\cos^2 V}, \qquad \ldots,$$

formules dont la première montre que $\cos V$ est positif, ou que le sens de la vibration a été choisi de manière à faire un angle aigu avec la normale aux ondes; et l'équation (γ), multipliée par $\dfrac{\omega}{K}$, ou par $\dfrac{\cos^2 V}{\omega}$, prendra la forme

$$(\cos\alpha - l'\cos V)\,\delta L + (\cos\beta - m'\cos V)\,\delta M + (\cos\gamma - n'\cos V)\,\delta N$$
$$= -\omega\left(l'^2 \frac{\delta A}{a^3} + m'^2 \frac{\delta B}{b^3} + n'^2 \frac{\delta C}{c^3}\right).$$

Enfin substituons à $\delta(L, M, N, A, B, C)$ leurs petites valeurs imaginaires $-(\lambda, \mu, \nu)\frac{f}{k}\sqrt{-1}$, $(a^3 a', b^3 b', c^3 c')\frac{\sqrt{-1}}{k}$; et, en introduisant $\cos V''$, $\cos V'$ au lieu des trinomes qui expriment ces cosinus, puis, résolvant par rapport à f, nous aurons, pour évaluer ce coefficient d'absorption ou d'extinction f, la formule très simple

$$(\gamma') \qquad f = \omega \frac{a' l'^2 + b' m'^2 + c' n'^2}{\cos V'' - \cos V \cos V'} = \omega \frac{a' l'^2 + b' m'^2 + c' n'^2}{\sin V \sin V' \cos U}.$$

Le troisième membre se déduit du second, par le théorème fondamental de la trigonométrie sphérique, en substituant, à $\cos V'' - \cos V \cos V'$, le produit des sinus des angles V, V' faits, avec la vibration, par les deux normales aux ondes et aux plans d'égale amplitude, multiplié par le cosinus du dièdre U compris entre les plans de ces deux angles V, V'.

Telle est donc l'expression du coefficient d'extinction ou d'absorption f. On voit que le rôle prépondérant y revient bien, comme l'avait pensé Fresnel, à la direction (l', m', n') de la vibration, direction à partir de laquelle se comptent les angles plans V, V' et autour de laquelle se mesure le dièdre U des plans de ces angles.

La petite inclinaison ε de la vibration sur le plan de l'onde, si souvent considérée dans la deuxième Partie de ce Mémoire, est le complément de V; de sorte que $\sin V = \cos\varepsilon$. Supposons, en outre, les ondes entrées dans le milieu sous l'incidence normale, afin qu'il y ait coïncidence des plans d'onde avec les plans d'égale amplitude, ou coïncidence de leurs normales; ce qui donnera $U = 0$, $V' = V$. Alors on aura

$$(\gamma'') \qquad f = \omega \frac{a' l'^2 + b' m'^2 + c' n'^2}{\cos^2\varepsilon}.$$

Vu la faiblesse des biréfringences, le facteur $\frac{\omega}{\cos^2\varepsilon}$, extrêmement peu supérieur à ω, ne variera pas sensiblement avec la direction des ondes; et le coefficient f d'extinction pourra être censé proportionnel au trinome $a' l'^2 + b' m'^2 + c' n'^2$. Conformément à une opinion générale des physiciens, suggérée par l'expérience, et formulée surtout par le profond minéralogiste Mallard [1], il variera, avec la direction (l', m', n') de la vibration, d'après une loi ellipsoïdale rappelant celle qu'exprime, pour le carré de la vitesse de propagation ω, la formule (179) (p. 418). Il y aura donc un *ellipsoïde d'absorption,* représentant le coefficient d'extinction f par le carré de l'inverse de son demi-diamètre orienté suivant la direction (l', m', n') des vibrations correspondantes, comme l'ellipsoïde inverse ordinaire (p. 418) exprime la vitesse de propagation ω par l'inverse de son demi-diamètre analogue.

Au degré d'approximation où l'on peut faire ω constant et annuler $\sin\varepsilon$ (c'est-à-dire $\cos V$), la formule (γ') donne, par son second membre, pour une même direction (l', m', n') de la vibration, mais diverses inclinaisons V'' d'un plan d'égale amplitude sur un plan d'onde, *un coefficient f d'extinction inverse de* $\cos V''$, c'est-à-dire *croissant comme l'aire de l'un de ces plans qui a sa projection sur l'autre égale à l'unité.*

---

(1) Toutefois les considérations synthétiques, un peu sommaires, qu'il donne à ce sujet (MALLARD, *Cristallographie géométrique et physique,* t. II, p. 354), lui font porter en dénominateur, dans l'expression du coefficient f, la vitesse ω de propagation des ondes, tandis que notre analyse plus précise la place au numérateur.

Dans le cas d'un milieu isotrope, où $c' = b' = a'$ et $\cos V = 0$, la formule (γ') se réduit à

$$(\gamma'') \qquad f = \frac{\omega a'}{\cos V''}.$$

On l'aurait vu directement, en observant que l'équation (β'), multipliée par les trois dénominateurs qui y figurent, devient alors $(A^2S^2 - 1)^2 = 0$ ou $S^2 = \frac{1}{A^2}$, c'est-à-dire, d'après (α'') et la quatrième formule (β''),

$$\frac{1}{\omega^2} - 2\frac{f \cos V''}{k\omega}\sqrt{-1} = \frac{1}{a^2} - 2\frac{a'}{k}\sqrt{-1}.$$

Il vient donc bien $\omega = a$ et $f \cos V'' = \omega a'$.

L'exemple de la tourmaline, qui éteint les vibrations normales à l'axe sous des épaisseurs laissant passer les autres vibrations en proportion notable, montre que les coefficients a', b', c' peuvent s'éloigner beaucoup de l'égalité (dans les rapports de 1 à 4,5 et jusqu'à 7 ou 8 pour la tourmaline), alors que les indices principaux de réfraction, inverses de a, b, c, se confondent presque. Donc les causes d'hétérotropie sont bien plus efficaces pour différencier les absorptions dans les divers sens que pour produire la biréfringence. On dirait que l'hétérotropie n'atteint pas a, b, c dans leur partie principale ou essentielle, mais seulement dans une partie corrective ou complémentaire, effet d'une cause en quelque sorte accessoire, tandis que a', b', c', en entier *petits*, et dus surtout à cette cause, manifesteraient complètement ses inégalités dans les divers sens.

Une indication importante résulte des formules (111) et (155) (p. 240 et 261) de la résistance de corps solides immergés dans un fluide oscillant, formules qui nous ont été si précieuses pour l'évaluation, par analogie, de la résistance des molécules pondérables aux vibrations de l'éther. Lors des grandes valeurs de k, correspondant aux très petites périodes vibratoires dans le genre de celles des radiations lumineuses et même calorifiques, elles font presque indépendant de k le terme proportionnel à l'accélération, mais variable avec k dans un rapport illimité, quoique assez lentement (par une partie en raison directe de $\sqrt{k}$), le terme proportionnel à la vitesse.

Ainsi, a', b', c' seront petits, mais, relativement, assez dépendants de la période vibratoire, contrairement à a, b, c; et l'ellipsoïde d'absorption changera beaucoup (tant de grandeur que de forme) avec la couleur, pour les diverses lumières simples. Donc une lumière composée, blanche, par exemple, en traversant une couche plus ou moins épaisse d'une matière hétérotrope translucide, variera de composition, non seulement avec l'épaisseur, mais aussi avec l'orientation de la couche dans le corps qui l'aura fournie, et présentera, suivant la direction des rayons en émergeant, une variété presque infinie de teintes.

Voilà comment s'explique la multiple coloration, le *polychroïsme*, des substances hétérotropes imparfaitement transparentes.

D'après ce qu'on vient de voir, l'analogie tirée de la résistance des fluides donne pour a', b', c' des variations en sens inverse de la période vibratoire. L'absorption croîtrait donc du rouge au violet : ce qui ferait prédominer les radiations à grande longueur d'onde, dans une lumière tamisée par une épaisseur suffisante d'un milieu translucide. Mais on a déjà remarqué (p. 454) qu'il y a des cas nombreux d'absorptions *électives*.

La même analogie, qui avait indiqué (p. 276) la triple égalité $D' = D$, $E' = E$, $F' = F$ et, par suite, l'existence d'*axes principaux*, ou axes rectangulaires de symétrie, dans tous les corps transparents, est muette à cet égard dès qu'il s'agit, non plus de résistances dépendant des accélérations relatives, mais bien, comme

ici, de *frottements,* liés aux *vitesses* de déformation. *Rien* donc *ne dit qu'il existe un ellipsoïde d'absorption dans les corps des deux derniers systèmes cristallins, les moins symétriques.* Mais ce sujet mérite quelques développements.

En général, les résistances dépendant des vitesses ξ', η', ζ' introduisent dans les équations de mouvement trois composantes analogues aux forces $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$, $\mathcal{R}_z$ des formules (4) (p. 271), mais avec ξ', η', ζ' au lieu des accélérations ξ'', η'', ζ''. On peut leur appliquer sans aucun changement, dans les transformations de coordonnées, les raisonnements et les calculs des nos 4 et 5 (p. 273 à 276). Donc il existe toujours un système d'axes rectangulaires où les neuf coefficients de ces trois trinomes en ξ', η', ζ' se réduisent à six, distincts, de la forme $2a'$, f, $-$e dans la première équation, $-$f, $2b'$, d dans la deuxième, e, $-$d, $2c'$ dans la troisième, après division par μ et transposition des trinomes dans les premiers membres.

Bornons-nous au cas simple, *exceptionnel,* où les axes en question, qu'on peut appeler alors *principaux,* coïncident avec ceux qui réduisent aux quotients respectifs de ξ'', η'', ζ'' par a^2, b^2, c^2 les composantes de la résistance partielle due aux accélérations. Il ne comprend malheureusement pas le cas des cristaux du *cinquième système,* où il y a un axe, choisi, par exemple, comme axe des z, autour duquel une rotation des x, y, z égale à une demi-circonférence ne change rien aux formules des résistances $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$, $\mathcal{R}_z$ totales et astreint, par suite, d'une part, $\mathcal{R}_z$ à ne contenir que ζ'' et ζ', d'autre part, $\mathcal{R}_x$ et $\mathcal{R}_y$ à ne contenir ni ζ'', ni ζ'; car l'orientation des x et des y, qui y rend égaux et contraires les deux coefficients respectifs de η' dans $\mathcal{R}_x$ et de ξ' dans $\mathcal{R}_y$, différera généralement de celle qui y annule le coefficient commun de η'' dans $\mathcal{R}_x$ et de ξ'' dans $\mathcal{R}_y$. Mais notre cas simple comprend celui d'isotropie dissymétrique autour de l'axe des z, cas d'un milieu isotrope placé dans un champ magnétique, qui a été le point de départ de ce numéro; car, dans un tel milieu, non seulement $\mathcal{R}_z$ ne contient que ζ'' et ζ', absents de $\mathcal{R}_x$ et de $\mathcal{R}_y$, mais, de plus, tous les azimuts que peuvent venir occuper les x et les y jouissent des mêmes propriétés, ou, par conséquent, annulent, comme est tenu de faire l'un d'eux, le coefficient commun de η'' dans $\mathcal{R}_x$ et de ξ'' dans $\mathcal{R}_y$, ainsi que la somme algébrique des deux coefficients de η' dans $\mathcal{R}_x$ et de ξ' dans $\mathcal{R}_y$, comme est tenu de le faire également un autre azimut.

C'est donc, en particulier, à un milieu comme les solutions liquides étudiées par M. Quirino Majorana que s'appliquera notre hypothèse.

La coïncidence des axes principaux pour les deux sortes de résistances étant ainsi admise, les trois équations (α') s'accroîtront, à leurs premiers membres, des termes respectifs

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{f}\eta - \mathrm{e}\zeta,\ -\mathrm{f}\xi + \mathrm{d}\zeta,\ \mathrm{e}\xi - \mathrm{d}\eta);$$

et les expressions symboliques (α'') de ξ, η, ζ rendront ces termes identiques à

$$\frac{d^2}{dt^2}(\mathrm{F}\eta - \mathrm{E}\zeta,\ -\mathrm{F}\xi + \mathrm{D}\zeta,\ \mathrm{E}\xi - \mathrm{D}\eta),$$

si l'on convient de poser

$$(\delta) \qquad (\mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}) = -\frac{(\mathrm{d}, \mathrm{e}, \mathrm{f})}{k}\sqrt{-1}.$$

Dès lors, les équations symboliques (β) du mouvement feront place à celles-ci,

$$(\delta') \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\xi}{\mathrm{A}^2} + \mathrm{F}\eta - \mathrm{E}\zeta,\ -\mathrm{F}\xi + \frac{\eta}{\mathrm{B}^2} + \mathrm{D}\zeta,\ \mathrm{E}\xi - \mathrm{D}\eta + \frac{\zeta}{\mathrm{C}^2}\right) \\ &\quad = \Delta_2(\xi, \eta, \zeta) - \frac{d\theta}{d(x, y, z)}, \end{aligned} \right.$$

qui ont précisément la forme de celles, (164), du n° 54 (p. 413). Par suite, en posant, d'après les formules (165), où l'inverse de ω^2, savoir (ici) $L^2+M^2+N^2$, sera désigné encore par S^2,

$$(\delta'') \qquad P = DL + EM + FN, \qquad (U, V, W) = \frac{1-(A^2, B^2, C^2)S^2}{(A^2, B^2, C^2)},$$

les rapports mutuels de L', M', N' résulteront, vu les formules (167) (p. 414), de la double proportion

$$(\varepsilon) \qquad \frac{L'}{LVW + DP - M.FW + N.EV} = \frac{M'}{MWU + \ldots} = \frac{N'}{NUV + \ldots},$$

et l'équation en L, M, N sera, d'après (169) par exemple (p. 414), après division par UVW,

$$(\varepsilon') \qquad \frac{L^2}{A^2U} + \frac{M^2}{B^2V} + \frac{N^2}{C^2W} + \frac{P^2 + D^2U + E^2V + F^2W}{UVW} S^2 = 0.$$

Les coefficients de dissymétrie d, e, f, que contiennent linéairement D, E, F, P, ne figurent qu'au *second* degré dans cette formule, ainsi que dans le deuxième terme de chaque dénominateur des rapports égaux (ε). Si donc ces coefficients, d, e, f, de *polarisation rotatoire* sont *seulement* du même ordre de grandeur que ceux, $2a'$, $2b'$, $2c'$, d'*extinction,* ou se trouvent, comme eux, très petits devant les différences mutuelles de a, b, c, auxquelles sont dues la biréfringence ordinaire et la forme *rectiligne* ou l'orientation *déterminée* (l', m', n') de la vibration, on pourra supprimer, comme étant du second ordre et négligeable, tout le qnatrième terme de (ε'). Et l'équation en L, M, N prendra, après substitution à U, V, W de leurs expressions (δ''), la forme

$$(\varepsilon'') \qquad \frac{L^2}{A^2S^2-1} + \frac{M^2}{B^2S^2-1} + \frac{N^2}{C^2S^2-1} = 0,$$

équivalente à (β'), de même que (169) équivaut à (168), mais un peu plus simple, sans néanmoins qu'elle soit préférable pour arriver à notre équation capitale (γ). Par suite, les rapports égaux (ε) devenant, d'ailleurs, à peine fonction de d, e, f, savoir au degré où ils l'étaient déjà de a', b', c', c'est-à-dire trop peu pour empêcher la vibration de garder sensiblement son orientation *fixe,* (l', m', n'), du cas de symétrie et transparence parfaites, les calculs ci-dessus (p. 484 à 486) s'appliqueront; et l'on aura les formules (γ'), (γ'') du coefficient f d'absorption, comme s'il y avait symétrie. Ainsi se trouve justifiée déjà en partie la suppression, que nous avons faite, des termes de polarisation rotatoire, dans le calcul de l'absorption d'un milieu isotrope soumis à l'influence d'un champ magnétique.

Il en serait autrement pour une dissolution douée d'un fort pouvoir rotatoire magnétique, où d, e, f, beaucoup plus grands que a', b', c', atteindraient au moins l'ordre de grandeur des différences entre a, b et c; car alors les parties imaginaires de A, B, C et *leurs corrélatives* dans L, M, N, à carrés et produits négligeables encore, seraient *seules* assimilables à des différentielles. On pourrait néanmoins, supprimant du numérateur, dans le quatrième terme de (ε'), les parties du troisième ordre D^2U, E^2V, F^2W, à côté de celle, P^2, du second, réduire très sensiblement cette équation (ε'), vu les formules (δ'') et les valeurs (δ) de D, E, F, à

$$(\varepsilon''') \quad \frac{L^2}{A^2S^2-1} + \frac{M^2}{B^2S^2-1} + \frac{N^2}{C^2S^2-1} = \frac{A^2B^2C^2(dL + eM + fN)^2S^2}{k^2(A^2S^2-1)(B^2S^2-1)(C^2S^2-1)}.$$

Mais il est clair que cette équation, traitée comme (ε''), c'est-à-dire comme l'a

été (β') pour donner (γ), conduirait à une expression du coefficient d'extinction f plus compliquée que (γ') et où, notamment, ne figurerait pas explicitement la direction de la vibration. En effet, les formules (ε), où les dénominateurs contiendraient, dès la première approximation, les imaginaires D, E, F mêlées à des parties réelles, définiraient des rapports mutuels de L', M', N' impliquant des différences notables de phase entre ξ, η, ζ et, par suite, donneraient des vibrations *curvilignes,* quasi transversales sans doute, mais sans orientation *déterminée.*

On peut toutefois, dans le cas d'isotropie dissymétrique autour de l'axe des z, où l'on a $b = a$, $b' = a'$, $d = 0$, $e = 0$ (d'où aussi $B = A$, $D = 0$, $E = 0$), reconnaître presque sans calculs que *toutes les vibrations pendulaires, de période donnée, perpendiculaires à l'axe, ont sensiblement le même coefficient f d'extinction.*

En effet, le troisième rapport (ε) est alors $\dfrac{N'}{N(U^2+F^2)}$; et la condition, $N' = 0$, de perpendicularité de la vibration à l'axe d'isotropie, exige que l'on ait soit $U^2 + F^2 = 0$, soit $N = 0$. Le premier cas se produit pour les ondes cheminant suivant l'axe, où l'on a (en se bornant à l'hypothèse de l'incidence normale)

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = \frac{1}{\omega} - \frac{f}{k}\sqrt{-1},$$

$$U = \frac{1}{A^2} - N^2 = \frac{1}{a^2}\left(1 + \frac{a^2 a'}{k}\sqrt{-1}\right)^{-2} - \frac{1}{\omega^2} + \frac{2f}{k\omega}\sqrt{-1} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2} + 2\,\frac{f - \omega a'}{k\omega}\sqrt{-1};$$

et l'équation $U^2 + F^2 = 0$, ou $U = \pm\dfrac{f}{k}$, à laquelle est alors réduite (ε'), s'y dédouble en celles-ci,

$$(\zeta) \qquad \frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2} = \pm\frac{f}{k}, \qquad f - \omega a' = 0,$$

dont la première détermine les deux vitesses ω de propagation des deux systèmes possibles de vibrations circulaires, tandis que la seconde donne ensuite le coefficient d'extinction $f = \omega a'$.

Le second cas, $N = 0$, est celui d'ondes parallèles à l'axe, où les vibrations, quasi transversales, sont perpendiculaires à cet axe. Alors l'équation (ε') où $P = 0$, multipliée par A^2UVW, c'est-à-dire par A^2U^2W, devient

$$(L^2 + M^2)\,W(U + A^2F^2) = 0;$$

et, W ne s'annulant pas [sans quoi les deux premiers rapports (ε) seraient infinis], elle donne

$$U = -A^2F^2 = A^2\frac{f^2}{k^2},$$

c'est-à-dire $U = 0$, vu que le carré f^2 sera toujours négligeable. Si l'on choisit les x positifs suivant la normale aux ondes, de manière à avoir (en se bornant encore à l'incidence normale)

$$M = 0, \qquad N = 0,$$

$$L = \frac{1}{\omega} - \frac{f}{k}\sqrt{-1}, \qquad U = \frac{1}{A^2} - L^2 = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2} + 2\,\frac{f - \omega a'}{k\omega}\sqrt{-1},$$

l'équation $U = 0$ s'y dédouble finalement en celles-ci :

$$(\zeta') \qquad \frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad f - \omega a' = 0.$$

Il y a donc, en tout, trois vitesses (positives) ω, dont la troisième, a, moyenne des deux premières, n'en diffère que par un terme très petit de l'ordre de f; et, par suite, les trois coefficients correspondants $\omega a'$ d'extinction, qu'on aurait déduits de la formule (γ'') (vu $n' = 0$ et $b' = a'$), se confondent sensiblement. Ainsi, on peut bien dire que *les vibrations normales à l'axe, qu'elles soient circulaires ou à très peu près rectilignes, et se propagent suivant l'axe ou perpendiculairement à l'axe, ont le même coefficient f d'extinction.* Or tel est justement le résultat constaté par M. Quirino Majorana, dans les expériences que mentionne le début du présent numéro, et qui ont porté sur des rayons soit parallèles, soit normaux à l'axe d'isotropie.

Dans le cas d'ondes parallèles à l'axe, une seconde vibration est possible (correspondant à $W = 0$), normale à la première ou dirigée suivant les z. Comme on y a $\xi = 0$, $\eta = 0$ et $\theta = 0$ (ζ ne dépendant pas de z), les équations (δ') du mouvement s'y réduisent à la troisième, affectée de ζ seul et identique à celle d'un milieu isotrope. La vitesse de propagation ω y est donc c, et le coefficient f d'extinction, $\omega c'$, d'après la formule (γ'') où s'annulent alors l', m' et qu'on a reconnu (p. 487) s'appliquer à un milieu isotrope. Comme c' peut avoir un rapport quelconque à a', ce coefficient f diffère notablement du précédent $\omega a'$: M. Quirino Majorana l'a également constaté.

Le coefficient f d'extinction se calcule encore simplement quand l'influence d'un champ magnétique produit la polarisation rotatoire sans aucun mélange de biréfringence ordinaire, c'est-à-dire quand les coefficients de dissymétrie d, e, f n'empêchent pas les égalités $c = b = a$ et $c' = b' = a'$ (d'où aussi $C = B = A$, $W = V = U$) : ce qui réduit l'équation (ε'), après suppression du facteur commun $L^2 + M^2 + N^2$ (ou S^2) et multiplication par $A^2 U^3$, à

$$U^2 + A^2 P^2 + A^2 (D^2 + E^2 + F^2) U = 0,$$

ou à

$$U^2 = \frac{A^2}{k^2} [(\mathrm{d}L + \mathrm{e}M + \mathrm{f}N)^2 + (\mathrm{d}^2 + \mathrm{e}^2 + \mathrm{f}^2) U].$$

Appelons φ l'*axe d'asymétrie* (ligne des pôles d'un aimant, par exemple), émané de l'origine, dont les trois projections sur les axes seraient d, e, f; et i, i' les deux angles respectifs faits avec cet axe par les deux normales aux ondes et aux plans d'égale amplitude. Vu les valeurs (β'') de L, M, N, où l, m, n sont $\frac{\cos(\alpha, \beta, \gamma)}{\omega}$, on aura évidemment

$$\mathrm{d}L + \mathrm{e}M + \mathrm{f}N = \varphi\left(\frac{\cos i}{\omega} - \sqrt{-1}\,\frac{f \cos i'}{k}\right),$$

et l'équation précédente, où seront négligeables les termes en f^2, deviendra

$$U^2 = \frac{\varphi^2 A^2}{k^2}\left(U + \frac{\cos^2 i}{\omega^2} - 2\sqrt{-1}\,\frac{f \cos i \cos i'}{k\omega}\right),$$

ou, en raison des valeurs, dans le second membre, (δ'') de U et (β'') de S^2,

$$U^2 = \frac{\varphi^2}{k^2}\left[1 - A^2\left(\frac{\sin^2 i}{\omega^2} + 2f\sqrt{-1}\,\frac{\cos i \cos i' - \cos V''}{k\omega}\right)\right].$$

La valeur de S^2 étant, comme on vient de voir, d'après la dernière formule (β''),

$$\frac{1}{\omega^2} - 2\,\frac{f \cos V''}{k\omega}\sqrt{-1},$$

et, d'ailleurs, celle de $\frac{1}{A^2}$, d'après la première (α''),

$$\frac{1}{a^2} - 2\frac{a'}{k}\sqrt{-1},$$

l'expression (δ'') de U se réduit à

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2}\right) + 2\frac{f\cos V'' - \omega a'}{k\omega}\sqrt{-1};$$

en sorte que l'équation ci-dessus devient, en définitive,

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)\frac{f\cos V'' - \omega a'}{k\omega}\sqrt{-1}$$
$$= \frac{\varphi^2}{k^2}\left[1 - \frac{a^2\sin^2 i}{\omega^2} - \frac{2a^2}{k\omega}\left(\frac{a^2 a'\sin^2 i}{\omega} + f\cos i\cos i' - f\cos V''\right)\sqrt{-1}\right].$$

En égalant, dans les deux membres, le réel au réel, on voit que le binome $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2}$ est de l'ordre de petitesse de φ; d'où il suit, en egalant ensuite l'imaginaire à l'imaginaire, que le facteur $4\frac{f\cos V'' - \omega a'}{k\omega}$, multipliant ce binome dans le second terme, est de l'ordre du produit de φ par a' ou par f, et qu'il se trouve, par suite, très petit en comparaison de f. Il vient donc sensiblement

$$f\cos V'' - \omega a' = 0 \qquad \text{ou} \qquad f = \frac{\omega a'}{\cos V''},$$

c'est-à-dire encore ce que donne la formule (γ') quand on néglige la petite inclinaison ε de la vibration sur le plan de l'onde.

Ces divers résultats tendent à montrer que l'expression (γ') du coefficient d'extinction, réduite du moins à sa forme approchée

$$(\zeta'') \qquad f = \omega\frac{a'l'^2 + b'm'^2 + c'n'^2}{\cos V''},$$

s'étend *d'une certaine manière* aux milieux dissymétriques isotropes autour d'un axe, peut-être même à tous ceux que régit l'équation (ε''). Serait-ce par la substitution de valeurs moyennes convenables aux carrés l'^2, m'^2, n'^2 des cosinus directeurs de la vibration? Il faudrait au moins, pour le savoir, traiter l'équation (ε'') comme l'a été ci-dessus l'équation plus simple (β'). Je laisserai à d'autres ou je remettrai à plus tard cette tâche, ainsi que l'étude de l'absorption par les corps du cinquième système cristallin, où il y a à faire nuls D, E et à remplacer, dans les équations symboliques (δ') du mouvement, F, $-$F par deux autres petits coefficients, tout imaginaires aussi, mais indépendants, F, F_1. On pourrait aborder ce problème par le cas simple où $F_1 = F$, dont on confronterait les résultats avec ceux de l'observation avant de passer, si c'était alors nécessaire, au cas général.

La forme symbolique (α'') des intégrales ξ, η, ζ, bien que très particulière, convient pour tout système d'ondes planes, à vibrations *pendulaires* se propageant dans un corps translucide et *dont l'amplitude ne varie notablement qu'avec la distance à un plan donné :* condition réalisée dans le mouvement vibratoire produit, à l'intérieur du corps, par des ondes périodiques lui arrivant de très loin sur une face plane, cas où, visiblement, l'amplitude ne peut guère dépendre que de la distance à cette face.

En effet, si u désigne la distance $\lambda x + \mu y + \nu z$ du point quelconque (x, y, z) au plan donné et U l'amplitude fonction de u, les trois déplacements effectifs de l'éther dans le corps seront les produits de U par trois binomes trigonométriques de la forme $A \cos k(t - lx - my - nz) + B \sin k(t - lx - my - nz)$. D'ailleurs, le corps étant translucide, l'amplitude U ne variera que lentement avec u et aura ses dérivées successives U', U'', ... d'ordres de petitesse de plus en plus élevés. Quand on substituera ces expressions de ξ, η, ζ dans les équations du mouvement, on pourra donc, en tenant compte des termes en U', négliger les termes en U''. Alors chaque équation contiendra à ses deux membres deux termes à coefficients binomes en U et U', termes affectés, l'un, du cosinus, l'autre, du sinus, de l'arc $k(t - lx - my - nz)$; et la vérification de l'équation aux époques où s'annule soit le cosinus, soit le sinus, obligera d'égaler dans les deux membres, séparément, les coefficients du cosinus et, séparément, les coefficients du sinus. Il viendra ainsi, en U et U', des équations de la forme $FU' + GU = 0$, tenues d'être compatibles, et entraînant pour U une expression comme $C e^{-fu}$. Dès lors, on pourra mettre ξ, η, ζ sous les formes

$$\xi = C e^{-fu} \cos[k(t - lx - my - nz) + \text{const.}], \qquad \eta = \ldots, \qquad \zeta = \ldots.$$

Or, en reculant dans le passé, d'un quart de période, l'origine des temps, de manière à remplacer kt par $kt - \frac{\pi}{2}$, ces intégrales particulières des équations du mouvement en donneront d'autres, savoir :

$$\xi = C e^{-fu} \sin[k(t - lx - my - nz) + \text{const.}], \qquad \eta = \ldots, \qquad \zeta = \ldots;$$

et celles-ci, multipliées par $\sqrt{-1}$, puis ajoutées respectivement aux précédentes, conduiront aux solutions symboliques

$$\xi = C e^{-fu} e^{[k(t-lx-my-nz)+\text{const.}]\sqrt{-1}}, \qquad \eta = \ldots, \qquad \zeta = \ldots.$$

Mais remplaçons u par $\lambda x + \mu y + \nu z$, puis posons

$$C e^{\sqrt{-1}\,\text{const.}} = L', \qquad \ldots;$$

et ces solutions symboliques seront identiquement (α''). Donc les déplacements effectifs cherchés constituent bien les parties réelles de solutions symboliques de la forme (α''), et, du moins pour les corps translucides, il n'en existe pas d'autres que ceux qui ont été obtenus.

Il en serait, vraisemblablement, encore de même pour les corps très opaques, où l'on ne pourrait plus négliger U''; car la compatibilité de toutes les équations linéaires en U'', U' et U obtenues ne manquerait pas de réduire l'expression de U à une seule solution simple de la forme Ce^{-fu}.

77. Altération des périodes vibratoires par un champ magnétique : phénomène de Zeemann. — Ce n'est pas seulement la propagation de la lumière à travers les corps qui peut se trouver modifiée dans un champ magnétique, mais aussi sa *production*. On conçoit, en effet, même sans pénétrer le jeu, bien obscur encore, des tourbillons magnétiques, que toute cause d'hétérotropie, comme le magnétisme dont il s'agit maintenant, ou l'électricité, ou simplement une action mécanique (consistant dans des pressions ou tractions inégales

suivant les divers sens, soit persistantes, soit passagères, mais productrices d'effets *permanents*), puisse atteindre dans un corps non seulement les groupes de molécules, mais aussi, parfois, si elle devient assez intense, les molécules elles-mêmes, aux vibrations intérieures desquelles paraissent dues spécialement les radiations caractéristiques de ce corps. Par suite, si molécules ou groupes moléculaires ont individuellement, à l'état naturel, des axes de symétrie les rendant aptes à vibrer suivant *plusieurs* sens avec la *même* période, ou permettant à l'équation caractéristique de leurs périodes vibratoires d'avoir des racines *égales,* comme nous avons vu (t. I, p. 313) qu'en admettait, par exemple, dans le refroidissement des corps de révolution, l'équation caractéristique des coefficients d'extinction propres aux diverses solutions simples, une légère hétérotropie survenant pourra altérer ces périodes, très peu sans doute, mais *inégalement* suivant les sens, qui *cesseront* d'être pareils; et elle les dédoublera ainsi en racines distinctes, d'un degré de multiplicité *moindre* que la primitive racine commune, mais correspondant, en revanche, à des mouvements *plus polarisés,* à des vibrations de forme et d'orientation plus précises. Or, de là résultera évidemment la présence, dans le spectre à raies du corps, de deux ou de trois radiations différentes, quelquefois même d'un plus grand nombre, ayant, chacune, une polarisation *définie,* à la place d'une seule radiation, de période presque identique, mais de direction vibratoire moins déterminée, offerte par le spectre naturel du corps. On s'explique donc de cette manière générale, sans préjudice de théories particulières plus précises et plus détaillées, les divisions d'une raie unique en *doublets, triplets, quadruplets,* polarisés, que Zeemann, Cornu, M. Henri Becquerel et d'autres physiciens ont observées dans les spectres de corps amenés à l'état de gaz incandescents et soumis à une action magnétique intense ([1]).

([1]) Comme il y aura toujours de petites causes pour altérer légèrement, en sens divers, la constitution des molécules ou des groupes de molécules, et que l'*agitation même,* à défaut d'autres, *en sera une,* les périodes vibratoires s'écarteront toujours un peu, çà et là, dans un corps lumineux, de leurs valeurs moyennes, surtout *lorsque grandira l'amplitude* des vibrations. Ainsi s'explique la largeur sensible, même dans les gaz incandescents, des raies brillantes constituant leurs spectres d'émission, et l'accroissement de cette largeur quand la température s'élève.

HUITIÈME PARTIE.

PROPAGATION D'UN PINCEAU DE LUMIÈRE DANS UN MILIEU HÉTÉROGÈNE; PRINCIPE DE FERMAT.

78. Principe de Fermat sur l'économie du temps, dans la transmission du mouvement lumineux à travers un milieu hétérogène : nécessité d'en justifier l'emploi ([1]). — La longue étude des ondes lumineuses que nous venons de faire, ou plutôt d'esquisser à grands traits, ne porte, malgré la multiplicité de ses détails, que sur les phénomènes les plus simples et, en quelque sorte, élémentaires, si on les compare à la multitude de ceux où les conditions qui président soit à la production du mouvement vibratoire, soit à sa propagation, sont trop complexes pour nous être accessibles. Nous n'avons, en particulier, abordé l'hypothèse d'un milieu hétérogène (n° 31, p. 340 à 350) que pour former les conditions relatives à la mince couche de transition séparant deux milieux homogènes; ce qui revenait à ne la considérer que dans le cas extrême d'une variation, à la fois très rapide et très localisée, de la constitution moléculaire. Or, si d'insurmontables difficultés d'intégration, dues à la complication même des choses, nous interdisent, en général, l'étude d'une telle hypothèse d'hétérogénéité, il est néanmoins un second cas extrême, savoir, le cas opposé d'une variation très lente et se produisant sur de grands espaces, que nous devons pouvoir aussi attaquer utilement par notre analyse; car l'observation des réfractions atmosphériques, où cet autre cas extrême se présente, montre que les phénomènes se simplifient alors assez pour rendre possible la transmission, sensiblement intégrale, du mouvement d'un faisceau de rayons, suivant certains sens et sur de grandes longueurs, quoique non en ligne droite.

J'essaierai donc de traiter le problème de la transmission d'un pinceau de lumière parallèle, à l'intérieur d'un milieu dont la constitution sera lentement variable d'un point à l'autre. Cette théorie étant faite

([1]) Cette partie de la présente Note (sauf le n° 88) a été résumée dans trois Communications faites, en 1899, à l'Académie des Sciences de Paris (*Comptes rendus*, t. CXXIX, p. 794, 859 et 905; 20 novembre, 27 novembre et 4 décembre 1899).

surtout pour les corps gazeux, les seuls où la densité et la réfringence varient dans de larges limites (relatives) et d'après des lois régulières connues, je pourrai y admettre les deux hypothèses simplificatrices d'isotropie et de transparence, qui leur sont toujours applicables (même la seconde, sous des épaisseurs modérées), et, d'ailleurs, supposer homogènes du second ordre les équations du mouvement. Celles-ci auront donc (n° 5, p. 276) la forme simple

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} = \Delta_2(\xi, \eta, \zeta) - \frac{d\theta}{d(x, y, z)}, \tag{246}$$

ω^2 y désignant le carré, $\frac{\mu}{\rho(1+A)}$, de la vitesse de propagation, fonction continue donnée de x, y, z, mais très lentement variable, ou la même sensiblement (c'est-à-dire à de très petites fractions près de sa valeur) dans les étendues de dimensions comparables à une longueur d'onde.

On sait comment les physiciens et les astronomes traitent la question posée. Ils se représentent, dans le corps hétérogène dont il s'agit, une suite de surfaces sur toute l'étendue de chacune desquelles on ait $\omega =$ const., surfaces très voisines les unes des autres, ou découpant le corps en couches minces; et ils supposent alors homogène chaque couche, sans erreur sensible, comme si les changements de valeur de ω se faisaient uniquement aux surfaces de séparation des couches successives. Alors ces changements, étant très petits, donnent lieu, sur chaque surface considérée $\omega =$ const., à un rayon réfléchi insensible, et à un rayon réfracté peu différent du rayon incident, tant pour la direction que pour l'amplitude. La transmission de la lumière est conçue ainsi se faire suivant une ligne brisée à côtés très peu inclinés et très petits, dont deux consécutifs sont dans un même plan avec la normale à la surface intermédiaire $\omega =$ const., et font avec cette normale des angles i tels, d'après la loi des sinus, que le quotient $\frac{\sin i}{\omega}$ ait même valeur de part et d'autre de la surface en question.

Or ces deux lois de la réfraction ont été obtenues par Fermat, comme on sait, en exprimant que le chemin formé par les deux côtés considérés est, entre ses deux extrémités, celui de tous les trajets imaginables, à travers les deux couches correspondantes, qui exige le moins de temps pour la transmission du mouvement, eu égard aux deux vitesses respectives données de sa propagation dans ces couches. Il suit de là que, au moins dans des étendues assez restreintes, la ligne brisée, à petits côtés, dont il s'agit, constitue aussi sensiblement,

entre deux quelconques de ses points, le trajet de durée minimum pour la lumière, à travers les couches interposées. Car un tel trajet de durée minimum, évidemment existant, ne peut l'être, entre ses deux extrémités, que s'il l'est aussi en détail, c'est-à-dire à la traversée d'un couple quelconque de couches successives : ce qui détermine de proche en proche sa construction, du moins à partir de son premier côté supposé donné. Enfin, ce même trajet à petits côtés ne peut manquer d'être partout très voisin de la courbe $\int ds$ qui, menée entre deux quelconques de ses sommets, rendrait minimum le temps total $\int \frac{ds}{\omega}$ de la transmission de la lumière suivant sa longueur, calculé, pour chaque élément ds de la courbe, en y mettant la vraie valeur de la vitesse ω de propagation dans la partie de couche où se trouve cet élément ds. Car les erreurs relatives commises sur ω à raison de l'uniformisation fictive des couches, ou lors du remplacement de la courbe par la ligne brisée, sont extrêmement petites; et, faisant varier très peu l'intégrale $\int \frac{ds}{\omega}$ prise le long d'un chemin quelconque, elles ne peuvent pas changer sensiblement son minimum, ni, par suite, déplacer d'une manière notable le trajet qui le fournit, Ainsi, la méthode suivie par les physiciens, pour chercher ce que devient un rayon lumineux, dans un milieu transparent hétérogène, indique pour l'axe du rayon lumineux, conformément au principe de Fermat, une courbe brachistochrone, c'est-à-dire un trajet de durée minimum entre ses divers points, du moins quand ils sont pris assez rapprochés chacun du suivant.

Mais, outre d'importants détails d'amplitude et de limitation latérale qui restent à éclaircir, le résultat principal ainsi obtenu, savoir, la construction même du rayon, n'est pas à l'abri de tout doute. En effet, les lois de la réflexion et de la réfraction, qui servent à l'effectuer, n'ont été démontrées que dans l'hypothèse expresse de couches de transition (entre milieux *homogènes*) très *minces*, c'est-à-dire d'une épaisseur négligeable à côté de la longueur d'onde. Et l'on peut, dès lors, craindre que la condensation fictive de l'hétérogénéité aux limites des couches n'ait notablement altéré la nature du phénomène. Si donc le principe de Fermat sur l'économie du temps s'applique néanmoins au cas d'une hétérogénéité continue, c'est *indépendamment des lois de la réfraction;* et il y a, de toute manière, lieu de traiter directement ce cas, en essayant d'y intégrer les équations (246).

Dans une étendue généralement restreinte par rapport à l'ensemble du corps, mais comprenant le plus souvent un grand nombre d'ondes, les surfaces $\omega = \text{const.}$ seront, à très peu près, planes et parallèles. Nous pourrons donc, adoptant leur direction pour celle du plan des yz, les y supposer, avec une certaine approximation, normales à l'axe des x, de manière à avoir ω fonction de x seulement. Pour fixer les idées, nous admettrons que ω, constant du côté des x négatifs, où ω_0 désignera sa valeur, commence, pour $x = 0$, c'est-à-dire sur le plan des yz, à varier lentement avec x.

79. Recherche de ce que devient un système d'ondes planes, dans un milieu transparent à couches planes et parallèles. — Demandons-nous d'abord ce que deviendra, à partir de ce plan $x = 0$, dans la région des x positifs, un système d'ondes planes latéralement illimitées, venues des régions où x est négatif. On donnera la normale à ces ondes, tirée de l'origine dans le sens vers lequel elles progressent. Choisissons l'axe des y positifs suivant la projection de cette normale sur le plan $x = 0$ de la dernière couche homogène et, par suite, un axe des z parallèle aux ondes. Si i_0 désigne l'angle (aigu et positif) d'incidence, ou angle de la même normale aux ondes avec les x positifs, celle-ci aura pour cosinus directeurs $\cos i_0$, $\sin i_0$, zéro; et le petit déplacement transversal, dont on donnera également la direction commune, sera, dans le système de ces ondes, comme nous savons, une fonction de la variable unique $t - l_0 x - my$, si l_0 et m désignent les quotients

$$(247) \qquad l_0 = \frac{\cos i_0}{\omega_0}, \qquad m = \frac{\sin i_0}{\omega_0}.$$

Sur le plan $x = 0$ où commence l'hétérogénéité, les ébranlements seront donc fonctions de $t - my$, ou se produiront en tous les points de la même manière que sur l'axe des z, mais à des époques d'autant plus tardives que sera plus grande la distance y de ces points (dans le plan) à l'axe des z, savoir, avec des retards valant my. Il est clair dès lors, par raison de parité, que, sur toute l'étendue d'une couche quelconque $x = \text{const.}$ du milieu, on observera ultérieurement, en conséquence de ces ébranlements, les *mêmes* phénomènes, mais avec des retards relatifs pareils; car, sur le plan $x = \text{const.}$, les parallèles à l'axe des z définies par les diverses abscisses y se trouvent situées, toutes, exactement de même par rapport à l'ensemble des couches, au plan d'ébranlement $x = 0$ et à la droite de ce plan ayant leur abscisse y. Donc, quel que soit x, les circonstances observées ne

seront fonction de t et de y que par l'intermédiaire de la variable unique $t - my$; et le système d'ondes planes excité dans la région des x négatifs aura donné naissance, dans celle des x positifs, à des déplacements ξ, η, ζ dépendant uniquement des deux variables x, $t - my$.

Appelons l, sur chaque couche $x = \text{const.}$, la fonction de x bien continue

(248) $$l = \sqrt{\frac{1}{\omega^2} - m^2}, \qquad \text{donnant} \qquad l^2 + m^2 = \frac{1}{\omega^2},$$

fonction parfaitement définie, même quant à son signe, si on l'astreint à devenir l_0 pour $x = 0$, c'est-à-dire à y être positive; et observons que l'intégrale $\int l\,dx$, entendue dans le sens de $\int_0^x l\,dx$, sera sensiblement, à cause de la lenteur de variation de l, de la forme

$$lx + \text{const.},$$

entre deux valeurs de x *assez peu distantes,* ou qu'elle y aura lx pour partie variable, comme si l ne changeait pas. Alors, $\int l\,dx$ étant une fonction de x connue, les deux variables $t - my$ et x, dont ξ, η, ζ dépendent, pourront être évidemment remplacées par $t - my - \int l\,dx$ et x. Or, vu l'extrême petitesse des changements de ω, dans les étendues de dimensions comparables à une longueur d'ondulation, et vu aussi l'absence de la variable z dans ξ, η, ζ, il est présumable que les ondes, cylindriques à génératrices dirigées suivant les z, auront de très grands rayons de courbure, ou que, entre deux couches assez peu distantes, elles ne différeront guère d'ondes planes à vibrations transversales et à normale située dans le plan des xy, où elle fera un certain angle i avec l'axe des x. Cela exige que ξ, η, ζ dépendent surtout de la variable *principale*

$$t - my - \int l\,dx,$$

revenant à $t - my - lx + \text{const.}$ dans des espaces restreints, ou qu'ils varient très lentement avec l'autre variable x. Car, s'ils changeaient aussi vite avec celle-ci qu'avec la première, ils ne se trouveraient pas approximativement compris dans le type d'expressions propre aux systèmes d'ondes planes parallèles aux z et à vibrations transversales, type qui n'admet comme variable de ξ, η, ζ qu'une expression linéaire de la forme $t - my - lx + \text{const.}$, avec un coef-

ficient l relié à m par la relation (248), comme l'est justement l dans notre variable principale considérée entre des valeurs modérément distantes de x.

Ainsi, ξ, η, ζ seront des fonctions de t, x et y dépendant surtout de l'expression $t - my - \int l dx$, par rapport à laquelle nous appellerons $\xi', \xi'', \ldots, \eta', \eta'', \ldots, \zeta', \zeta'', \ldots$ leurs dérivées successives, mais dépendant aussi quelque peu de x seul, relativement auquel leurs petites dérivées seront désignées au moyen des différentielles correspondantes, écrites par des ∂ de ronde. La lenteur des variations de ξ, η, ζ avec x, quand $t - my - \int l dx$ sera invariable ou qu'on suivra (au besoin) une même onde, permettra d'ailleurs d'y négliger les dérivées secondes $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ à côté des dérivées premières (car celles-ci ne varieront de fractions notables de leurs *très petites* valeurs que dans de *grands espaces*); et cette lenteur permettra même de négliger les dérivées premières, quand ce seront celles non pas de ξ, η, ζ tout entiers, mais de *petites* parties (de ξ, η, ζ) dont les dérivées par rapport à $t - my - \int l dx$ seraient seulement de l'ordre des petites dérivées $\frac{\partial}{\partial x}$ de ξ, η, ζ tout entiers. Cependant, la petite dérivée en x de l pourra, sans ambiguïté, s'écrire l', aussi bien que $\frac{\partial l}{\partial x}$, l ne dépendant que de x.

Grâce à l'absence de la variable z dans ξ, η, ζ et, par suite, dans θ, les équations (246) se simplifieront. Vu aussi la seconde formule (248), elles pourront s'écrire :

$$(249) \quad \left\{ \begin{aligned} &(l^2 + m^2)\frac{d^2(\xi, \eta)}{dt^2} = \Delta_2(\xi, \eta) - \frac{d\theta}{d(x, y)}, \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{d\xi}{dx} - \frac{d\eta}{dy}; \\ &(l^2 + m^2)\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \Delta_2\zeta. \end{aligned} \right.$$

Les fonctions ξ, η d'une part, ζ d'autre part, y sont séparées, la troisième, ζ, ne figurant que dans la dernière équation, et y figurant seule. C'est dire que la composante ζ des déplacements normale au plan d'incidence se déterminera indépendamment de leur composante parallèle à ce plan, et qui résulte de ξ, η combinés, celle-ci (ξ, η) se déterminant elle aussi, de son côté, à part de ζ. En d'autres termes, il y a lieu de décomposer les ondes planes données, ou les ébranlements qu'elles apportent sur la dernière couche homogène $x = 0$, en

deux systèmes distincts dont le premier comprend uniquement des vibrations orientées perpendiculairement au plan d'incidence, et dont le second est constitué par des vibrations comprises dans le plan d'incidence. Ce sont ainsi les équations du mouvement elles-mêmes qui indiquent ce mode de décomposition, dont nous avons fait usage dans le problème de la réflexion et de la réfraction.

80. Et, d'abord, ondes à vibrations normales au plan d'incidence. — Commençons donc par former des intégrales du système (249) qui, pour $x=0$, se réduisent à $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=$ une fonction donnée de $t-my$. Les deux composantes ξ, η y seront nulles partout; et la composante ζ y sera, comme on a dit, une fonction, rapidement variable, de $t-my-\int l\,dx$, mais lentement variable de x seul, astreinte à vérifier la troisième équation (249).

En différentiant ζ complètement par rapport à x, il viendra d'abord, vu la valeur, $-l$, de la dérivée de $t-my-\int l\,dx$ en x,

$$\frac{d\zeta}{dx}=-l\zeta'+\frac{\partial\zeta}{\partial x},$$

puis, par une seconde différentiation où la dérivée principale $\frac{\partial\zeta'}{\partial x}$ de $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ sera seule sensible,

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2}=l^2\zeta''-l\frac{\partial\zeta'}{\partial x}-l'\zeta'-l\frac{\partial\zeta'}{\partial x}=l^2\zeta''-2l\frac{\partial\zeta'}{\partial x}-l'\zeta'.$$

Les dérivations en y, où m sera constant, donneront plus simplement

$$\frac{d\zeta}{dy}=-m\zeta',\qquad \frac{d^2\zeta}{dy^2}=m^2\zeta''.$$

On aura donc

$$\Delta_2\zeta=(l^2+m^2)\zeta''-\left(2l\frac{\partial\zeta'}{\partial x}+l'\zeta'\right);$$

et la troisième équation (249), dont le premier membre sera évidemment $(l^2+m^2)\zeta''$, se trouvera réduite à

$$2l\frac{\partial\zeta'}{\partial x}+\zeta'\frac{\partial l}{\partial x}=0.$$

Or celle-ci, multipliée par ζ', peut s'écrire

$$(250)\qquad \partial(l\zeta'^2)=0;$$

et elle signifie que le produit $l\zeta'^2$, essentiellement positif (tant que l garde le signe de l_0), ne dépend que de la variable principale

$$t - my - \int l\,dx.$$

Si donc on appelle $(\varphi'')^2$ une fonction positive, mais d'ailleurs arbitraire, de cette variable principale seule, l'équation (250) reviendra à poser $l\zeta'^2 = (\varphi'')^2$ ou

$$(251) \qquad \zeta' = \frac{\varphi''\left(t - my - \int l\,dx\right)}{\sqrt{l}}.$$

S'il s'agit de mouvements non périodiques survenus en (x, y, z) après un état primitif de repos, et que, par conséquent, φ'' s'annule pour les valeurs négatives très fortes de sa variable, nous supposerons qu'on ait appelé φ' la fonction primitive de φ'', déterminée de manière à s'annuler aussi initialement; et une intégration par rapport à t, effectuée sur place, de l'équation (251) multipliée par dt donnera alors, en partant d'une époque où le repos primitif régnait encore au point (x, y, z),

$$(252) \qquad \zeta = \frac{\varphi'\left(t - my - \int l\,dx\right)}{\sqrt{l}}.$$

S'il s'agit, au contraire, de petits mouvements périodiques de l'éther, nous savons que ξ, η, ζ désigneront, dans les équations (249), des élongations comptées à partir de situations (x, y, z) *moyennes;* en sorte que ζ aura la moyenne de ses valeurs successives nulle. Alors nous appellerons φ' l'intégrale $\int \varphi'' dt$ déterminée de manière à avoir, elle aussi, sa valeur moyenne en (x, y, z) égale à zéro; et une intégration sur place de l'équation (251) multipliée par dt nous donnera encore pour ζ l'expression (252).

On verra bientôt, quand il sera question de ξ et η, pourquoi j'ai jugé devoir choisir comme fonction fondamentale φ propre à donner la solution, non pas le produit $\zeta\sqrt{l}$, mais plutôt sa fonction primitive par rapport à la variable principale, fonction que nous supposerons d'ailleurs choisie de manière à avoir, comme ζ, zéro pour valeur ou initiale ou moyenne.

L'intégrale approchée (252) de la troisième équation (249) montre que *les ondes planes se propageront à travers toutes les couches en conservant leurs caractères, qu'exprime la fonction* φ',

mais en prenant des amplitudes sensiblement inverses partout de $\sqrt{l}$. L'interprétation physique de cette loi apparaîtra un peu plus loin.

81. Ondes à vibrations parallèles au plan d'incidence. — Passons maintenant au cas, plus complexe, de mouvements ayant les composantes ξ, η. On pourra donc y supposer $\zeta = 0$ partout, ou laisser de côté la dernière équation (249), pour s'occuper uniquement des deux premières.

Les déplacements effectifs, parallèles au plan des xy, y résulteront toujours de deux composantes, l'une transversale, seule sensible, que nous appellerons δ et compterons positivement quand elle fera un angle aigu avec les y positifs; l'autre, très petite, longitudinale, que nous appellerons ε. Celle-ci, dirigée suivant la normale aux ondes, aura ses cosinus directeurs, en chaque point (x, y, z), dans les mêmes rapports et de mêmes signes que l, m, zéro, dérivées en x, y, z du premier membre de l'équation des surfaces d'onde $my + \int l\,dx =$ const. Ces cosinus directeurs sont donc $\frac{(l, m, 0)}{\sqrt{l^2 + m^2}}$. Par suite, ceux du déplacement principal, perpendiculaire, δ, sont $\frac{(-m, l, 0)}{\sqrt{l^2 + m^2}}$. Dès lors, les composantes de δ suivant les axes seront $\frac{(-m\delta, l\delta, 0)}{\sqrt{l^2 + m^2}}$, et, celles de ε, $\frac{(l\varepsilon, m\varepsilon, 0)}{\sqrt{l^2 + m^2}}$. Ainsi l'on aura

$$(253) \qquad \xi = \frac{-m\delta + l\varepsilon}{\sqrt{l^2 + m^2}}, \qquad \eta = \frac{l\delta + m\varepsilon}{\sqrt{l^2 + m^2}}.$$

Après l'étude précédente de ζ, qui nous a donné ζ inverse de $\sqrt{l}$, il n'est pas improbable qu'il en soit de même de δ. Nous aurons donc avantage à poser, par analogie,

$$(254) \qquad \delta = \frac{\varphi'}{\sqrt{l}},$$

où φ' sera une fonction différente de celle que contient la formule (252) et pouvant même, jusqu'à preuve du contraire, dépendre des deux variables $t - my - \int l\,dx$ et x, mais, en tous cas, ne variant que très lentement avec x seul, comme δ et $\sqrt{l}$ dont elle exprime le produit.

Alors, si nous substituons à δ, dans (253), cette expression (254), et si nous désignons par R la racine carrée (positive) de l'expression

$$(255) \qquad R^2 = l(l^2 + m^2) = l^3 + m^2 l,$$

il viendra

$$(256) \qquad \xi = -\frac{m}{R}\varphi' + \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon, \qquad \eta = \frac{l}{R}\varphi' + \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon.$$

Telles sont les expressions de ξ et de η qu'il faudra différentier une ou deux fois en x et y, pour en déduire θ, et aussi $\Delta_2\xi$, $\Delta_2\eta$, et $\frac{d\theta}{d(x,y)}$, qui entrent dans les deux premières équations (249). Les petits termes en ε n'auront de sensibles que leurs dérivées par rapport à la variable principale. Mais, dans les termes en φ', il faudra, de plus, mettre en ligne de compte les petites dérivées premières de φ' ou de φ'' en x seul et celles, du même ordre, de l et R en x, que nous appellerons l' et R'. Cette dernière, donnée par la différentiation de (255), sera évidemment

$$(257) \qquad R' = \frac{3l^2+m^2}{2R}l' = \frac{3l^2+m^2}{2R}\frac{\partial l}{\partial x}.$$

Il viendra d'abord

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{ml}{R}\varphi'' - \frac{m}{R}\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{mR'}{R^2}\varphi' - \frac{l^2}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon',$$
$$\frac{d\xi}{dy} = \frac{m^2}{R}\varphi'' - \frac{lm}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon',$$

puis, par de nouvelles différentiations, où l'on observera que les termes très petits $\left(\text{en } \frac{\partial\varphi'}{\partial x}, R', \varepsilon'\right)$ n'ont que leur dérivée principale qui soit sensible,

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = -\frac{ml^2}{R}\varphi''' + \frac{ml}{R}\frac{\partial\varphi''}{\partial x} + m\left(\frac{l'}{R} - \frac{lR'}{R^2}\right)\varphi''$$
$$+\frac{ml}{R}\frac{\partial\varphi''}{\partial x} - \frac{mlR'}{R^2}\varphi'' + \frac{l^3}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon'',$$
$$\frac{d^2\xi}{dy^2} = -\frac{m^3}{R}\varphi''' + \frac{lm^2}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon'';$$

d'où l'on déduit, en réduisant et après substitution à R' de sa valeur (257),

$$(258) \quad \Delta_2\xi = -\frac{m}{R}(l^2+m^2)\varphi''' + l\sqrt{l^2+m^2}\,\varepsilon'' + 2\frac{ml}{R}\frac{\partial\varphi''}{\partial x} - 2\frac{ml^3 l'}{R^3}\varphi''.$$

On trouve de même

$$\frac{d\eta}{dx} = -\frac{l^2}{R}\varphi'' + \frac{l}{R}\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \left(\frac{l'}{R} - \frac{lR'}{R^2}\right)\varphi' - \frac{ml}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon',$$

$$\frac{d\eta}{dy} = -\frac{lm}{R}\varphi'' - \frac{m^2}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon',$$

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \frac{l^3}{R}\varphi''' - \frac{l^2}{R}\frac{\partial\varphi''}{\partial x} - \left(\frac{2ll'}{R} - \frac{l^2R'}{R^2}\right)\varphi'' - \frac{l^2}{R}\frac{\partial\varphi''}{\partial x}$$
$$- \left(\frac{ll'}{R} - \frac{l^2R'}{R^2}\right)\varphi'' + \frac{ml^2}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon'',$$

$$\frac{d^2\eta}{dy^2} = \frac{lm^2}{R}\varphi''' + \frac{m^3}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon'';$$

et, par suite,

$$(259)\qquad \Delta_2\eta = \frac{l}{R}(l^2+m^2)\varphi''' + m\sqrt{l^2+m^2}\,\varepsilon'' - 2\frac{l^2}{R}\frac{\partial\varphi''}{\partial x} - \frac{2m^2l^2l'}{R^3}\varphi''.$$

D'ailleurs, en ajoutant $\frac{d\xi}{dx}$ et $\frac{d\eta}{dy}$, il vient

$$(260)\qquad \begin{cases} 0 = -\frac{m}{R}\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{mR'}{R^2}\varphi' - \sqrt{l^2+m^2}\,\varepsilon' \\ \quad = -\frac{m}{R}\frac{\partial\varphi'}{\partial x} + \frac{m(3l^2+m^2)l'}{2R^3}\varphi' - \sqrt{l^2+m^2}\,\varepsilon', \end{cases}$$

expression où les termes, très petits, n'ont que leur dérivée principale qui ne soit pas négligeable; et il en résulte

$$(261)\qquad \frac{d\theta}{d(x,y)} = (l,m)\left[\frac{m}{R}\frac{\partial\varphi''}{\partial x} - \frac{m(3l^2+m^2)l'}{2R^3}\varphi'' + \sqrt{l^2+m^2}\,\varepsilon''\right].$$

Si l'on observe en outre que les premiers membres des deux premières équations (249) seront évidemment les produits de l^2+m^2 par

$$(262)\qquad \xi'' = -\frac{m}{R}\varphi''' + \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon'', \qquad \eta'' = \frac{l}{R}\varphi''' + \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon'',$$

on aura tous les éléments nécessaires pour développer ces équations. Et elles deviendront immédiatement

$$(263)\qquad \begin{cases} \frac{ml}{R}\frac{\partial\varphi''}{\partial x} - l\left(ml'\frac{l^2-m^2}{2R^3}\varphi'' + \sqrt{l^2+m^2}\,\varepsilon''\right) = 0, \\ -\frac{2l^2+m^2}{R}\frac{\partial\varphi''}{\partial x} - m\left(ml'\frac{l^2-m^2}{2R^3}\varphi'' + \sqrt{l^2+m^2}\,\varepsilon''\right) = 0. \end{cases}$$

En les ajoutant, après les avoir multipliées respectivement par m,

$-l$, elles donnent

$$(264)\qquad \frac{2l(l^2+m^2)}{R}\frac{\partial\varphi''}{\partial x}=0,\qquad \text{ou}\qquad \partial\varphi''=0;$$

ce qui signifie, conformément à nos prévisions, que φ'' ne dépend pas de x seul, mais uniquement de la variable principale $t-my-\int l dx$. Alors, les équations (256) montrant que φ' et ε ont leurs valeurs ou primitives, ou moyennes (prises sur place), nulles en même temps que celles de ξ, η, la fonction φ', intégrale de $\varphi'' dt$, prise sur place soit à partir d'un instant où φ' s'annulait en (x, y, z), soit de manière que sa valeur moyenne durant une période s'annule, ne pourra pas davantage dépendre de x seul. Ainsi le déplacement transversal δ, seul sensible, aura l'expression (254) avec φ' fonction uniquement de $t-my-\int l dx$, expression analogue à celle, (252), de ζ dans le cas simple précédent de déplacements normaux au plan d'incidence; et l'amplitude des vibrations y sera, à la traversée des diverses couches, encore inverse de $\sqrt{l}$.

Les équations (263), maintenant débarrassées de leur premier terme, se réduiront à

$$(265)\qquad \varepsilon''=-ml'\frac{l^2-m^2}{2R^3\sqrt{l^2+m^2}}\varphi''.$$

Or, celle-ci, multipliée deux fois successivement par dt et intégrée chaque fois, sur place, soit à partir d'une époque où le repos primitif existait encore en (x, y, z), soit de manière à annuler la valeur moyenne de l'intégrale $\varphi=\int\varphi' dt$ durant une période, comme s'annulent les valeurs moyennes analogues de ε', φ' et ε, donnera

$$(266)\qquad \varepsilon=-ml'\frac{l^2-m^2}{2R^3\sqrt{l^2+m^2}}\varphi.$$

Les ondes à vibrations parallèles au plan d'incidence seront, en résumé, constituées par des déplacements transversaux sensibles δ et par des déplacements longitudinaux insensibles ε, ayant, après substitution de $\sqrt{l(l^2+m^2)}$ à R, des expressions de la forme

$$(267)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta&=\frac{\varphi'\left(t-my-\int l\,dx\right)}{\sqrt{l}},\\ \varepsilon&=\frac{m(l^2-m^2)}{(l^2+m^2)^2}\frac{d\frac{1}{\sqrt{l}}}{dx}\varphi\left(t-my-\int l\,dx\right).\end{aligned}\right.$$

On remarquera que le déplacement longitudinal correctif ε, dont la présence rend généralement un peu courbes les petites trajectoires de l'éther, s'annule quand on a $l^2 = m^2$, c'est-à-dire $\cos^2 i = \sin^2 i$, ou quand les ondes sont inclinées à 45° sur le plan des couches équiréfringentes du corps.

82. Ondes à vibrations polarisées dans un azimut quelconque. — Supposons maintenant que, dans la première couche $x = 0$, les deux composantes sensibles des déplacements, savoir, ζ, normale, et δ, parallèle, au plan d'incidence, soient les deux projections du déplacement transversal $\frac{1}{\sqrt{l_0}}\psi'(t - my)$ imprimé à cette couche par un système donné d'ondes incidentes. Si V désigne l'angle de ce déplacement avec la normale au plan d'incidence ou des xy, la fonction $\varphi'(t - my)$ sera évidemment, dans ζ, le produit de $\psi'(t - my)$ par $\cos V$ et, dans δ, le produit de $\psi'(t - my)$ par $\sin V$. On voit que δ et ζ garderont dans toutes les couches le même rapport mutuel $\tang V$: les vibrations se feront suivant un azimut V constant. Autrement dit, *le plan de polarisation de la lumière sera, dans toutes les couches parallèles, incliné d'un même angle sur le plan d'incidence.*

83. Étude d'ondes planes limitées latéralement. — Maintenant que nous savons intégrer sensiblement les équations (249) dans l'hypothèse d'ondes planes, incidentes, latéralement indéfinies, ou produisant, près du plan yz, des vibrations de même amplitude en tous les points (y, z), il nous faut passer au cas d'un pinceau *limité* de lumière parallèle, où ξ, η, ζ varieront lentement avec x, y, z quand la variable principale $t - my - \int l\,dx$ ne changera pas, c'est-à-dire quand on restera sur une même onde, suivie au besoin dans sa propagation. On pourra, en effet, supposer ces variations, très lentes, ou analogues aux différentielles $\partial\xi$, $\partial\eta$, $\partial\zeta$ de ξ, η, ζ en x dans la précédente question, parce que la largeur du pinceau comprendra toujours un grand nombre de longueurs d'onde; ce n'est, du moins, qu'à cette condition que la transmission du pinceau de lumière ne se compliquera pas de phénomènes de diffraction. Négliger ceux-ci, comme nous le ferons, ce sera donc admettre une petitesse des dérivées $\frac{\partial}{\partial(x, y, z)}$ de ξ, η, ζ, par rapport aux variables x, y, z autres que la variable principale $t - my - \int l\,dx$, qui permette les simplifi-

cations pratiquées précédemment dans les dérivations relatives à x, c'est-à-dire la suppression des dérivées secondes à côté des dérivées premières, et même la suppression des dérivées premières quand ce sont celles de petits termes, solidaires des $\frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)}$.

Il est clair qu'alors, les coordonnées y et z entrant très peu dans ξ, η, ζ comme variables distinctes $\left(\text{ou autres que la variable principale } t - my - \int l\,dx\right)$, on pourra admettre, en tant qu'approchée, la formule (252) de ζ ou (267) de δ. Ces formules du déplacement sensible, soit perpendiculaire, soit parallèle au plan d'incidence, seront, même, évidemment exactes, si l'on y regarde φ' comme une inconnue à déterminer, fonction rapidement variable de

$$t - my - \int l\,dx$$

(par rapport à laquelle les dérivées s'indiqueront au moyen d'accents) et lentement variable de x, y, z.

Mais, en même temps, les résultats obtenus ci-dessus ne devenant alors qu'approximatifs, le déplacement ζ normal au plan d'incidence n'aura généralement plus lieu sans entraîner deux petites composantes inconnues, respectives, α, β, suivant les x et les y, c'est-à-dire parallèles à ce plan; et, de même, la composante transversale δ, située dans le plan d'incidence, entraînera généralement deux petites composantes inconnues : l'une, ε_1, suivant la normale aux ondes; l'autre, γ, suivant les z, en outre de la petite composante ε déjà connue et reliée à φ' ou à φ par deux des formules (265) et (267). Mais ces petites composantes ε_1, γ, fonctions, comme ζ, δ et ε, des quatre variables $t - my - \int l\,dx$ et x, y, z, n'auront de sensibles que leurs dérivées par rapport à la variable principale $t - my - \int l\,dx$, ou dérivées accentuées ε_1', ε_1'', etc.

Les équations (246) du mouvement ne se réduiront plus à (249); et elles s'écriront, en y séparant encore la troisième des deux premières :

$$(268)\qquad \begin{cases} (l^2 + m^2)\dfrac{d^2(\xi, \eta)}{dt^2} = \Delta_2(\xi, \eta) - \dfrac{d\theta}{d(x, y)}, \\ (l^2 + m^2)\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = \Delta_2\zeta - \dfrac{d\theta}{dz}. \end{cases}$$

84. Et, d'abord, ondes limitées, à vibrations normales au plan d'incidence. — Étant données les ondes incidentes, limitées comme on voudra, tout autour de l'origine, dans la première couche $x = 0$, et décomposées en deux systèmes d'ondes à mouvements perpendiculaires, pour l'un, et parallèles, pour l'autre, au plan d'incidence, considérons d'abord le plus simple de ces deux systèmes, celui où la composante principale est ζ, exprimée par la formule (252), mais avec φ' inconnu et fonction lentement variable de x, y, z, en même temps que fonction rapidement variable de $t - my - \int l\,dx$. A ce déplacement ζ pourront se superposer deux très petits déplacements suivant les x et les y, savoir $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$, n'ayant d'ailleurs de sensibles que leurs dérivées principales α', α'', ..., β', β''. ....

La dilatation cubique θ sera dès lors

$$(269)\qquad \theta = -(l\alpha' + m\beta') + \frac{1}{\sqrt{l}}\frac{\partial\varphi'}{\partial z},$$

expression à termes tous très petits, et qui aura pour dérivées approchées, en x et y,

$$(l, m)\left(l\alpha'' + m\beta'' - \frac{1}{\sqrt{l}}\frac{\partial\varphi''}{\partial z}\right).$$

Vu d'ailleurs que $\Delta_2(\alpha, \beta)$ se réduiront sensiblement à $(l^2 + m^2)(\alpha'', \beta'')$, les deux premières équations (268) deviendront

$$(270)\qquad l\alpha'' + m\beta'' = \frac{1}{\sqrt{l}}\frac{\partial\varphi''}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{l}}\frac{d\varphi''}{dz},$$

car les dérivées complètes en z et les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial z}$ prises sans faire varier $t - my - \int l\,dx$ se confondent, z n'entrant pas dans cette variable principale.

Multiplions cette équation, (270), deux fois successivement par dt, et intégrons chaque fois sur place, soit à partir d'un instant où le repos primitif existait encore en (x, y, z), soit de manière, si le mouvement est périodique, que les valeurs moyennes en (x, y, z) de φ', même de φ, et aussi, par suite, de $\frac{d\varphi'}{dz}$ et de $\frac{d\varphi}{dz}$, s'annulent comme celles de ζ, α, β. Il viendra

$$(271)\qquad l\alpha + m\beta = \frac{1}{\sqrt{l}}\frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{\sqrt{l}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Or, les cosinus directeurs de la normale aux ondes étant $\frac{(l, m, o)}{\sqrt{l^2+m^2}}$, l'expression $\frac{l\alpha + m\beta}{\sqrt{l^2+m^2}}$, ainsi égale à $\frac{1}{\sqrt{l(l^2+m^2)}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, représente le petit déplacement, que nous pouvons appeler ε_1, provoqué dans les ondes, suivant le sens qui leur est normal, par le déplacement principal ou sensible, supposé, ζ. Rappelons-nous que R désigne le radical $\sqrt{l(l^2+m^2)}$, et nous aurons, pour évaluer ce petit déplacement correctif ε_1, la formule simple

$$(272) \qquad \varepsilon_1 = \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{R}\frac{d\varphi}{dz}.$$

Passons maintenant à la troisième équation (268). Comme tous les termes de l'expression (269) de θ sont très petits et n'ont, par suite, d'appréciable que leur dérivée principale, leur dérivée en z sera censée nulle ou donnera $\frac{d\theta}{dz} = 0$. Reste à calculer $\Delta_2\zeta$. Le troisième terme $\frac{d^2\zeta}{dz^2}$ y sera négligeable, la petite dérivée $\frac{d\zeta}{dz}$ n'ayant de sensible que sa dérivée principale $\frac{\partial\zeta'}{\partial z}$ ou $\frac{1}{\sqrt{l}}\frac{\partial\varphi''}{\partial z}$. Quant aux deux premiers termes, l'expression $l^{-\frac{1}{2}}\varphi'$ de ζ donnera, d'abord,

$$\frac{d\zeta}{dx} = -l^{\frac{1}{2}}\varphi'' + l^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\varphi'}{\partial x} - \frac{1}{2}l^{-\frac{3}{2}}l'\varphi', \qquad \frac{d\zeta}{dy} = -ml^{-\frac{1}{2}}\varphi'' + l^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial\varphi'}{\partial y},$$

puis, par de nouvelles différentiations où tous les termes très petits n'auront de sensible que leur dérivée principale,

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = l^{\frac{3}{2}}\varphi''' - l^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\varphi''}{\partial x} - \frac{1}{2}l^{-\frac{1}{2}}l'\varphi'' - l^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\varphi''}{\partial x} + \frac{1}{2}l^{-\frac{1}{2}}l'\varphi'',$$

$$\frac{d^2\zeta}{dy^2} = l^{-\frac{1}{2}}m^2\varphi''' - l^{-\frac{1}{2}}m\frac{\partial\varphi''}{\partial y} - l^{-\frac{1}{2}}m\frac{\partial\varphi''}{\partial y};$$

et il en résulte

$$(273) \qquad \Delta_2\zeta = (l^2+m^2)l^{-\frac{1}{2}}\varphi''' - 2l^{-\frac{1}{2}}\left(l\frac{\partial\varphi''}{\partial x} + m\frac{\partial\varphi''}{\partial y}\right).$$

Le premier membre de la troisième équation (268) étant d'ailleurs $(l^2+m^2)l^{-\frac{1}{2}}\varphi'''$, cette équation devient

$$(274) \qquad \begin{cases} l\frac{\partial\varphi''}{\partial x} + m\frac{\partial\varphi''}{\partial y} = 0, \qquad \text{ou} \qquad \left(l\frac{\partial\varphi}{\partial x} + m\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)'' = 0, \\ \text{ou encore} \qquad \frac{d^2}{dt^2}\left(l\frac{\partial\varphi}{\partial x} + m\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0. \end{cases}$$

Multiplions celle-ci deux fois successivement par dt et intégrons, chaque fois, soit à partir d'un instant où le repos régnait encore autour de (x, y, z) et où, ζ, ε s'y annulant, φ', φ même, y étaient réduits à zéro, avec leurs dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial(x, y, z)}$, soit, dans le cas de mouvements périodiques, de manière que φ', φ aient, comme ζ et ε_1, leurs valeurs moyennes sur place nulles. Dans ce cas, si l'on pose

$$\tau = t - my - \int l\,dx, \tag{275}$$

on a deux équations comme $\int \varphi'\,d\tau = 0$, $\int \varphi\,d\tau = 0$, les intégrations s'étendant à toute une période; et ces équations sont vraies (sans faire varier les limites de τ), quels que soient x et y. On peut donc les différentier sous le signe $\int$ en x et y; ce qui donne $\int \frac{\partial \varphi'}{\partial(x, y)}\,d\tau = 0$, $\int \frac{\partial \varphi}{\partial(x, y)}\,d\tau = 0$; et les petites dérivées partielles de φ en x ou y (obtenues sans faire varier τ) ont aussi leurs valeurs moyennes nulles.

En résumé, l'équation (274) équivaut, dans la théorie des petites vibrations de l'éther, à

$$l\frac{\partial \varphi}{\partial x} + m\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{276}$$

Or, si nous appelons ∂n, à partir du point (x, y, z), un élément de chemin normal aux ondes et dirigé suivant le sens de leur progression, ses cosinus directeurs seront $\frac{(l, m, 0)}{\sqrt{l^2 + m^2}}$; et ses projections ∂x, ∂y, ∂z sur les axes auront les valeurs $\frac{(l\,\partial n, m\,\partial n, 0)}{\sqrt{l^2 + m^2}}$. La dérivée de φ le long de cet élément, prise en suivant une même onde ou sans faire varier τ, sera donc

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{l^2 + m^2}}\left(l\frac{\partial \varphi}{\partial x} + m\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right);$$

et l'équation (276) s'écrira simplement

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0. \tag{277}$$

Elle exprime que la fonction φ conserve (sensiblement) sur chaque onde les mêmes valeurs durant toute sa propagation, le long des tra-

jectoires perçant normalement l'onde dans toutes ses positions. Cette fonction φ peut donc recevoir, dans le voisinage de la première couche $x = 0$, telles valeurs qu'on voudra, fonctions données de z et d'une coordonnée courbe normale aux z ou mesurée le long de cette onde au départ, sur le plan xy d'incidence : elle peut, par exemple, être nulle, sauf dans une petite étendue autour de l'origine, cas où il est clair que les ondes restent sensiblement planes. Mais, dès lors, ses valeurs sur l'onde en question seront déterminées pour toute la suite des temps t, puisque chacune d'elles se conservera sur la trajectoire, normale aux ondes, émanant du point où elle existait au départ.

A raison de la formule $\frac{\varphi'}{\sqrt{l}}$ de ζ, c'est dire évidemment que *le faisceau proposé de lumière parallèle se transmet suivant le sens normal aux ondes* ([1]). Quant au mode de variation de ζ et de φ dans les sens tangents aux ondes, il règle seulement le déplacement longitudinal insensible ε_1, donné par la formule (272) et qui, même, ne dépend, comme on voit, dans une mesure appréciable, que de la variation de φ, ou, au fond, des déplacements ζ eux-mêmes, suivant le sens de ces déplacements, c'est-à-dire, ici, des z.

85. Ondes limitées, à vibrations parallèles au plan d'incidence. — Passons à l'étude d'ondes limitées, dans lesquelles il n'y ait de sensible que le déplacement transversal δ parallèle au plan d'incidence ou des xy, déplacement qu'on pourra toujours supposer exprimé par la première formule (267) (p. 506) où, seulement, la fonction φ', rapidement variable avec $t - my - \int l\,dx$, varierait, en outre, lentement avec x, y et z. A ce déplacement δ il s'adjoindra dès lors, non seulement le petit déplacement longitudinal ε, donné par la seconde formule (267) ou vérifiant les relations (265), (266), mais encore un surcroît, ε_1, de déplacement longitudinal et, peut-être même, un minime déplacement $\zeta = \gamma$ suivant le sens des z, dû au défaut de symétrie que cause la variation de δ avec z. Les expressions des dépla-

---

([1]) Huygens l'avait admirablement pressenti dans son ébauche de la théorie des réfractions atmosphériques. On le voit par sa figure des ondes émanées d'un foyer élevé dans l'air et qui, à raison de leur vitesse croissante aux hauteurs où l'air est plus rare, se déforment, en grandissant, de manière à rabattre vers le sol leurs trajectoires orthogonales, c'est-à-dire les rayons lumineux (*Traité de la lumière*, 1690, p. 44).

cements suivant les axes seront, dès lors, au lieu de (256) (p. 504) :

$$(278)\quad \begin{cases} \xi = -\frac{m}{R}\varphi' + \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}(\varepsilon+\varepsilon_1), \\ \eta = \frac{l}{R}\varphi' + \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}(\varepsilon+\varepsilon_1), \qquad \zeta = \gamma. \end{cases}$$

Les termes en ε, ε_1 et γ s'y trouveront assez petits pour n'avoir de sensibles que leurs dérivées par rapport à la variable principale $t - my - \int l\,dx$, dérivées s'écrivant par des accents. Quant à la fonction φ', elle aura, en outre, de petites dérivées premières non négligeables $\frac{\partial}{\partial(x, y, z)}$, obtenues sans faire changer la variable principale. Les expressions de $\Delta_2\xi$, $\Delta_2\eta$, θ, ... obtenues au n° 81 (p. 504 et 505) s'accroîtront donc de termes en $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, sans compter ceux que fourniront ε_1 et ζ. En se reportant aux formules qui suivent (257), (258), (259) et se souvenant, surtout lors des secondes différentiations, que leurs termes très petits n'ont de sensible que leur dérivée principale, on trouve les formules suivantes, où ne sont écrits explicitement que les termes nouveaux :

$$\frac{d\xi}{dx} = \ldots - \frac{l^2}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon'_1, \qquad \frac{d\xi}{dy} = \ldots - \frac{m}{R}\frac{\partial\varphi'}{\partial y} - \frac{lm}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon'_1, \qquad \frac{d\xi}{dz} = -\frac{m}{R}\frac{\partial\varphi'}{\partial z},$$

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = \ldots + \frac{l^3}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon''_1, \qquad \frac{d^2\xi}{dy^2} = \ldots + \frac{m^2}{R}\frac{\partial\varphi''}{\partial y} + \frac{m^2}{R}\frac{\partial\varphi''}{\partial y} + \frac{lm^2}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon''_1, \qquad \frac{d^2\xi}{dz^2} = 0,$$

$$\Delta_2\xi = \ldots + 2\frac{m^2}{R}\frac{\partial\varphi''}{\partial y} + l\sqrt{l^2+m^2}\,\varepsilon''_1;$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \ldots - \frac{ml}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon'_1, \qquad \frac{d\eta}{dy} = \ldots + \frac{l}{R}\frac{\partial\varphi'}{\partial y} - \frac{m^2}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon'_1, \qquad \frac{d\eta}{dz} = \frac{l}{R}\frac{\partial\varphi'}{\partial z},$$

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \ldots + \frac{ml^2}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon''_1, \qquad \frac{d^2\eta}{dy^2} = \ldots - \frac{2lm}{R}\frac{\partial\varphi''}{\partial y} + \frac{m^3}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon''_1, \qquad \frac{d^2\eta}{dz^2} = 0,$$

$$\Delta_2\eta = \ldots - 2\frac{lm}{R}\frac{\partial\varphi''}{\partial y} + m\sqrt{l^2+m^2}\,\varepsilon''_1;$$

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\partial\gamma}{\partial z} = 0 \qquad (\gamma \text{ n'ayant de sensible que sa dérivée principale } \gamma'),$$

$$\theta = \ldots + \frac{l}{R}\frac{\partial\varphi'}{\partial y} - \sqrt{l^2+m^2}\,\varepsilon'_1, \qquad \frac{d\theta}{d(x, y)} = \ldots + (l, m)\left(-\frac{l}{R}\frac{\partial\varphi''}{\partial y} + \sqrt{l^2+m^2}\,\varepsilon''_1\right).$$

Par suite, les premiers membres des deux premières équations (268) s'accroissant d'ailleurs de $(l, m)\sqrt{l^2+m^2}\,\varepsilon''_1$, ces équations devien-

dront, au lieu de (263) (p. 505) et en observant que l'expression (266) de ε fait évanouir la parenthèse de ces équations (263) :

$$(279)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{m}{R}\left(l\frac{\partial\varphi''}{\partial x}+m\frac{\partial\varphi''}{\partial y}\right)+\frac{l^2+m^2}{R}\frac{\partial\varphi''}{\partial y}-l\sqrt{l^2+m^2}\,\varepsilon''_1=0,\\ &-\frac{l}{R}\left(l\frac{\partial\varphi''}{\partial x}+m\frac{\partial\varphi''}{\partial y}\right)-\frac{l^2+m^2}{R}\frac{\partial\varphi''}{\partial x}-m\sqrt{l^2+m^2}\,\varepsilon''_1=0.\end{aligned}\right.$$

Ajoutées après multiplication par m et par $-l$ respectivement, elles donnent

$$(280)\qquad 2\frac{l^2+m^2}{R}\left(l\frac{\partial\varphi''}{\partial x}+m\frac{\partial\varphi''}{\partial y}\right)=0,$$

c'est-à-dire précisément la même équation, (274), que dans le cas de déplacements transversaux perpendiculaires au plan d'incidence. On en déduira de même (276), (277) et, par suite, la conservation des valeurs de la fonction φ suivant le sens normal aux ondes, ou la transmission, dans ce sens, du mouvement sensible, à l'exclusion des autres sens ou tangents, ou obliques, aux mêmes ondes.

Nous pouvons continuer à prendre pour ε l'expression (266) ou (267), avec φ fonction *arbitraire*, rapidement variable, de $t-my-\int l\,dx$, et lentement variable de z, ainsi que d'une coordonnée courbe comptée dans le plan des xy le long de la première surface d'onde, comme dans le cas de déplacements ζ normaux au plan d'incidence. Dès lors, la nouvelle correction ε_1 résultera des équations (279), devenues, à raison de (280),

$$\frac{R}{\sqrt{l^2+m^2}}\varepsilon''_1=\frac{\frac{\partial\varphi''}{\partial y}}{l}=\frac{-\frac{\partial\varphi''}{\partial x}}{m}=\frac{l\frac{\partial\varphi''}{\partial y}-m\frac{\partial\varphi''}{\partial x}}{l^2+m^2},$$

ou bien

$$(281)\qquad (R\varepsilon_1)''=\left(\frac{-m}{\sqrt{l^2+m^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)''.$$

Celle-ci, traitée comme l'a été (270) au numéro précédent (p. 509), donne de même, grâce à deux intégrations par rapport au temps (effectuées sur place) :

$$(282)\qquad R\varepsilon_1=\frac{-m}{\sqrt{l^2+m^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Considérons la surface d'onde, cylindrique, qui passe par le point (x, y, z), et rapportons-la, d'une part, à l'axe des z dirigé suivant ses génératrices, d'autre part, à une abscisse courbe s, comptée, dans

le plan d'incidence, à partir du point où la perce la trajectoire normale aux ondes émanée de l'origine. Enfin, appelons ∂s l'arc élémentaire tiré, à partir du point (x, y, z), suivant cette abscisse légèrement courbe, ou, par conséquent, dans le sens même du déplacement δ, dont les cosinus directeurs sont $\frac{(-m, l, 0)}{\sqrt{l^2+m^2}}$. Le second membre de (282) sera évidemment la dérivée de φ le long de cet arc ∂s; et l'on aura

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial s}, \tag{283}$$

formule toute pareille à l'expression (272) de ce petit déplacement longitudinal correctif dans le cas de mouvements perpendiculaires au plan d'incidence; car, ici, la coordonnée de même sens que le déplacement transversal est s et non plus z.

Il reste la troisième équation (268) (p. 508). Mais l'expression ci-dessus de θ, n'ayant de sensible que sa dérivée principale θ', donne $\frac{d\theta}{dz} = 0$; et, dès lors, ζ satisfait à cette équation (268) indépendamment de ξ et de η. Autrement dit, les déplacements transversaux δ parallèles au plan des xy *n'entraînent* aucun déplacement appréciable qui soit normal à ce plan.

En résumé, les lois obtenues au numéro précédent pour régir, dans un pinceau limité de lumière parallèle, les vibrations sensiblement normales au plan d'incidence, s'appliquent purement et simplement aux vibrations parallèles à ce plan; et les petits déplacements longitudinaux ε_1 qu'y nécessite, sur chaque surface d'onde, la variation d'un point à l'autre, suivant son propre sens, du déplacement transversal δ, sont régis aussi par la même loi.

86. Ondes limitées, à vibrations polarisées dans un azimut quelconque : conservation approchée de leur force vive, suivant le sens qui leur est normal. — Supposons maintenant que, dans le plan $x = 0$ de la première couche, le déplacement transversal effectif soit incliné, partout où il n'est pas nul, d'un angle constant V sur la normale au plan d'incidence, sa valeur y étant d'ailleurs de la forme $\frac{1}{\sqrt{l_0}}\psi'(t-my, y, z)$, avec ψ' ou, par suite, $\psi = \int \psi'\,dt$, fonction *arbitraire* donnée, rapidement variable, de $t - my$, et lentement variable, de y, z. L'on aura, pour la suite des valeurs positives de x, φ égal à $\psi\cos V$, dans l'expression $\frac{\varphi'}{\sqrt{l}}$ de ζ, mais égal à $\psi\sin V$, dans

l'expression analogue de δ, les valeurs de ψ et de ψ' étant, au point quelconque (x, y, z) et à l'époque t, celles qui existaient dans le plan même $x = 0$, au point d'où en émane la trajectoire normale aux ondes qui aboutit en (x, y, z), et à l'instant de départ de l'onde qui arrive actuellement en ce point (x, y, z).

Ainsi, les deux composantes notables ou sensibles ζ, δ des déplacements seront, en ne mettant en évidence ([1]) dans ψ que la variable principale $\tau = t - my - \int l\,dx$,

$$(284)\quad \zeta = \frac{\cos V}{\sqrt{l}}\psi'\left(t - my - \int l\,dx\right), \qquad \delta = \frac{\sin V}{\sqrt{l}}\psi'\left(t - my - \int l\,dx\right).$$

([1]) Si l'on voulait faire figurer explicitement, dans les fonctions ψ' et ψ, toutes les variables dont elles dépendent, on pourrait, par exemple, appeler y_0, z_0 les coordonnées y, z des divers points de la première couche hétérogène $x = 0$ et t_0 les instants du passage ou du départ des ondes en ces points. Alors les valeurs initiales de ψ' ou de ψ, c'est-à-dire leurs valeurs dans cette couche, arbitraires et données, soit pour ψ', soit pour ψ, s'écriraient

$$\psi'(t_0 - my_0, y_0, z_0), \quad \psi(t_0 - my_0, y_0, z_0).$$

Or, de chaque point (y_0, z_0) du plan $x = 0$ émane un *rayon*, ayant pour équations différentielles $dz = 0$, $dy - \frac{m}{l}dx = 0$, ou, par suite, pour équations intégrales,

$$z = z_0, \qquad y - m\int_0^x \frac{dx}{l} = y_0.$$

De plus, chaque élément, dn, de ce rayon, somme de ses projections dx et dy respectivement projetées elles-mêmes sur lui, ou égal à

$$\frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2}}dx + \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2}}dy,$$

exige, pour être parcouru par les ondes, le temps $\frac{dn}{\omega} = \sqrt{l^2 + m^2}\,dn$, c'est-à-dire simplement $l\,dx + m\,dy$; de sorte que la durée de parcours du rayon, jusqu'au point (x, y, z), est $m(y - y_0) + \int_0^x l\,dx$. Ainsi, d'après les lois concrètes établies ci-dessus, les valeurs de ψ' et de ψ, en (x, y, z) et à l'époque t, sont les valeurs connues qu'avaient prises ψ' et ψ au point du plan $x = 0$ ayant les coordonnées

$$y_0 = y - m\int_0^x \frac{dx}{l}, \qquad z_0 = z,$$

Quant à leur petite composante longitudinale, formée par la superposition de celle, (272), qui correspond aux mouvements effectués dans des plans normaux au plan d'incidence, et des deux, (267), (283), qui correspondent aux mouvements effectués parallèlement au plan d'incidence, elle se composera de deux parties distinctes, dues, l'une,

$$(285) \qquad \varepsilon = \frac{m(l^2 - m^2)}{(l^2 + m^2)^2} \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{l}}}{\partial x} \psi\left(t - my - \int l\,dx\right) \sin V,$$

à l'hétérogénéité du milieu, c'est-à-dire à la lente variation, avec x, du paramètre $l = \sqrt{\frac{1}{\omega^2} - m^2}$ ou de la vitesse ω de propagation; l'autre,

$$(286) \qquad \varepsilon_1 = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\cos V + \frac{\partial\psi}{\partial s}\sin V\right),$$

à la lente variation du déplacement transversal effectif $\sqrt{\zeta^2 + \delta^2}$ sur une même onde et à un même moment.

Dans l'expression (286) de celle-ci, la quantité entre parenthèses est la somme des petites dérivées partielles de la fonction ψ suivant les deux sens respectifs de ∂z et de ∂s, multipliées par les cosinus directeurs, $\cos V$, $\sin V$, relatifs à ces deux éléments rectilignes, d'un petit arc dS tiré, aussi dans la surface d'onde et à partir de (x, y, z), suivant la direction (positive) des déplacements sensibles totaux $\sqrt{\zeta^2 + \delta^2}$. La somme dont il s'agit représente par conséquent la dérivée

---

et à l'époque $t_0 = t - m(y - y_0) - \int_0^x l\,dx$: ce qui donne

$$t_0 - my_0 = t - my - \int_0^x l\,dx.$$

Les fonctions ψ' et ψ recevront donc les expressions, explicites en t, x, y et z

$$\psi'\left(t - my - \int_0^x l\,dx,\ y - m\int_0^x \frac{dx}{l},\ z\right)$$

et

$$\psi\left(t - my - \int_0^x l\,dx,\ y - m\int_0^x \frac{dx}{l},\ z\right),$$

la première étant la dérivée de la seconde par rapport à sa variable

$$t - my - \int_0^x l\,dx.$$

de la fonction ψ suivant la propre direction du mouvement transversal ; et l'on a

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R}\frac{\partial\psi}{\partial S}, \tag{286 bis}$$

formule comprenant comme cas particuliers les deux précédentes (272), (283). C'est donc une loi générale que le petit déplacement longitudinal ε_1 ne dépend, à très peu près, dans un milieu isotrope, que du mode de variation, suivant leur propre sens, des déplacements transversaux effectifs.

La seconde partie, (286) ou (286 *bis*), du petit déplacement longitudinal est évidemment celle que représentait, au numéro 21 (p. 309) la formule (67), et qui s'y démontrait le plus simplement possible par l'équation (20 *bis*) (p. 277) exprimant, dans un milieu homogène et isotrope, la conservation de la densité de l'éther. Et, en effet, par rapport à trois axes rectangulaires locaux dirigés respectivement, à partir de (x, y, z), suivant la normale dn aux surfaces d'onde (de courbure insensible) suivant leur tangente ∂s, parallèle aux xy, et suivant la tangente perpendiculaire ∂z, les composantes du déplacement seront ε_1, δ, ζ; et la condition ordinaire de conservation des volumes fluides s'écrira

$$\frac{d\varepsilon_1}{dn} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{\partial\delta}{\partial s} = 0. \tag{287}$$

Or, différentions (286) dans le sens dn normal à l'onde, en observant que les termes, tous très petits, de (286) n'ont que leur dérivée principale de sensible, et aussi que, le long de dn, dx et dy y étant $\frac{(l, m)\,dn}{\sqrt{l^2+m^2}}$, la variable principale a pour différentielle $-\frac{(l^2+m^2)\,dn}{\sqrt{l^2+m^2}}$, ou $-\sqrt{l^2+m^2}\,dn$, ou encore $-\frac{R}{\sqrt{l}}dn$. Il vient

$$\frac{d\varepsilon_1}{dn} = -\frac{1}{\sqrt{l}}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z}\cos V + \frac{\partial\psi'}{\partial s}\sin V\right),$$

c'est-à-dire, d'après (284),

$$\frac{d\varepsilon_1}{\partial n} = -\left(\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \frac{\partial\delta}{\partial s}\right),$$

relation revenant bien à (287).

L'autre partie, (285), du déplacement longitudinal se déduirait, de même, aisément, de la relation générale (8) (p. 272), qui remplace celle

de conservation des volumes éthérés quand il y a hétérogénéité du milieu et où, vu l'isotropie, il faudrait ici, d'une part, annuler D, D', E, E', F et F', d'autre part, remplacer (proportionnellement) $1 + A$, $1 + B$, $1 + C$ par $\frac{1}{\omega^2}$ ou par $l^2 + m^2$, avec l fonction lentement variable de x.

Mais laissons de côté le petit déplacement longitudinal, qui, étant du premier ordre de petitesse, comme $\frac{\partial(l, \psi)}{\partial(x, y, z)}$, ne donne lieu qu'à des vitesses vibratoires du même ordre et à des demi-forces vives d'ordre supérieur, c'est-à-dire négligeables dans notre théorie approchée. Ne nous occupons que du déplacement transversal, seul sensible, résultant des deux composantes ζ, δ, et qui, incliné partout, d'après (284), de l'angle V sur la normale au plan d'incidence, a pour valeur $\frac{\psi'}{\sqrt{l}}$. La vitesse vibratoire est évidemment sa dérivée par rapport au temps, ou $\frac{\psi''}{\sqrt{l}}$; et elle a pour carré $\frac{\psi''^2}{l}$.

Cela posé, considérant dans notre milieu transparent un rayon lumineux, limité par des trajectoires orthogonales à toutes les surfaces d'onde et d'une très petite section normale variable σ, évaluons la demi-force vive que charrie, le long de ce rayon, une onde quelconque, à laquelle nous attribuerons partout une épaisseur infiniment petite, $\omega\, d\tau$, telle, que cette onde emploie un petit temps constant donné, $d\tau$, à passer par un quelconque de ses points. L'onde en question se trouve, en effet, séparée de celles qui la précèdent et de celles qui la suivent par deux surfaces mobiles, dont la seconde, succédant à la première, dans toutes ses positions, un temps constant $d\tau$ après que celle-ci les a quittées, s'en tient bien aux distances variables dont la formule est sans cesse $\omega\, d\tau$.

Le rayon sera, par exemple, compris, d'une part, entre deux plans parallèles au plan d'incidence et distants de ∂z; d'autre part, entre deux petites surfaces cylindriques, de hauteur ∂z, normales au même plan et inclinées sur les xz de l'angle variable i d'incidence. Ces surfaces cylindriques coupant ainsi, toutes les deux sous le même angle complémentaire de i, chaque plan normal aux x, leur intervalle, ∂y, mesuré dans le sens parallèle aux y sera constant; et leur espacement perpendiculaire ∂s, largeur variable du rayon qu'elles interceptent, égalera par suite $\partial y \cos i$ ou $\frac{l\, \partial y}{\sqrt{l^2 + m^2}}$. La section σ, c'est-à-dire $\partial s\, \partial z$, du rayon vaudra donc $\frac{l\, \partial y\, \partial z}{\sqrt{l^2 + m^2}}$. Par suite, l'élément d'onde, d'épais-

seur $\omega\, d\tau$, à considérer dans ce rayon, aura le volume $\frac{l\omega\, \partial y\, dz\, d\tau}{\sqrt{l^2+m^2}}$ ou $\frac{l\, \partial y\, \partial z\, d\tau}{l^2+m^2}$.

Dans l'évaluation de sa masse, supposons, à la manière de Fresnel, l'éther du corps plus dense que l'éther libre, ou assimilons, comme au n° 10 (p. 284), à une surcharge inerte d'éther la matière pondérable en tant qu'elle participe (faiblement) au mouvement vibratoire. Autrement dit, prenons comme densité du milieu vibrant le quotient, $\frac{\mu}{\omega^2}$ ou $\mu(l^2+m^2)$, du coefficient d'élasticité μ de l'éther libre par le carré de la vitesse ω de propagation. La masse vibrante à considérer, produit de cette densité par le volume ci-dessus, sera donc simplement $l\mu\, \partial y\, \partial z\, d\tau$, ou proportionnelle à l; et, le carré de sa vitesse étant $\frac{\psi''^2}{l}$, elle aura pour demi-force vive le produit

$$\frac{1}{2}\mu\psi''^2\, \partial y\, \partial z\, d\tau. \tag{288}$$

Or celui-ci est, *le long du rayon quelconque suivi,* fonction uniquement de la variable principale $\tau = t - my - \int l\, dx$ et, par conséquent, constant durant toute la propagation de l'onde considérée.

Ainsi, la proportionnalité inverse, à $\sqrt{l}$, du déplacement vibratoire qu'apporte chaque onde aux divers points d'un même rayon quelconque, signifie simplement que *la demi-force vive possédée par tout élément d'une onde, au départ de celle-ci dans le milieu, se transmet intégralement, avec l'onde même, le long du rayon mené à partir de cet élément et normal aux positions successives de l'onde.* Il s'agit d'ailleurs ici, comme on voit, de la demi-force vive *totale* ou *énergie actuelle totale* définie au n° 10 (p. 284).

Cette loi, établie pour le cas de vibrations sensiblement rectilignes polarisées, s'étend d'elle-même au pinceau résultant de la superposition de deux autres de même direction, polarisés respectivement dans deux azimuts rectangulaires, comme il arrive quand il est question de lumière naturelle. Et alors les deux pinceaux continuent à cheminer ensemble ou à n'en former qu'un, nos formules ne faisant nullement, dans un milieu isotrope, dépendre la direction des ondes de celle du mouvement vibratoire dans leur plan, ni, par suite, le sens des rayons, de leur mode de polarisation.

87. **Passage au cas où les surfaces équiréfringentes ne sont plus parallèles; le principe de Fermat s'y trouve justifié, du moins pour les milieux isotropes.** — Maintenant que nous savons comment progresse, dans un milieu transparent à couches isotropes planes et parallèles, le mouvement excité par un pinceau de lumière parallèle qui y pénètre, il nous est facile d'obtenir les lois élémentaires de la transmission d'un pareil pinceau dans un milieu à couches courbes et non parallèles. Jusqu'à des distances de quelques longueurs d'onde tout autour d'un point assigné quelconque (x, y, z), la vitesse de propagation ω y sera, très sensiblement, la même que si les surfaces $\omega =$ const. s'y trouvaient être des plans parallèles au plan tangent, en (x, y, z), de la véritable surface équiréfringente qui y passe, et si l'on avait, en (x, y, z), les valeurs tant de ω que des dérivées partielles premières $\frac{\partial\omega}{\partial(x, y, z)}$, données pour ce point. Donc la propagation du mouvement vibratoire s'y fera aussi de même, à très peu près, y compris notamment les changements de direction du pinceau lumineux dus à l'existence de ces dérivées de ω.

Il est vrai que le pinceau, en arrivant sur la première des couches planes et parallèles ainsi considérées et substituées fictivement aux couches courbes $\omega =$ const., ne viendra pas d'une région homogène, comme nous l'avions admis, pour fixer les idées, dans notre analyse. Mais, cette analyse même montrant que le pinceau conserve, après avoir traversé des couches hétérogènes, sa nature de pinceau parallèle, ou, en d'autres termes, que les ondes y prennent seulement des courbures insensibles et que le mouvement transversal, s'il était polarisé au départ, reste polarisé, les ébranlements se produiront très sensiblement, à l'entrée des couches planes et parallèles dont il s'agit, comme nous l'avons supposé dans nos calculs.

L'axe du pinceau, dévié dans le plan d'incidence quand les surfaces équiréfringentes sont planes et parallèles, le sera donc encore, presque entièrement, dans ce plan. Autrement dit, le plan osculateur du rayon lumineux coïncidera avec le plan d'incidence, ou plan que déterminent le rayon, à son arrivée sur une surface équiréfringente $\omega =$ const., et la normale à cette surface. Ainsi, *le plan osculateur du rayon lumineux sera, partout, normal à la surface* $\omega =$ const. *traversée.*

De plus, le changement de direction du rayon sur un petit trajet dn étant, à très peu près, le même que dans le milieu à plans parallèles équiréfringents, l'angle de contingence correspondant du rayon, que j'appellerai Δ (en le comptant positivement quand le rayon s'écartera de la normale aux surfaces équiréfringentes traversées), pourra s'éva-

luer par la formule qui le donnerait dans l'hypothèse de tels plans parallèles. Or cette formule est $m =$ const., ou $\frac{\sin i}{\omega} =$ const., i désignant les angles faits avec la normale, en (x, y, z), à la surface $\omega =$ const. qui y passe, par divers éléments successifs du rayon, et, ω, les vitesses respectives de propagation de la lumière sur ces éléments. Donnons-nous pour l'un d'eux celui qui perce, en (x, y, z), la surface proposée $\omega =$ const., et soit i l'angle correspondant d'incidence, ou angle de l'élément (prolongé) avec la normale à cette surface, sur laquelle ω désignera la vitesse de propagation. Un second élément sera pris à la distance dn plus loin, là où ω est devenu $\omega + d\omega$ et où, le rayon, ayant tourné de Δ, fait l'angle $i + \Delta$ avec la même normale. La relation $m =$ const. donnera ainsi, sauf erreurs négligeables de l'ordre de dn^2 ou de $d\omega^2$,

$$(289) \qquad \frac{\sin i}{\omega} = \frac{\sin(i + \Delta)}{\omega + d\omega} = \frac{\sin i + (\cos i)\Delta}{\omega + d\omega} = \frac{(\cos i)\Delta}{d\omega},$$

c'est-à-dire

$$(290) \qquad \Delta = \frac{d\omega}{\omega} \operatorname{tang} i,$$

formule différentielle fondamentale, bien connue, des réfractions atmosphériques.

Les déviations élémentaires des rayons lumineux se calculeront donc par la formule de Descartes ou des sinus, exactement comme si les surfaces équiréfringentes étaient des surfaces de séparation de couches homogènes, ou produisaient des réfractions proprement dites.

Ainsi, la belle loi de minimum ou d'épargne, révélée à Fermat par une inspiration de génie, se trouve vérifiée, tout au moins dans le cas d'isotropie, par le trajet des rayons lumineux à travers un milieu de réfringence graduellement variable. Tant dans ce phénomène que lorsqu'il y a rupture brusque des rayons à la surface séparative de deux milieux, la presque totalité du mouvement est bien propagée suivant les voies qui assurent au trajet la plus grande économie possible de temps.

Il doit y avoir une raison générale, sans doute à la fois métaphysique et mathématique (suivant le point de vue d'où on l'envisage), mais qui nous échappe encore, pour que les transmissions qui se font par ces voies soient les seules, ou soient seules efficaces. Serait-ce, en quelque manière, parce que, de tous les mouvements partis en même temps, ceux qui arrivent les premiers quelque part résulteraient d'im-

pulsions incomparablement plus nombreuses, et à résultante incomparablement plus intense, que ceux qui, isolés, arrivent ultérieurement, à raison de ce fait capital, signalé par Képler, que les fonctions pourvues d'un minimum ou d'un maximum restent bien plus longtemps dans son voisinage que dans celui de toute autre de leurs valeurs? Des considérations d'une telle nature expliqueraient-elles synthétiquement la transmission quasi intégrale, suivant la normale, de la force vive d'un élément d'onde, circonstance principale de la propagation dans les milieux isotropes? Il semble qu'un résultat aussi simple devrait pouvoir être rattaché presque intuitivement aux équations différentielles du mouvement vibratoire, ou être vu dans ces équations mêmes et d'un simple coup d'œil, au lieu de résulter d'intégrations et démonstrations complexes.

D'autre part, cependant, l'étendue de nos idées claires est si restreinte, que les principes sur lesquels elles reposent et les lueurs inspiratrices ou directrices de nos recherches ont presque inévitablement leur source, leur point de départ ou de jonction, jusqu'où il faudrait plonger nos regards pour en saisir l'unité, aux profondeurs inaccessibles à notre vision distincte.

88. Extension du principe de Fermat au mouvement relatif de la lumière, dans un corps animé d'une translation rapide [1]. — Les résultats du n° 51 (p. 406) permettent de prévoir que la même construction de rayons courbes, conforme aux lois usuelles de la réfraction, et, par suite, le principe de Fermat sur l'économie du temps, s'appliqueront aussi à la marche de la lumière dans un corps animé d'une vitesse rapide V de translation, à composantes V_x, V_y, V_z un peu comparables à la vitesse de propagation des ondes dans l'éther libre. Prenons celle-ci pour unité de longueur ; et soit N, fonction lentement variable de x, l'indice de réfraction du corps, supposé encore composé de couches parallèles au plan des yz. Les équations du mouvement s'écriront simplement (p. 402) :

$$(\alpha)\quad \left\{ \begin{aligned} & N^2(\xi'', \eta'', \zeta'') - 2\left(V_x \frac{d}{dx} + V_y \frac{d}{dy} + V_z \frac{d}{dz}\right)(\xi', \eta', \zeta') \\ & \quad = \Delta_2(\xi, \eta, \zeta) - \frac{d\theta}{d(x, y, z)}. \end{aligned} \right.$$

---

(1) Ce dernier numéro de la VIIIe Partie, qui contient sous une forme très condensée la substance des précédents 80 à 86, a paru presque intégralement dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (t. CXXXV, p. 465 ; 22 septembre 1902).

Nous y notons par des accents les dérivées relatives à la variable principale $t - \int l\,dx - my - nz$, où m, n seront comme précédemment, pour les mêmes raisons, des constantes connues : car on donnera l'expression $my + nz$ du temps employé par les ondes, sur la première couche hétérogène $x = 0$ du corps, à atteindre un point quelconque (y, z) après avoir touché l'origine des coordonnées ; et, par raison de parité (ou de très graduelle variation) des circonstances produites successivement sur toute l'étendue des couches $x =$ const., ce retard relatif se transmettra sans changement aux diverses profondeurs x sous la surface ([1]).

Quant à l, ce sera la fonction lentement variable de x définie par l'équation

$$(\alpha') \qquad l^2 + m^2 + n^2 - 2(V_x l + V_y m + V_z n) = N^2,$$

qui diffère très peu de (248) (p. 499), et s'y réduit quand on annule V_x, V_y, V_z, n. On peut, sauf erreur négligeable de l'ordre des carrés et produits de V_x, V_y, V_z, y remplacer, dans la parenthèse, l par sa valeur de première approximation $\sqrt{N^2 - m^2 - n^2}$, foncièrement identique à (248).

([1]) Sur toutes les régions de la couche $x = 0$, ou autour de son point quelconque (y, z), les mêmes séries, que nous supposerons d'abord *identiques partout*, de circonstances, productrices, presque à elles seules, du mouvement de l'éther voisin situé du côté des x positifs, ne peuvent qu'y amener, partout aussi, les mêmes suites de phénomènes, les mêmes séries de valeurs de ξ, η, ζ à chaque distance x, et pour les mêmes valeurs de $t - my - nz$, c'est-à-dire avec les retards mêmes, $my + nz$, éprouvés par ces circonstances dans la région (y, z) dont il s'agit, comparativement à celle qui entoure l'origine des coordonnées. Donc ξ, η, ζ ne dépendent alors que de $t - my - nz$ et de x, ou (l étant fonction de x) de $t - \int l\,dx - my - nz$ et de x.

D'ailleurs les réflexions de la page 499 tendent ensuite à faire voir que, si l'on détermine convenablement l, $t - \int l\,dx - my - nz$ est la seule *variable principale,* et que x, puis même y et z quand les circonstances ne sont plus tout à fait pareilles, aux divers points de la couche $x = 0$, ne s'introduisent, *en outre,* que comme variables *corrélatives à des variations lentes* de ξ, η, ζ.

Si ces considérations ne semblaient pas entièrement rigoureuses, que notamment l'emploi fait, à leur début, du *principe de parité* ou *de raison suffisante* parût un peu subtil, leur justification découlerait, *a posteriori,* de leurs résultats. Car elles conduisent à des intégrales approchées ξ, η, ζ vérifiant tout à la fois les équations indéfinies du problème et les conditions d'état initial. Or nous savons que l'ensemble de ces relations détermine complètement ξ, η, ζ, du moins (p. 349) quand il n'y a pas de mouvement translatoire du corps.

Les équations (α), différentiées en x, y, z et ajoutées, donnent, si N′ est la petite dérivée de N en x :

$$2NN'\xi'' + N^2\theta'' - 2\left(V_x\frac{d\theta'}{dx} + V_y\frac{d\theta'}{dy} + V_z\frac{d\theta'}{dz}\right) = 0.$$

Cette relation, multipliée par dt et intégrée *sur place*, à partir d'un instant où le mouvement vibratoire n'avait pas encore atteint la région (x, y, z) du corps, devient

$$2NN'\xi' + N^2\theta' - 2\left(V_x\frac{d\theta}{dx} + V_y\frac{d\theta}{dy} + V_z\frac{d\theta}{dz}\right) = 0.$$

Or celle-ci, à une première approximation où l'on annule V_x, V_y, V_z, peut être encore multipliée par dt, puis intégrée de même; et elle donne alors $\theta = -2\frac{N'}{N}\xi$, valeur qu'on peut, sauf erreur négligeable, substituer dans les petits termes affectés de V_x, V_y, V_z, en négligeant non seulement le carré N'^2, mais, même, la très petite dérivée N″. Et il vient ainsi, pour la dérivée principale θ' de la dilatation cubique θ, la valeur

$$\theta' = -2\frac{N'}{N}\xi' - \frac{4N'}{N^3}\left(V_x\frac{d\xi}{dx} + V_y\frac{d\xi}{dy} + V_z\frac{d\xi}{dz}\right).$$

Mais cette expression de θ' contient partout le petit facteur N′, qui permet de réduire les dérivées en x, y, z, le multipliant, à leur partie principale $-(l, m, n)\xi'$. Et alors une nouvelle multiplication par dt, suivie encore d'une intégration sur place, donne la formule, qui est ici l'analogue de (8) (p. 272) :

$$(\alpha'') \qquad \theta = -2\frac{N'}{N}\left(1 - 2\frac{lV_x + mV_y + nV_z}{N^2}\right)\xi.$$

Celle-ci montre, à raison du petit facteur N′, qu'on pourra, dans les seconds membres de (α), réduire les dérivées de θ en x, y, z à leurs parties principales $-(l, m, n)\theta'$. Comme on aura, d'ailleurs,

$$\frac{d\xi'}{dx} = -l\xi'' + \frac{\partial\xi'}{\partial x}, \qquad \frac{d\xi}{dx} = -l\xi' + \frac{\partial\xi}{\partial x},$$

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = l^2\xi'' - 2l\frac{\partial\xi'}{\partial x} - l'\xi', \qquad \ldots,$$

$$\Delta_2\xi = (l^2 + m^2 + n^2)\xi'' - 2\left(l\frac{\partial\xi'}{\partial x} + m\frac{\partial\xi'}{\partial y} + n\frac{\partial\xi'}{\partial z}\right) - l'\xi', \qquad \ldots,$$

les trois équations (α) deviendront, vu (α'),

$$2\left[(l-V_x)\frac{\partial}{\partial x}+(m-V_y)\frac{\partial}{\partial y}+(n-V_z)\frac{\partial}{\partial z}\right](\xi',\eta',\zeta') + l'(\xi',\eta',\zeta') = (l,m,n)\theta'.$$

Multipliées par dt, et intégrées sur place à partir de l'état de repos primitif en (x, y, z), elles donnent

$$(\beta)\quad \begin{cases} 2\left[(l-V_x)\frac{\partial}{\partial x}+(m-V_y)\frac{\partial}{\partial y}+(n-V_z)\frac{\partial}{\partial z}\right](\xi,\eta,\zeta) \\ \quad + l'(\xi,\eta,\zeta) = (l,m,n)\theta. \end{cases}$$

Telles seront les trois équations exprimant les lois du mouvement.

On peut, dans leurs premiers membres où figurent partout soit des dérivées en ∂, soit le petit facteur l', réduire ξ, η, ζ aux projections de l'élongation *transversale* que j'appellerai (tout entière) δ, c'est-à-dire négliger les projections de la *petite* composante *longitudinale* du déplacement, proportionnelle au trinome $l\xi+m\eta+n\zeta$.

Multiplions-les respectivement par les mêmes projections ξ, η, ζ de δ; et ajoutons, en observant, d'une part, que $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ sera le carré de δ, d'autre part, que le trinome multipliant alors θ au second membre, $l\xi+m\eta+n\zeta$, se trouvera identiquement nul. Il viendra la relation capitale :

$$(\beta')\quad (l-V_x)\frac{\partial.\delta^2}{\partial x}+(m-V_y)\frac{\partial.\delta^2}{\partial y}+(n-V_z)\frac{\partial.\delta^2}{\partial z}+l'\delta^2=0.$$

Par analogie avec les notations des numéros précédents, appelons φ'^2 le produit $(l-V_x)\delta^2$, ou posons

$$\delta^2=\frac{\varphi'^2}{l-V_x},\qquad \delta=\frac{\varphi'}{\sqrt{l-V_x}},$$

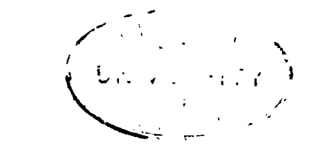
et, par suite,

$$\frac{\partial.\delta^2}{\partial x}=\frac{1}{l-V_x}\frac{\partial.\varphi'^2}{\partial x}-\frac{l'\varphi'^2}{(l-V_x)^2}.$$

Cette relation (β') deviendra

$$(\beta'')\quad (l-V_x)\frac{\partial.\varphi'^2}{\partial x}+(m-V_y)\frac{\partial.\varphi'^2}{\partial y}+(n-V_z)\frac{\partial.\varphi'^2}{\partial z}=0.$$

Sous cette forme, elle exprime que, *sur toute onde suivie dans son mouvement, la quantité φ'^2 conserve sa valeur, le long des chemins dont les cosinus directeurs ont entre eux mêmes rapports que* ($l-V_x$, $m-V_y$, $n-V_z$). Ces chemins sont donc les



rayons lumineux. Or chacun d'eux est contenu dans un plan normal aux couches du corps, savoir le plan perpendiculaire à la droite qui a ses cosinus directeurs proportionnels à $(0, V_z - n, m - V_y)$; car les produits respectifs de ceux-ci par $l - V_x$, $m - V_y$, $n - V_z$ donnent zéro pour somme. De plus, le carré du sinus de l'angle i de ces chemins avec l'axe des x a évidemment l'expression

$$\frac{(m-V_y)^2+(n-V_z)^2}{(l-V_x)^2+(m-V_y)^2+(n-V_z)^2}$$

ou, en négligeant au dénominateur les termes du second ordre V_x^2, V_y^2, V_z^2, comme nous faisons partout,

$$\frac{(m-V_y)^2+(n-V_z)^2}{l^2+m^2+n^2-2(lV_x+mV_y+nV_z)},$$

c'est-à-dire, d'après (α'),

$$(\gamma) \qquad \frac{(m-V_y)^2+(n-V_z)^2}{N^2},$$

et le produit $N^2 \sin^2 i$ prend la valeur constante $(m-V_y)^2+(n-V_z)^2$, en sorte que la loi de Descartes se trouve également vérifiée.

Le principe de Fermat s'applique donc bien, comme si le corps transparent était en repos.

On remarquera que le cosinus de l'angle i est le quotient de $l - V_x$ par N ou, par suite, le produit $(l - V_x)\omega$, si ω désigne la vitesse vraie de propagation de la lumière dans le corps *supposé fixe* (comparativement à la vitesse analogue dans l'éther libre, prise ici pour unité).

Cela posé, les rayons du pinceau lumineux, étant tous compris dans les plans normaux à la direction $(0, V_z - n, m - V_y)$, seront parallèles entre eux à la traversée de chaque couche $x = \text{const.}$; car ils y feront avec l'axe des x l'angle commun, i, qui a pour cosinus $(l - V_x)\omega$, fonction de x seul. Un faisceau élémentaire de rayons contigus découpera donc, dans deux couches consécutives et, de proche en proche, dans toutes les couches, des sections obliques $d\sigma$ égales, auxquelles correspondra une section normale variable, $d\sigma \cos i$ ou $(l - V_x)\omega\, d\sigma$, du faisceau. Multipliant cette section normale par l'épaisseur, $\omega\, d\tau$, de l'onde élémentaire dont le passage en chaque point dure $d\tau$, *dans l'hypothèse du corps en repos,* et, comme au n° 86 (p. 520), par la densité fictive analogue $\frac{\mu}{\omega^2}$ de l'éther, nous aurons la masse *fictive* $(l - V_x)\mu\, d\tau\, d\sigma$ vibrant dans l'onde le

long du rayon, masse dont le produit par le demi-carré $\frac{1}{2}\delta'^2$ de la vitesse sera l'*énergie actuelle totale,* $\frac{1}{2}(l - V_x)\delta'^2\mu\, d\tau\, d\sigma$, de l'onde sur le faisceau considéré. La constance du produit $\sqrt{l - V_x}\,\delta$ et, par suite, du produit $\sqrt{l - V_x}\,\delta'$ ou de son carré $(l - V_x)\delta'^2$, *sur une même onde, le long de chaque rayon,* signifie donc que *l'énergie actuelle totale de l'onde, évaluée comme si le corps était en repos mais que les rayons eussent leur direction relative* $(l - V_x, m - V_y, n - V_z)$, *s'y conserve,* ainsi qu'il arrive effectivement dans un corps immobile (p. 520).

Mais revenons aux équations (β) du mouvement.

La condition de compatibilité (β') ou (β'') ne laisse distinctes que deux de ces trois équations (β).

L'une d'elles peut d'ailleurs être remplacée, comme on sait, par (α''). Or, vu le petit facteur N', on pourra mettre pour ξ, dans le second membre de (α''), la composante de δ suivant l'axe des x; de plus, au premier membre, θ sera la somme du trinome $-(l\xi' + m\eta' + n\zeta')$ et de l'expression $\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}$, où ξ, η, ζ, étant différentiés par $\frac{\partial}{\partial(x, y, z)}$, seront aussi réductibles aux composantes de δ suivant les x, y, z. Donc cette équation (α'') fera connaître en fonction des valeurs de δ la petite vitesse longitudinale, proportionnelle à

$$l\xi' + m\eta' + n\zeta',$$

et, par une intégration sur place, la petite composante analogue des déplacements, proportionnelle à $l\xi + m\eta + n\zeta$.

On tirerait (α'') des équations (β) (où ξ, η, ζ ont été réduits aux projections de δ), en les multipliant respectivement par l, m, n et ajoutant. Il vient ainsi, identiquement, après division par 2,

$$\left[(l - V_x)\frac{\partial}{\partial x} + (m - V_y)\frac{\partial}{\partial y} + (n - V_z)\frac{\partial}{\partial z} + \frac{l'}{2}\right](l\xi + m\eta + n\zeta)$$
$$- (l - V_x)\xi l' = \frac{1}{2}(l^2 + m^2 + n^2)\theta.$$

Mais, ici, le trinome $l\xi + m\eta + n\zeta$ est partout nul. La relation obtenue se réduit donc à

$$-(l - V_x)l'\xi = \frac{1}{2}(l^2 + m^2 + n^2)\theta:$$

et celle-ci n'est autre que (α''), en vertu de l'équation (α') reliant l à N. Ainsi, l'équation (α'') constitue bien une seconde combinaison linéaire des équations (β).

Une troisième conséquence simple des formules (β) complétera l'interprétation géométrique de ces formules. Soient toujours λ, μ, ν les cosinus directeurs de la droite perpendiculaire au plan de la normale à l'onde et de la partie principale ou transversale δ de la vibration. De même que nous avons pris pour facteurs des équations (β) les cosinus directeurs soit de δ, soit de la normale à l'onde, ou les quantités proportionnelles (ξ, η, ζ) et (l, m, n), prenons maintenant ceux, (λ, μ, ν), de notre troisième droite, et ajoutons. Les deux termes en l' et θ seront identiquement nuls; et, en observant que les trois expressions

$$\left[(l-V_x)\frac{\partial}{\partial x}+(m-V_y)\frac{\partial}{\partial y}+(n-V_z)\frac{\partial}{\partial z}\right](\xi,\eta,\zeta)$$

sont proportionnelles aux trois accroissements élémentaires $\partial_r\xi$, $\partial_r\eta$, $\partial_r\zeta$ qu'éprouvent le long du rayon, sur une même onde suivie dans son mouvement, les projections ξ, η, ζ de δ, il viendra

$$(\gamma') \qquad \lambda\,\partial_r\xi+\mu\,\partial_r\eta+\nu\,\partial_r\zeta=0.$$

On a donc, tout à la fois,

$$\lambda\xi+\mu\eta+\nu\zeta=0 \qquad \text{et} \qquad \lambda(\xi+\partial_r\xi)+\mu(\eta+\partial_r\eta)+\nu(\zeta+\partial_r\zeta)=0.$$

En d'autres termes, *l'élongation transversale δ, sur une même onde suivie le long d'un même rayon, tourne sans cesse dans le plan qui contient la normale actuelle à l'onde.*

Ainsi, tandis que la formule (β') déterminait les changements successifs de grandeur du déplacement principal δ en chaque point d'une onde, la formule (γ') détermine ses changements d'orientation, desquels dépend le mode de polarisation du rayon lumineux aux divers points de son parcours.

La translation V y influe quelque peu et produit, comme l'avait pressenti Fizeau dans une question analogue (p. 409), une rotation du plan de polarisation; car l'*aberration,* qu'elle cause, *disjoint le rayon d'avec la normale à l'onde* et empêche par suite, généralement, l'élongation δ de se mouvoir dans le plan du rayon.

Lorsqu'il n'y a pas de translation V, l'onde, constamment normale au rayon, qui est compris dans le plan d'incidence, tourne, pour prendre sans cesse son orientation, autour de sa droite passant par le rayon normal au plan d'incidence; et l'*azimut* α de l'élongation δ est, sur l'onde même, l'angle de δ avec cette droite. Si alors on considère deux positions consécutives de α, la première, vu la rectangularité démontrée du mouvement élémentaire de δ par rapport au plan

de l'onde, est la projection de la deuxième, projection effectuée sous l'angle *infiniment petit* dont l'onde a tourné, et qui se fait *dès lors*, comme on sait, *en vraie grandeur*, ou plutôt n'altère l'angle projeté que dans un rapport négligeable du second ordre. Donc *l'azimut de polarisation se conserve*, conformément à ce qu'on a vu plus haut (p. 516 et 519), d'une tout autre manière.

On voit encore que les équations du mouvement laissent entièrement arbitraire, dans chaque onde, la variation qu'y éprouve d'un point à l'autre le déplacement transversal δ (seul sensible), pourvu que cette variation soit bien continue, comme le suppose notre analyse. L'on aurait, s'il n'en était pas ainsi, des phénomènes de *diffraction*, que notre but n'est pas de considérer.

NEUVIÈME PARTIE.

TRANSMISSION DES MOUVEMENTS NON PENDULAIRES, DANS LES CAS LES PLUS SIMPLES DE NON-HOMOGÉNÉITÉ DE LEURS ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

---

89. **Sur les petits mouvements non pendulaires de l'éther, dans les plus simples des cas où leurs équations ne sont pas homogènes.** — Dans l'exposition précédente, nous avons supposé arbitraire, autant que possible, la fonction du temps exprimant les déplacements successifs d'une même molécule d'éther, afin que les lois dégagées ne s'appliquassent pas moins à des ébranlements momentanés qu'à des vibrations pendulaires. Toutefois, quand les équations du mouvement n'étaient pas homogènes par rapport à l'ordre des dérivées y figurant, c'est-à-dire dans les théories de la réflexion métallique, de la dispersion, des doubles réfractions circulaire et elliptique, du polychroïsme, nous avons dû, pour ne pas compliquer outre mesure les intégrations, nous restreindre au cas de mouvements pendulaires; ce qui comprend, par superposition de solutions simples, tous ceux de petits déplacements périodiques sur la première des surfaces d'onde, déplacements décomposables, en effet, par la série trigonométrique de Fourier, en termes pendulaires ayant leurs périodes sous-multiples de la période donnée. Ne terminons donc pas cette étude, bien que déjà longue, sans revenir rapidement sur ceux des autres cas qui nous seront abordables, pour voir comment s'y comporteront les ébranlements isolés et, par conséquent, non périodiques.

Ce sont les cas de propagation du mouvement dans l'éther d'un corps, homogène et isotrope-symétrique, soit absorbant [formules (113), p. 371], soit dispersif des longues radiations (n° 61, p. 433), soit à la fois l'un et l'autre ou donnant comme équations (divisées par μ)

$$(291)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{a^2}\frac{d^2(\xi,\eta,\zeta)}{dt^2} + \frac{\mathrm{H}}{\mu}\frac{d(\xi,\eta,\zeta)}{dt} \\ &\quad = \Delta_2(\xi,\eta,\zeta) - \frac{d\theta}{d(x,y,z)} - \frac{\rho}{\mu}\mathrm{a}(\xi,\eta,\zeta). \end{aligned} \right.$$

Dans les autres cas de dispersion, et dans ceux de polarisation rota-

toire ou de double réfraction elliptique, les équations du mouvement contiendraient des dérivées d'ordre supérieur au second; et leur intégration générale deviendrait beaucoup plus difficile.

Bornons-nous donc à celles-là (291). Différentiées respectivement en x, y, z et ajoutées, elles donnent

$$\frac{1}{a^2}\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{H}{\mu}\frac{d\theta}{dt}=-\frac{\rho}{\mu}\mathrm{a}\,\theta. \tag{292}$$

Comme nous nous proposons d'étudier des mouvements transmis d'ailleurs en (x, y, z) et dans lesquels, par conséquent, la dilatation cubique θ a commencé par être nulle avec sa dérivée première en t, cette équation (292), simplement différentielle, revient à annuler θ à toute époque. Le système (291) se réduit donc à

$$\frac{1}{a^2}\frac{d^2(\xi,\eta,\zeta)}{dt^2}+\frac{H}{\mu}\frac{d(\xi,\eta,\zeta)}{dt}=\Delta_2(\xi,\eta,\zeta)-\frac{\rho}{\mu}\mathrm{a}(\xi,\eta,\zeta). \tag{293}$$

Les trois inconnues ξ, η, ζ y sont séparées; et si, par exemple, les mouvements ainsi régis par (293) se trouvent confinés, à une certaine époque (initiale) $t=0$, dans une région définie, d'où ils se propageront désormais tout autour sans qu'il se produise nulle part aucune rupture *nouvelle* de l'équilibre mettant en défaut les équations, on pourra étudier séparément les variations soit de ξ, soit de η, soit de ζ, à partir des valeurs initiales données tant du déplacement en question que de sa dérivée première, ou vitesse correspondante. C'est ce que nous ferons.

Changeons d'abord de fonction inconnue et posons, pour débarrasser l'équation de son second terme,

$$(\xi, \text{ ou } \eta, \text{ ou } \zeta)=e^{-\frac{a^2 H}{2\mu}t}\varphi. \tag{294}$$

Il vient l'équation en φ,

$$\frac{1}{a^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\Delta_2\varphi+\left(\frac{H^2a^2}{4\mu^2}-\frac{\rho}{\mu}\mathrm{a}\right)\varphi. \tag{295}$$

Nous simplifierons un peu les formules, d'une part, en faisant

$$\pm 4k^2=\frac{H^2a^2}{4\mu^2}-\frac{\rho\mathrm{a}}{\mu}, \tag{296}$$

ou appelant $2k$ la racine carrée du binome $\frac{H^2a^2}{4\mu^2}-\frac{\rho\mathrm{a}}{\mu}$ pris en valeur

absolue $\left(\text{binome positif pour } a < \frac{H^2 a^2}{4\mu\rho}\right)$, et, d'autre part, en adoptant comme unité de longueur la vitesse de propagation a qu'aurait la lumière dans le corps, s'il n'était ni dispersif, ni absorbant. Nous aurons donc à intégrer, pour tous les points (x, y, z) de l'espace, l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \Delta_2\varphi \pm 4k^2\varphi, \tag{297}$$

sous les conditions que φ et $\frac{d\varphi}{dt}$ soient, à l'époque $t=0$, deux fonctions arbitraires, mais finies, $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$, exprimant, d'après (294), la première, les valeurs initiales du déplacement considéré ξ, ou η, ou ζ, mais la seconde, dérivée, pour $t=0$, du produit $(\xi, \eta, \zeta)e^{\frac{a^2 H}{2\mu}t}$, la somme des valeurs initiales de $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ et de $\frac{a^2 H}{2\mu}(\xi, \eta, \zeta)$ (¹).

La manière la plus simple d'effectuer cette intégration de (297), et même la seule qui ait été tentée ou ait abouti en dehors du cas d'une coordonnée unique x (où il n'y a que deux variables indépendantes x et t), consiste à la ramener à l'intégrale classique, donnée par Poisson, de l'équation du son

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}. \tag{298}$$

C'est l'intégrale, bien connue,

$$\left\{\begin{aligned} \varphi = {} & \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_\sigma \psi(x + t\cos\alpha, y + t\cos\beta, z + t\cos\gamma)\frac{d\sigma}{t} \\ & + \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \Psi(x + t\cos\alpha, y + t\cos\beta, z + t\cos\gamma)\frac{d\sigma}{t}, \end{aligned}\right. \tag{299}$$

(¹) On réduirait de même à la forme (297) une équation dont le premier membre contiendrait, de plus que les premiers membres de (293), trois termes à coefficients constants et où figureraient linéairement les dérivées premières de ξ, η ou ζ en x, y, z. Il suffirait alors de prendre ξ, η ou ζ de la forme

$$\varphi e^{ht+lx+my+nz},$$

en déterminant les quatre constantes h, l, m, n de manière à annuler, dans l'équation transformée en φ, les quatre coefficients totaux de $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$:

où $\psi(x, y, z)$, $\Psi(x, y, z)$ désignent les valeurs initiales (relatives à $t=0$) tant de la fonction φ que de sa dérivée première en t, et où les intégrations $\int_\sigma$ s'étendent à toute l'aire $\sigma = 4\pi t^2$ d'une sphère décrite autour de (x, y, z), dont les divers points

$$(x + t\cos\alpha,\ y + t\cos\beta,\ z + t\cos\gamma)$$

sont les extrémités de rayons égaux t définis en direction par leurs angles α, β, γ avec les axes [1].

90. **Intégration de ces équations, dans le cas de deux coordonnées y, z, ou de trois variables y, z et t, par l'introduction d'une variable indépendante x supplémentaire.** — La réduction de l'équation (297) à celle du son (298) se fait par une méthode que m'a suggérée, dans le problème des *ondes liquides superficielles d'émersion* à deux coordonnées horizontales, la nécessité d'y diviser des difficultés d'intégration presque inextricables autrement [2]. Elle consiste à *introduire une variable indépendante de plus* que celles figurant dans la question, variable destinée à recevoir finalement la valeur zéro, mais dont la présence amène, chez la fonction, un nouveau mode de variation, disponible à volonté et que l'on choisit précisément en vue de *tourner* l'obstacle trop difficile à franchir.

Supposons d'abord que notre milieu ait seulement les deux dimensions correspondant aux coordonnées y, z, ou que l'équation proposée,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} \pm 4k^2\varphi, \tag{300}$$

soit à intégrer dans le plan des yz, où φ et sa dérivée en t devront se réduire initialement à deux fonctions données $f(y, z)$, $F(y, z)$. Rien n'empêchera de construire cette fonction φ pour tout l'espace et d'après la formule (299), c'est-à-dire en l'assujettissant à l'équa-

---

(1) On peut voir une démonstration très simple de cette formule capitale (299), par ce que j'ai appelé les *potentiels sphériques,* aux pages 320 à 323 du Volume intitulé *Application des potentiels à l'équilibre et au mouvement des solides élastiques, etc.* et dans le Tome, consacré au *Calcul intégral,* de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (*Compléments*, p. 195* à 198*).

(2) Même Tome de *Calcul intégral,* p. 506*. C'est, du reste, la méthode que j'ai employée plus haut (p. 96) dans une question de refroidissement où elle donne des résultats seulement approchés et non, comme ici, des résultats exacts.

tion (298), si l'on peut disposer de sa manière de varier avec x, *arbitraire jusqu'à présent,* de telle sorte qu'elle vérifie à la fois les deux équations (298) et (300), ou qu'elle donne, à toute époque,

$$(301) \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \pm 4k^2\varphi.$$

Par conséquent, la nouvelle équation (301) s'appliquera d'abord pour t infiniment voisin de zéro; c'est-à-dire qu'elle régira, en particulier, les valeurs initiales $\psi(x, y, z)$ et $\Psi(x, y, z)$. Donc, en représentant par les signes co, si, des cosinus et sinus soit hyperboliques, soit circulaires, suivant que le second membre de (301) aura le signe supérieur ou le signe inférieur, nous devrons prendre, vu la forme connue des deux parties tant *paire* qu'*impaire* de l'intégrale de (301),

$$(302) \qquad \begin{cases} \psi(x, y, z) = f(y, z)\,\mathrm{co}(2kx) + f_1(y, z)\,\mathrm{si}(2kx), \\ \Psi(x, y, z) = \mathrm{F}(y, z)\,\mathrm{co}(2kx) + \mathrm{F}_1(y, z)\,\mathrm{si}(2kx). \end{cases}$$

$f(y, z)$, $\mathrm{F}(y, z)$, $f_1(y, z)$, $\mathrm{F}_1(y, z)$ y désignent quatre fonctions arbitraires, dont les deux premières sont les valeurs *données* de ψ et Ψ sur le plan des yz.

D'ailleurs, avec ces expressions (302) de ψ et Ψ, la valeur (299) de φ pourra évidemment, quel que soit t, se différentier en x sous les signes $\int$; et, les dérivées secondes des fonctions ψ, Ψ par rapport à leur première variable, $x + t\cos\alpha$, y reproduisant identiquement, d'après la propriété qui nous a donné (302), ces fonctions mêmes multipliées par la constante $\pm 4k^2$, l'équation (301) se trouvera satisfaite à toute époque, non moins que (298). Il en résultera donc bien la vérification constante de l'équation (300) du problème.

Comme on n'a besoin des valeurs de φ que pour $x = 0$, c'est-à-dire sur le plan des yz, les parties impaires en x des expressions (302) de ψ et Ψ, celles où figurent des sinus, donneront sous les signes $\int_\sigma$ de (299), des éléments égaux et contraires pour deux éléments $d\sigma$ de sphère symétriques de part et d'autre du plan des yz, ou correspondant aux mêmes valeurs de $\cos\beta$, $\cos\gamma$, mais à des valeurs égales et contraires de $\cos\alpha$ et, par suite, de la première variable tout entière, qui sera $t\cos\alpha$. Donc ces parties impaires des expressions (302) disparaîtront des résultats; et il ne restera que les parties paires qui, elles, fourniront des éléments égaux de part et d'autre du plan des yz. On pourra ainsi n'étendre les intégrations indiquées dans la for-

mule (299) qu'aux demi-sphères, de rayon t et de centre (o, y, z), situées du côté des x positifs, en ayant soin de doubler les sommes obtenues; et il viendra, pour l'intégrale générale cherchée de (300):

$$(303) \quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\frac{1}{2}\sigma} \mathrm{co}(2kt\cos\alpha)\, f(y + t\cos\beta, z + t\cos\gamma)\,\dfrac{d\sigma}{t} \\ \quad + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\frac{1}{2}\sigma} \mathrm{co}(2kt\cos\alpha)\, F(y + t\cos\beta, z + t\cos\gamma)\,\dfrac{d\sigma}{t}. \end{cases}$$

91. Réduction que comporte l'intégrale, quand le mouvement ne dépend que d'une seule coordonnée. — Supposons qu'une seule coordonnée, z par exemple, figure dans l'équation (300), ou que les fonctions f, F, sous les signes $\int$ de (303), dépendent seulement de leur seconde variable, $z + t\cos\gamma$. Alors si, adoptant pour coordonnées polaires de la sphère σ, à partir du centre (o, y, z), un *azimut* θ, compté de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ dans un plan parallèle aux xy, du côté des x positifs, et une *hauteur angulaire* μ, variable de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, l'on pose

$$\cos\alpha = \cos\theta\cos\mu, \qquad \cos\gamma = \sin\mu, \qquad d\sigma = t^2\cos\mu\, d\theta\, d\mu,$$

l'une quelconque des deux intégrales définies qui figurent dans (303) aura la forme

$$(304) \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(z + t\sin\mu)\, t\cos\mu\, d\mu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{co}(2\sqrt{\zeta}\cos\theta)\, d\theta, \quad \text{où} \quad \zeta = k^2t^2\cos^2\mu.$$

Or on reconnaît ici, dans l'intégrale définie relative à θ, une fonction de Fourier ou de Bessel ([1]) dont nous appellerons, pour abréger, $U(\zeta)$ le quotient par π. Ce quotient sera défini par son développement en série, bien connu,

$$(305) \qquad U(\zeta) = 1 \pm \frac{\zeta}{1^2} + \frac{\zeta^2}{1^2.2^2} \pm \frac{\zeta^3}{1^2.2^2.3^2} + \ldots,$$

où les signes soit supérieurs, soit inférieurs, correspondent à ceux du

([1]) *Voir*, par exemple, le Volume précédemment cité de *Calcul intégral*, p. 313* et 314*, formules (92) et (94).

dernier terme de (300). Par suite, en posant

$$t \sin\mu = \tau \qquad (\text{d'où} \quad t \cos\mu\, d\mu = d\tau),$$

l'intégrale (304) se réduit à

$$(306) \qquad \pi \int_{-t}^{t} f(z+\tau)\,\mathrm{U}(k^2t^2 - k^2\tau^2)\,d\tau;$$

et l'on en déduit aisément ce que devient l'expression (303) de φ.

En vue de ce qui suit, convenons d'appeler r la coordonnée unique z figurant actuellement. Nous aurons donc, pour l'intégrale générale de l'équation

$$(307) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2} \pm 4k^2\varphi,$$

sous les conditions que les valeurs initiales de la fonction φ et de sa dérivée en t soient respectivement $f(r)$ et $\mathrm{F}(r)$:

$$(308) \quad \varphi = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-t}^{t} f(r+\tau)\,\mathrm{U}(k^2t^2 - k^2\tau^2)\,d\tau + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} \mathrm{F}(r+\tau)\,\mathrm{U}(k^2t^2 - k^2\tau^2)\,d\tau.$$

Cette formule a été, sauf la différence des notations, obtenue par M. Henri Poincaré, pour le cas d'un ébranlement initial produit dans une région limitée et discontinu aux limites de cette région; on la retrouve, du moins, en dégageant les formules de M. Poincaré des complications qu'y introduisent ces hypothèses restrictives [1].

---

[1] La Note de M. Poincaré a pour titre *Sur la propagation de l'électricité*: elle est aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (26 décembre 1893; t. CXVII, p. 1027). L'éminent analyste y intègre l'équation (307) par l'emploi de la formule de Fourier, suivi de l'indispensable effectuation d'une des deux intégrations définies auxquelles conduit cette formule (*voir*, par exemple, à ce sujet de l'emploi de la formule de Fourier, mon Volume cité ci-dessus de *Calcul intégral*, p. 525* à 535*). A la séance suivante de l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 2 janvier 1894, t. CXVIII, p. 16), M. Picard reprit plus simplement la même équation, par le procédé d'intégration de Riemann pour l'équation linéaire du second ordre à deux variables indépendantes. C'est dans les séances des 22 janvier et 29 janvier (même Tome des *Comptes rendus*, p. 162 et 223; *voir* aussi p. 271) que j'ai donné la méthode suivie ici, applicable avec la même facilité aux cas de deux et de trois coordonnées.

Dès l'avant-dernier siècle et vers le commencement du dernier, Laplace et Poisson avaient abordé la même équation aux dérivées partielles. Le premier l'avait prise sous la forme

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + 4k\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d^2\Phi}{dr^2},$$

Il est clair que les intégrations n'aboutiraient plus, par rapport à l'azimut θ, si celui-ci paraissait dans f, F, comme il arrive lorsque ces fonctions dépendent de leur première variable $y + t\cos\beta$, c'est-à-dire de $y + t\cos\mu\sin\theta$, et non plus seulement de leur seconde variable $z + t\cos\gamma$ ou $z + t\sin\mu$. Donc les intégrales définies que contient la solution, et qui deviennent *simples* dans le cas de propagation suivant un seul sens, restent bien essentiellement *doubles* dans le cas de propagation suivant deux sens, ou d'un milieu à deux coordonnées, du moins tant qu'on laisse *arbitraire* l'état initial, exprimé par les fonctions f, F.

92. Même procédé, mais appliqué d'une autre manière, qui réussit pour un nombre quelconque de dimensions ou de coordonnées. — Passons maintenant au cas plus difficile d'un milieu à trois dimensions, où l'équation à intégrer est

$$(309) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} \pm 4k^2\varphi.$$

Introduisant encore une variable, r, de plus que celles qui sont imposées, sous la réserve de lui attribuer finalement la valeur zéro, nous supposerons la fonction φ dépendante non seulement du temps t, mais aussi des quatre variables x, y, z, r, de manière à pouvoir regarder l'équation (309) comme résultant des deux équations simultanées, *que nous savons intégrer séparément,*

$$(310) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2} \pm 4k^2\varphi, \qquad \frac{d^2\varphi}{dr^2} = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}.$$

Alors, en vertu de la première (310) et de la formule précé-

---

qui se déduit de (307), quand $4k^2\varphi$ est le dernier terme, en posant $\varphi = e^{2kt}\Phi$: c'était ainsi l'équation des petits mouvements d'une corde qui éprouve à vibrer une résistance proportionnelle à la vitesse. La solution de Laplace (*Mémoires de l'ancienne Académie des Sciences* pour 1779, p. 278 et 279), seulement ébauchée, permet déjà d'entrevoir la forme du dernier terme de (308) et, par conséquent, le type essentiel du résultat : M. J. Delemer (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* t. XXVI, 1901-1902, p. 87) a pu, après avoir vérifié sa parfaite exactitude, en tirer quelque parti, dans l'étude de la propagation de l'électricité le long d'un fil. Poisson réduit l'équation à sa forme simplifiée (307) et il en donne l'intégrale complète (*Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France,* t. III, 1819, p. 162 à 168) : sa solution montre le rôle capital, dans la question, des intégrales prises sur toute la surface de la sphère, de rayon t, décrite autour du point ($x = 0$, $y = 0$, $z = r$) comme centre; et de faciles transformations en déduiraient la formule (308).

dente (308) qui est son intégrale, l'expression générale de φ sera, si nous appelons $\psi(x, y, z, r)$ et $\Psi(x, y, z, r)$ les valeurs initiales respectives de cette fonction et de sa dérivée en t,

$$(311)\quad \begin{cases} \varphi = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-t}^{t} \psi(x, y, z, r+\tau)\,\mathrm{U}(k^2t^2 - k^2\tau^2)\,d\tau \\ \qquad + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} \Psi(x, y, z, r+\tau)\,\mathrm{U}(k^2t^2 - k^2\tau^2)\,d\tau. \end{cases}$$

Nous disposerons donc de ce que les fonctions $\psi(x, y, z, r)$, $\Psi(x, y, z, r)$ se trouvent données seulement quand $r = 0$, alors qu'elles se réduisent à $f(x, y, z)$ et à $\mathrm{F}(x, y, z)$, pour les faire varier avec r de manière que φ, s'il est possible, vérifie aussi la seconde équation (310). Cette équation, identique à (298) sauf le changement de t en r, doit, dès lors, s'appliquer en particulier pour t infiniment petit et régir, par conséquent, les fonctions d'état initial $\psi(x, y, z, r)$, $\Psi(x, y, z, r)$. Celles-ci auront donc comme expressions, d'après l'intégrale générale (299) de (298), où r remplacerait t et où ψ aurait pour expression soit $f(x, y, z)$, soit $\mathrm{F}(x, y, z)$:

$$(312)\quad \begin{cases} \psi(x, y, z, r) = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dr}\int_\sigma f(x + r\cos\alpha, y + r\cos\beta, z + r\cos\gamma)\frac{d\sigma}{r} + \ldots, \\ \Psi(x, y, z, r) = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dr}\int_\sigma \mathrm{F}(x + r\cos\alpha, y + r\cos\beta, z + r\cos\gamma)\frac{d\sigma}{r} + \ldots. \end{cases}$$

Je me suis contenté de représenter par des points, dans chacune de ces formules, une intégrale définie de même forme (avec un f ou F différent) que celle qui précède les points, mais non différentiée, comme elle, par rapport à r et, par cela même, fonction impaire de r destinée à disparaître des résultats définitifs, tandis que le terme écrit est une fonction paire de r [1].

Telles sont les expressions de ψ, Ψ à porter dans (311), après y avoir remplacé r par $r + \tau$. Or la forme même, (311), de la valeur générale ainsi obtenue pour φ, montre que les dérivées de φ en x, y, z, r se calculeront par de simples différentiations, sous les signes $\int$, des facteurs $\psi(x, y, z, r+\tau)$, $\Psi(x, y, z, r+\tau)$, relativement à leurs quatre variables $x, y, z, r+\tau$. Et comme, d'après la relation que vérifient les expressions (312) de ψ, Ψ, les trois dérivées secondes

---

[1] *Voir*, par exemple, à ce sujet, le Tome, cité ci-dessus plusieurs fois, de *Calcul intégral*, p. 447*.

directes ainsi obtenues en x, y, z auront pour somme la dérivée seconde directe prise par rapport à la quatrième variable $r+\tau$, la deuxième équation (310) se trouvera bien identiquement satisfaite, tout comme la première (310). Donc l'équation proposée (309) ne le sera pas moins.

N'ayant à faire usage de la solution (311) que dans le cas $r=0$, il suffira de remplacer r par τ dans (312); et alors les termes de (312) non écrits explicitement, ou impairs par rapport à τ, donneront, dans les intégrations faites de $-t$ à t, des éléments deux à deux égaux et contraires qui s'élimineront du résultat. Au contraire, les termes pairs écrits fourniront des éléments deux à deux égaux et de même signe; en sorte qu'il suffira d'intégrer de $\tau=0$ à $\tau=t$, en doublant les sommes. Et il viendra, pour la solution demandée de (309) :

$$(313)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi = {} & \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\int_0^t \mathrm{U}(k^2t^2-k^2\tau^2)\,d\tau\frac{d}{d\tau}\int_\sigma f(x+\tau\cos\alpha, y+\tau\cos\beta, z+\tau\cos\gamma)\frac{d\sigma}{\tau} \\ & +\frac{1}{4\pi}\int_0^t \mathrm{U}(k^2t^2-k^2\tau^2)\,d\tau\frac{d}{d\tau}\int_\sigma \mathrm{F}(x+\tau\cos\alpha, y+\tau\cos\beta, z+\tau\cos\gamma)\frac{d\sigma}{\tau}. \end{aligned}\right.$$

On voit qu'elle est exprimée par des *sortes* d'intégrales triples, tandis que les solutions précédentes (303) et (308) l'étaient par des intégrales doubles et simples. La solution de l'équation (309) dépend donc d'intégrales définies d'un ordre de multiplicité égal au nombre des dimensions du milieu, ou des coordonnées x, y, z.

La formule (313) s'applique aussi, d'ailleurs, à ces cas d'une ou deux coordonnées, déjà exprimés par (308) ou (303). Car, pour empêcher, dans (313), la fonction φ de contenir certaines des variables x, y, z, et lui faire vérifier les équations auxquelles se réduit alors (309), il suffit d'admettre des données f, F d'état initial où n'entrent pas les coordonnées analogues de la *région d'ébranlement*, c'est-à-dire des données pareilles soit sur toute l'étendue de chaque plan (indéfini) perpendiculaire à l'unique coordonnée introduite, soit tout le long des droites, indéfinies, normales au plan des deux coordonnées subsistantes.

93. Identité nécessaire des résultats obtenus par les deux voies suivies, dans les cas de moins de trois coordonnées. — Les solutions ainsi déduites de la formule (313), pour les cas d'une seule coordonnée, appelée alors r, ou de deux coordonnées y et z, donnent d'ailleurs les mêmes résultats que les précédentes (308) et (303), spécialement adaptées à ces cas. En effet, quel que soit (entre 1 et 3) le nombre n des coordonnées x, y, z, l'équation même (309) déter-

mine la fonction φ à toutes les époques t, dès que l'on connaît, à une époque donnée $t=0$, les valeurs particulières $f(x, y, z)$ de cette fonction et celles, $F(x, y, z)$, de sa dérivée première en t. Voici comment on peut le démontrer fort simplement, du moins quand on suppose φ connue à toute époque (dans l'espace à n dimensions où varient ces coordonnées) aux distances infinies de l'origine, c'est-à-dire astreinte soit à s'y annuler ou en toute rigueur, ou asymptotiquement, soit, d'une manière plus générale, à y tendre vers certaines valeurs finies, fonctions données du temps t et de la direction.

Gardons l'équation sous sa forme (309) quand le dernier terme a le signe inférieur, ou écrivons-la, par conséquent,

$$(314) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \Delta_2\varphi - 4k^2\varphi.$$

Mais, dans le cas contraire du signe supérieur $+$, posons $\varphi = e^{2kt}\Phi$; ce qui, d'une part, conduit à remplacer (309) par l'équation en Φ,

$$(314 \textit{ bis}) \qquad \frac{d^2\Phi}{dt^2} + 4k\frac{d\Phi}{dt} = \Delta_2\Phi,$$

et, d'autre part, donne, pour t nul,

$$\varphi = \Phi, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} + 2k\Phi.$$

Il revient donc au même de connaître *initialement* φ avec sa dérivée première en t, ou Φ avec sa dérivée analogue $\frac{d\Phi}{dt}$, et aussi, d'ailleurs, d'astreindre φ à prendre certaines valeurs (pour chaque époque) aux distances infinies de l'origine, ou d'y astreindre Φ.

Cela posé, s'il existe, pour mêmes données initiales, deux solutions distinctes de l'équation (314) ou de l'équation (314 *bis*), s'annulant ainsi à l'infini ou y tendant vers les mêmes valeurs, il est clair que leur différence sera encore une solution de l'équation (314) ou (314 *bis*), mais une solution *initialement nulle avec sa dérivée première en t, et évanouissante (quel que soit t) aux distances infinies de l'origine.* Pour établir qu'une telle différence se réduit nécessairement à zéro, nous avons donc à montrer que toute fonction continue φ ou Φ, régie par l'équation (314) ou (314 *bis*) et astreinte, avec sa dérivée première en t, à s'annuler pour $t=0$, restera indéfiniment nulle, pourvu qu'elle doive sans cesse s'évanouir en tous les points infiniment éloignés de l'origine.

Dans ce but, décrivons de l'origine comme centre, avec un rayon

constant quelconque ι, la figure σ qui circonscrira tout l'espace ϖ dont les distances à l'origine sont inférieures à ι, savoir : la sphère $\sigma = 4\pi\iota^2$, dans le cas des trois coordonnées x, y, z; la circonférence $\sigma = 2\pi\iota$, dans le cas d'un plan ou de deux coordonnées seulement; enfin l'ensemble des *deux* points d'abscisse $\pm\iota$, ensemble dont la valeur *constante* sera censée être $\sigma = 2$, dans le cas d'un simple espace linéaire ou à une seule coordonnée. Quel que soit le nombre, 3, 2, ou 1, des dimensions de ϖ, nous appellerons $d\iota$ une normale infiniment petite menée, vers le dehors, à chaque élément $d\sigma$ de la limite σ, en prolongement du rayon ι qui le joint à l'origine; et nous représenterons par $\frac{d}{d\iota}$ la dérivée, suivant cette normale, de la fonction qui sera écrite après le d du numérateur.

Multiplions l'équation (314) ou (314 *bis*) par $2\varphi\, d\varpi$ ou par $2\Phi\, d\varpi$, et intégrons chaque terme dans toute l'étendue ϖ, après avoir substitué à $2\varphi\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\ldots\right)$ et à $2\Phi\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}+\ldots\right)$, respectivement,

$$2\frac{d}{dx}\left(\varphi\frac{d\varphi}{dx}\right)+\ldots-2\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2}+\ldots\right)$$

et

$$2\frac{d}{dx}\left(\Phi\frac{d\Phi}{dx}\right)+\ldots-2\left(\frac{d\Phi^2}{dx^2}+\ldots\right),$$

c'est-à-dire, plus simplement, d'après la notation Δ_1 de Lamé pour les paramètres différentiels du premier ordre,

$$\frac{d^2.\varphi^2}{dx^2}+\ldots-2\Delta_1^2\varphi \quad \text{et} \quad \frac{d^2.\Phi^2}{dx^2}+\ldots-2\Delta_1^2\Phi.$$

En transformant, par le procédé ordinaire, les termes intégrables une fois en intégrales prises sur la figure limite σ et isolant celles-ci dans un membre, il viendra :

$$(315)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_\sigma \frac{d.\varphi^2}{d\iota}\,d\sigma = 2\int_\varpi\left(\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\Delta_1^2\varphi+4k^2\varphi^2\right)d\varpi,\\ &\int_\sigma \frac{d.\Phi^2}{d\iota}\,d\sigma = 2\int_\varpi\left(\Phi\frac{d^2\Phi}{dt^2}+\Delta_1^2\Phi+4k\Phi\frac{d\Phi}{dt}\right)d\varpi.\end{aligned}\right.$$

Or supposons que, à partir de l'époque $t=0$, où φ, Φ et leur dérivée en t s'annulent, on considère ces équations (315), pour les utiliser dès l'instant *ultérieur* où φ, Φ commenceraient à différer de zéro. Il est évident que, à un tel moment, la dérivée première $\frac{d(\varphi,\Phi)}{dt}$

prendrait le signe de sa propre dérivée $\frac{d^2(\varphi, \Phi)}{dt^2}$ et que, de même, φ ou Φ prendrait le signe de $\frac{d(\varphi, \Phi)}{dt}$. Donc, dans les seconds membres de (315), les produits figurant sous les signes $\int$ seraient, comme les carrés φ^2, $\Delta_1^2\varphi$, $\Delta_1^2\Phi$, essentiellement positifs. Et en divisant par σ les premiers membres de ces relations on aurait

$$\int_\sigma \frac{d(\varphi^2, \Phi^2)}{d\iota}\frac{d\sigma}{\sigma} > 0. \tag{316}$$

D'ailleurs, lorsqu'on passe d'une figure σ, de rayon ι, à la suivante de rayon $\iota + d\iota$, les éléments $d\sigma$ de la première peuvent, en se déplaçant de $d\iota$ et se dilatant pour constituer la seconde, être censés compris toujours entre les mêmes droites émanées de l'origine; de manière que chacun reste une même fraction de la figure totale σ, et que ses points se déplacent le long de normales égales $d\iota$. Alors l'élément $(\varphi^2, \Phi^2)\frac{d\sigma}{\sigma}$ de l'intégrale $\int_\sigma(\varphi^2 \text{ ou } \Phi^2)\frac{d\sigma}{\sigma}$ a, pour sa dérivée en ι, $\frac{d(\varphi^2, \Phi^2)}{d\iota}\frac{d\sigma}{\sigma}$; et le premier membre de (316) est la dérivée en ι de $\int_\sigma(\varphi^2 \text{ ou } \Phi^2)\frac{d\sigma}{\sigma}$, c'est-à-dire de la *valeur moyenne* de φ^2 ou Φ^2 sur toute l'étendue d'une figure σ. Ainsi la relation (316) revient à écrire

$$\frac{d}{d\iota}(\text{valeur moyenne de } \varphi^2 \text{ ou de } \Phi^2) > 0. \tag{317}$$

La valeur moyenne de la fonction, essentiellement positive, φ^2 ou Φ^2, à la distance ι de l'origine, ne peut donc que croître avec ι, si elle cesse d'être nulle. Et comme un tel accroissement est rendu impossible par l'annulation supposée de φ^2 ou de Φ^2 à l'infini, on a bien, identiquement, $\varphi^2 = 0$, $\Phi^2 = 0$ à toutes les époques *t positives*, les seules dont on ait à s'occuper quand l'époque $t = 0$ a été celle d'un ébranlement dû à des causes extérieures, à un trouble mettant momentanément en défaut l'équation aux dérivées partielles du problème ou rompant la continuité du présent avec le passé du système ([1]).

([1]) J'avais déjà fait usage de ce genre de démonstration, sur des exemples plus simples, par exemple, dans le Volume, consacré au *Calcul intégral*, de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (*Compléments*, p. 385* à 387*).

Dans le cas contraire, où l'état choisi comme initial ne serait que la *suite* des états antérieurs, le problème se trouverait également déterminé pour les valeurs de t négatives. Il n'y aurait même rien à changer au raisonnement, en ce qui concerne la première formule (315) ou, par suite, l'équation (314). Car, pour t décroissant à partir de zéro, $\frac{d\varphi}{dt}$, dès qu'il cesse de s'annuler, prend signe contraire à $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$, et, φ, signe contraire à $\frac{d\varphi}{dt}$; en sorte que le produit $\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ est encore essentiellement positif dans la première formule (315).

Quant à l'équation (314 *bis*), et à la seconde (315) où, sous le signe $\int_\varpi$, le produit $\Phi\frac{d\Phi}{dt}$ devient négatif, on peut y observer, en appelant t_0 l'instant où Φ commencerait à ne plus s'annuler, que le facteur $\frac{d\Phi}{dt}=\int_{t_0}^{t}\frac{d^2\Phi}{dt^2}dt$ est alors très petit (en valeur absolue) devant $\frac{d^2\Phi}{dt^2}$: chose évidente (à cause de $\int dt$ alors infiniment petit) quand $\frac{d^2\Phi}{dt^2}$ diffère initialement de zéro, mais vraie aussi quand $\frac{d^2\Phi}{dt^2}$ part et *s'écarte* de zéro, car alors on a

$$\int_{t_0}^{t}\frac{d^2\Phi}{dt^2}dt<\frac{d^2\Phi}{dt^2}\int_{t_0}^{t}dt \quad \text{(en valeur absolue).}$$

Donc le terme négatif $4k\Phi\frac{d\Phi}{dt}$, où l'on suppose k fini, est masqué, dans la parenthèse de la seconde relation (315), par le terme positif $\Phi\frac{d^2\Phi}{dt^2}$; et la fonction continue Φ ne peut *à aucun moment*, pas plus que dans les autres cas, différer de zéro.

94. **Vérification de cette identité.** — L'unité de solution du problème étant ainsi établie, nous devons pouvoir, dans les cas d'une et de deux coordonnées, réduire à la forme correspondante (308) ou (303) l'intégrale plus compliquée (313).

Cette réduction se fait immédiatement quand les fonctions $f(x,y,z)$, $F(x,y,z)$ ne dépendent que d'une coordonnée, x par exemple. Car, si l'on décompose la sphère $\sigma=4\pi r^2$, par des plans parallèles aux yz,

en zones élémentaires, dont l'une quelconque aura l'abscisse

$$x + \tau \cos\alpha = X$$

et la hauteur dX ou l'aire $2\pi\tau\, dX$, les intégrales $\int_\sigma$ deviendront, dans la formule (313), où f, F seront maintenant $f(X)$ et $F(X)$,

$$2\pi \int_{x-\tau}^{x+\tau} f(X)\, dX \quad \text{et} \quad 2\pi \int_{x-\tau}^{x+\tau} F(X)\, dX.$$

Or la règle de différentiation des intégrales donne, pour la dérivée en τ de ces expressions,

$$2\pi[f(x+\tau) + f(x-\tau)], \quad 2\pi[F(x+\tau) + F(x-\tau)].$$

Et il suffit, après substitution de celles-ci dans (313), d'observer que $f(x-\tau)$, $F(x-\tau)$ peuvent être supprimés, sous le signe $\int$, à la condition d'étendre le champ des intégrales aux valeurs négatives de τ allant de $-t$ à zéro, pour avoir

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-t}^{t} f(x+\tau) U(k^2 t^2 - k^2 \tau^2)\, d\tau$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{-t}^{t} F(x+\tau) U(k^2 t^2 - k^2 \tau^2)\, d\tau.$$

C'est précisément la formule cherchée (308), sauf le remplacement de r par x.

La réduction de (313) à (303), dans le cas des deux coordonnées y, z où f et F cessent de dépendre de $x + \tau\cos\alpha$, ne s'effectue pas aussi simplement. Voici comment on peut l'opérer.

Chacune des deux intégrales figurant au second membre de (313) se dédouble immédiatement, grâce à une intégration par parties dans laquelle on prend le potentiel sphérique $\int_\sigma$ pour facteur intégré, en deux intégrales, relatives, l'une (terme intégré) aux divers éléments de la surface σ de la sphère de rayon t décrite autour de (x, y, z) comme centre, l'autre aux divers éléments $d\varpi = d\tau\, d\sigma$, à coordonnées $x + \mathrm{x}$, $y + \mathrm{y}$, $z + \mathrm{z}$, du volume ϖ de cette sphère, décomposée en couches sphériques concentriques $4\pi\tau^2 d\tau$ ou $\sigma\, d\tau$. Des deux expressions exactement pareilles ainsi obtenues, celle, par exemple, où figure la fonc-

tion arbitraire f est $\left[\text{vu que } U(0)=1\text{, d'après (305), et que le potentiel sphérique } \int_\sigma \text{ s'annule pour } \tau = 0\right]$

$$(318)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_\sigma f(x+t\cos\alpha,\, y+t\cos\beta,\, z+t\cos\gamma)\frac{d\sigma}{t}\\ &\quad + 2k^2\int_\varpi U'(k^2t^2-k^2\tau^2)f(x+\mathrm{x},\, y+\mathrm{y},\, z+\mathrm{z})\,d\varpi. \end{aligned}\right.$$

Cela posé, quand $x=0$ et que f se réduit à $f(y+\mathrm{y}, z+\mathrm{z})$, il y a symétrie de part et d'autre du plan des yz; et il suffit d'intégrer pour la demi-sphère située du côté des x positifs, en doublant les résultats. De plus, le volume $\frac{1}{2}\varpi$ peut être décomposé en filets élémentaires $d\mathrm{y}\,d\mathrm{z}\int d\mathrm{x}$ parallèles aux x, ayant pour leur base $d\mathrm{y}\,d\mathrm{z}$, sur le plan des yz, la projection correspondante, $d\sigma\cos\alpha$, de l'élément $d\sigma$ de sphère découpé à leur extrémité, d'abscisse $\mathrm{x}=t\cos\alpha$, et auquel aboutit le rayon t défini en direction par les deux cosinus directeurs

$$\cos\beta = \frac{\mathrm{y}}{t},\qquad \cos\gamma = \frac{\mathrm{z}}{t}.$$

La fonction $f(y+\mathrm{y}, z+\mathrm{z})$ étant $f(y+t\cos\beta, z+t\cos\gamma)$ sur toute la longueur d'un filet, et $U'(k^2t^2-k^2\tau^2)$ y ayant la valeur variable $U'(k^2t^2-k^2\mathrm{x}^2-k^2\mathrm{y}^2-k^2\mathrm{z}^2)$ ou $U'[k^2t^2(1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma)-k^2\mathrm{x}^2]$, c'est-à-dire $U'(k^2t^2\cos^2\alpha-k^2\mathrm{x}^2)$, l'expression (318) devient aisément

$$(319)\quad 2\int_{\frac{1}{2}\sigma}(y+t\cos\beta,\, z+t\cos\gamma)\frac{d\sigma}{t}\left[1+2k^2t\cos\alpha\int_0^{t\cos\alpha}U'(k^2t^2\cos^2\alpha-k^2\mathrm{x}^2)\,d\mathrm{x}\right].$$

La quantité entre crochets, si l'on pose, pour abréger, $kt\cos\alpha = A$, $k\mathrm{x}=\lambda$, n'est autre que $1+2A\int_0^A U'(A^2-\lambda^2)\,d\lambda$; et elle prend la forme suivante, quand on y remplace la fonction dérivée U' par son développement en série déduit de (305) :

$$(320)\quad \left\{\begin{aligned} &1+2A\left(\pm A+\frac{I_1}{1^2.2}\pm\frac{I_2}{1^2.2^2.3}+\frac{I_3}{1^2.2^2.3^2.4}\mp\ldots\right),\\ &\text{où}\\ &I_n=\int_0^A(A^2-\lambda^2)^n\,d\lambda. \end{aligned}\right.$$

Or une intégration par parties, effectuée sur I_n avec λ pour facteur intégré, donne

$$(\text{pour } n > 0) \quad I_n = 2n \int_0^A \lambda^2 (A^2 - \lambda^2)^{n-1} d\lambda = 2n(A^2 I_{n-1} - I_n);$$

d'où la formule de réduction

$$(321) \qquad I_n = \frac{2n}{2n+1} A^2 I_{n-1}.$$

Il en résulte, à partir de $I_0 = A$,

$$(321\ bis) \quad I_1 = \frac{2}{3} A^3, \quad I_2 = \frac{2}{3}\frac{4}{5} A^5, \quad \ldots, \quad I_n = \frac{(1.2.3\ldots n)2^n}{3.5\ldots(2n+1)} A^{2n+1}, \quad \ldots,$$

et, enfin, par substitution de ces valeurs dans (320), la série

$$(322) \qquad 1 \pm \frac{(2A)^2}{1.2} + \frac{(2A)^4}{1.2.3.4} \pm \frac{(2A)^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

Le terme général, abstraction faite du signe, est

$$\frac{(1.2.3\ldots n) 2^{n+1} A^{2n+2}}{(1.2.3\ldots n)^2 (n+1).3.5.7\ldots(2n+1)} = \frac{(2A)^{2n+2}}{1.2.3\ldots(2n+2)}.$$

On reconnaît, dans cette série, le développement de $\operatorname{co}(2A)$ ou de $\operatorname{co}(2kt\cos\alpha)$.

Et l'expression (319) devient bien, comme il le faut d'après la formule (303) qu'on veut obtenir,

$$(323) \qquad 2\int_{\frac{1}{2}\sigma} \operatorname{co}(2kt\cos\alpha) f(y + t\cos\beta, z + t\cos\gamma) \frac{d\sigma}{t}.$$

95. Conséquences physiques les plus simples de l'intégration effectuée : propagation uniforme du front de l'onde. — Puisque l'intégrale (313) convient quel que soit le nombre des coordonnées x, y, z, nous pouvons nous en servir, tout au moins, pour arriver aux lois les plus simples du phénomène, quand même la propagation se ferait suivant une ou deux dimensions seulement. Il suffira d'admettre alors, comme il a été dit, des données pareilles sur toute l'étendue de chaque plan perpendiculaire à la coordonnée introduite, s'il n'y en a qu'une figurant dans l'équation, ou tout le long des droites normales au plan des deux coordonnées en évidence, s'il y en a deux.

Cela posé, considérant l'expression (313) de φ (p. 540) au point quelconque (x, y, z) de l'espace, et appelant X, Y, Z les coordonnées

d'un élément de la région d'ébranlement, demandons-nous à partir de quelle époque t les circonstances d'état initial qui concernent cet élément, ou représentées par les valeurs $f(X, Y, Z)$, $F(X, Y, Z)$, relatives au point (X, Y, Z), de f et de F, commenceront à influer sur l'état physique φ en (x, y, z). Il faudra évidemment, pour cela, et il suffira, en général, qu'un point

$$(x + \tau\cos\alpha,\ y + \tau\cos\beta,\ z + \tau\cos\gamma)$$

des sphères sur lesquelles se font les intégrations $\int_\sigma$ dans (313) coïncide avec (X, Y, Z), ou que la distance du point (x, y, z) à l'élément (X, Y, Z) de la région d'ébranlement n'excède pas le plus grand rayon t de ces sphères.

L'influence des circonstances initiales produites en (X, Y, Z) se propage donc, tout autour, avec la vitesse même, 1, de la lumière, évaluée comme s'il n'y avait pas, dans l'équation aux dérivées partielles, des termes respectivement proportionnels au déplacement et à la vitesse, ou que l'on eût $k = 0$ dans (309). Mais, une fois qu'elle a commencé à se faire sentir quelque part, elle y persiste généralement durant un temps indéfini; car les sphères qui interviennent dans la formule (313) ont des rayons τ de toutes les grandeurs allant de zéro à t; et celle d'entre ces sphères qui, passant par (X, Y, Z), y a figuré une fois ne cesse plus désormais de le faire, tout en ayant dans le résultat (313) une part variable avec le facteur $U(k^2t^2 - k^2\tau^2)$.

96. Calcul direct et simple de cette vitesse de propagation du front ou de la tête de l'onde. — Hugoniot a montré [1] que, lorsque l'on se borne à l'étude de la tête d'une onde progressant dans un fluide en repos, il existe, en effet, pour la vitesse de propagation, même sans que l'équation du mouvement soit linéaire (sauf par rapport aux dérivées les plus élevées qui y figurent), une formule générale, facile à déduire de cette équation du mouvement. Voici à quels termes simples peut, ce me semble, se réduire la démonstration de ce fait, soit pour une onde, soit même pour un changement quelconque u d'état physique (température, densité, vitesse, déplacement, etc.), se produisant, dans un milieu matériel dont une région garde encore son état primitif *uniforme*, à la surface d'envahissement de cette région par le changement u survenu dans l'autre.

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CI, p. 794; 26 octobre 1885.

Imaginons qu'on ait pris, en le dirigeant vers la région encore tranquille, un axe des x normal à la surface en question, sensiblement plane; et admettons (ce qu'on pourra généralement faire dans des étendues assez restreintes), d'une part, l'homogénéité du milieu, c'est-à-dire la constance de ses coefficients physiques, d'autre part, l'uniformité de u sur chaque couche parallèle à la surface, ou sa dépendance de x et de t, à l'exclusion d'autres variables.

Dans la région récemment envahie, le changement *naissant* u aura ses dérivées premières, en x ou t, incomparablement plus grandes numériquement qu'il n'est lui-même; car il constitue leur intégrale $\int \frac{du}{dx} dx$ ou $\int \frac{du}{dt} dt$, prise à partir ou de la tête de l'onde jusqu'en (x, y, z), ou de l'instant de la cessation du repos au point (x, y, z) jusqu'à l'époque t actuelle, c'est-à-dire dans un champ $\int dx$ ou $\int dt$ infiniment petit; intégrale toujours inférieure (quant aux valeurs absolues) au produit de la dérivée considérée $\frac{du}{d(x, t)}$, en train de s'éloigner de zéro, par le champ $\int dx$ ou $\int dt$. Pour la même raison, ces dérivées premières de u y sont très petites, par rapport aux dérivées secondes dont elles constituent des intégrales analogues; ces dérivées secondes sont, de même, très petites à côté des dérivées troisièmes; et ainsi de suite, jusqu'aux plus élevées de chaque espèce (en x ou en t) figurant dans l'équation du phénomène, seules susceptibles, dans cette équation, de varier sans continuité, ou de *débuter* par une valeur sensible. En effet, la loi du phénomène n'aurait plus de sens, si certaines des dérivées *qui y figurent* n'existaient pas, comme il arriverait aux moments où les plus élevées de chaque espèce, en x ou t, que nous supposerons d'abord être du même ordre, le $n^{\text{ième}}$, auraient leurs intégrales (dérivées d'ordres inférieurs) discontinues.

Donc l'équation donnée, aux différentielles partielles, si elle est linéaire par rapport aux dérivées du $n^{\text{ième}}$ ordre, et qu'elle contienne assez de ces dérivées du $n^{\text{ième}}$ ordre pour que toutes les dérivées d'ordre moindre y figurant aussi en soient des intégrales, pourra être réduite, *près de la tête de l'onde,* à ses termes affectés des dérivées d'ordre n, dans lesquels d'ailleurs il sera permis d'annuler la fonction u et ses dérivées d'ordres moindres, comme on l'aura fait ainsi dans tous les termes supprimés; et, cela, avec une approximation relative d'autant plus grande, qu'on se tiendra plus rapproché de la

région où $u = 0$. L'équation du problème y deviendra par conséquent linéaire, à coefficients constants, et homogène quant à l'ordre des dérivées de u y figurant. Soit, alors,

$$(324)\qquad \mathrm{a}\frac{d^n u}{dx^n} + \mathrm{b}\frac{d^n u}{dx^{n-1}dt} + \mathrm{c}\frac{d^n u}{dx^{n-2}dt^2} + \ldots = 0$$

cette équation réduite. On y satisfera par des intégrales particulières de la forme $u = f(x - \omega t)$, avec f fonction arbitraire et ω racine de l'équation algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré

$$(325)\qquad \mathrm{a} - \mathrm{b}\omega + \mathrm{c}\omega^2 - \ldots = 0.$$

Il suffit donc, d'une part, que celle-ci admette une racine ω réelle et positive, d'autre part, que $f(x)$ exprime, à l'époque $t = 0$, le changement u aux environs de la surface séparative (mobile), pour que la propagation effective du mouvement en ces points soit ou, du moins, puisse être exprimée elle-même, à très peu près, par l'intégrale $f(x - \omega t)$, évidemment représentative d'une propagation *uniforme de célérité* ω. Et il est clair qu'alors les termes de l'équation donnée du problème supprimés préalablement, ou affectés de u et de ses dérivées des $n - 1$ premiers ordres, n'influent nullement sur cette célérité ω de la tête ou du front de l'onde.

Lorsque les n racines de l'équation (325) sont réelles et qu'une seule est positive ou correspond à un mouvement propagé vers les x positifs, l'intégrale générale, somme des n solutions particulières, représente la superposition de n ondes, dont les $n - 1$ émanant de la région des x infinis positifs sont annulées par la condition de repos primitif de cette région, en même temps que la partie la plus antérieure de la $n^{\text{ième}}$. Donc l'expression $f(x - \omega t)$ de u, pour la *tête* de l'onde, devient alors non seulement possible, mais inévitable. Tel est le cas de la corde vibrante, où $n = 2$, et qui constitue le type simple de la plupart des phénomènes ondulatoires.

La méthode cesse d'être applicable quand une dérivée de u, d'ordre inférieur à n, figure dans l'équation et que les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de u dont celle-là pourrait être intégrale y font totalement défaut, comme, par exemple, quand l'équation, du second ordre, contient, ainsi qu'il arrive dans la théorie analytique de la chaleur, $\frac{du}{dt}$, sans contenir aucune des deux dérivées $\frac{d^2 u}{d(x,\, t)\, dt}$. Car, alors, cette dérivée, d'ordre inférieur à n, n'est *masquée* par aucune autre dérivée dans l'équation; et elle y subsiste pleinement, si près qu'on soit de la tête de

l'onde (où rien, d'ailleurs, ne l'oblige à varier graduellement). En réalité, il n'y a, dans ce cas, réellement plus de *tête,* dès que la propagation a commencé, la fonction u ne s'y annulant d'une manière continue que pour x infini. Essayons, sans entrer dans les détails, de le reconnaître par la même méthode, en recourant, pour suppléer à son insuffisance, au sentiment de la continuité des phénomènes naturels.

Supposons que la dérivée, d'ordre n, absente de l'équation du problème soit ou $\frac{d^n u}{dx^n}$, ou $\frac{d^n u}{dt^n}$. Suivant que c'est la première ou la seconde, introduisons fictivement dans (324), pour rendre la méthode applicable, un terme de la forme $\varepsilon\frac{d^n u}{dx^n}$, ou de la forme $\varepsilon\frac{d^n u}{dt^n}$, avec ε très voisin de zéro. L'équation (325) aura, dès lors, ou ε pour premier terme, ou $\pm\varepsilon\omega^n$ pour dernier terme du premier membre. Et l'évanouissement final de ε donnera lieu à une racine, ω, nulle dans le premier cas, infinie dans le second. Or, dans le premier cas, où la tête de l'onde, si elle existait d'une manière *continue,* serait ainsi immobilisée (vu $\omega = 0$) en un certain point d'abscisse x, u et ses dérivées en t s'y annuleraient *identiquement,* sans qu'il en fût généralement de même des dérivées de u en x ou, du moins, de la plus élevée entrant dans l'équation proposée; et celle-ci ne se trouverait pas satisfaite. Dans le second cas, la tête de l'onde, animée d'une célérité ω infinie, serait instantanément portée jusqu'aux abscisses x infinies. Tant dans un cas que dans l'autre, le raccordement de l'état primitif uniforme $u = 0$ avec l'état troublé variable u se fera donc *asymptotiquement,* aussitôt après le début du phénomène ([1]).

([1]) C'est bien ce que montrent, quand l'état *initial* $u_0 = f(x)$ s'annule pour les grandes valeurs positives de x, les intégrales obtenues dans ce Volume [p. 37, form. (42), et p. 7, form. (8)] pour les deux équations

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{du}{dx}, \qquad \frac{du}{dt} = \frac{d^2 u}{dx^2},$$

qui sont vraisemblablement les plus simples offrant les particularités considérées ici. On a pour ces deux intégrales, en remplaçant, d'une part, α par $\alpha\sqrt{2}$, d'autre part, ω par α, et en échangeant d'ailleurs x et t dans la première :

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\alpha^2} f\left(x - \frac{t^2}{4\alpha^2}\right) d\alpha, \qquad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha^2} f(x + 2\alpha\sqrt{t})\, d\alpha.$$

Prenons-y, par exemple, $f(x)$ nul pour x positif, égal à 1 pour x négatif et très rapidement décroissant de 1 à zéro pour x voisin de zéro. Ces deux for-

97. Lenteur du rétablissement de l'équilibre après le passage d'une onde isolée, surtout quand elle résulte d'une impulsion. — Terminons nos calculs en nous demandant suivant quelle loi, dans le cas d'une résistance proportionnelle à la vitesse, décroît en un point donné quelconque (x, y, z) du milieu l'influence des circonstances initiales produites en tout autre point, situé à une distance connue τ du premier, et, plus généralement, comment se fait l'extinction du mouvement, à l'arrière ou à la queue d'une onde isolée.

Pour simplifier le plus possible, nous nous bornerons à l'hypothèse d'une seule coordonnée r, définissant la situation du point (x, y, z); et nous admettrons même, du moins en premier lieu, des données d'état initial assez bien choisies, pour que l'expression (308) de φ (p. 537) se réduise à sa seconde partie, la moins compliquée. Bref, nous prendrons

$$\varphi = \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} F(r+\tau)\,U(k^2t^2 - k^2\tau^2)\,d\tau. \tag{326}$$

Appelons R l'abscisse, $r+\tau$, d'un élément, dR, de la région des ébranlements; en sorte que la part de cet élément dR dans la valeur totale de φ, ou l'élément de φ qu'elle donne, au point d'abscisse r, dès que t atteint la valeur $\sqrt{\tau^2}$, soit

$$\frac{1}{2}F(R)\,U(k^2t^2 - k^2\tau^2)\,dR. \tag{327}$$

Le déplacement que l'on a en vue, ξ par exemple, se trouve relié à φ par la formule (294) (p. 532), où $a = 1$; et, vu (296), où l'on doit prendre le signe supérieur et annuler ici a, il vient

$$\xi = e^{-\frac{H}{2\mu}}\,\varphi = e^{-2kt}\varphi. \tag{328}$$

---

mules deviendront, dès que t et x seront positifs,

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{t}{2\sqrt{x}}} e^{-\alpha^2}\,d\alpha, \qquad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha.$$

Dès que t excède zéro, u ne s'annule que pour x infini, même dans le cas de la première formule. On y a sensiblement, tant que t est très petit

$$e^{-\alpha^2} = 1, \qquad \text{ou} \qquad u = \frac{t}{\sqrt{\pi x}}.$$

Toutefois, la dérivée première de u en t ne s'y annule pas *initialement* pour les valeurs positives finies de x; de sorte qu'on n'est pas tout à fait, ici, dans les hypothèses admises plus haut.

La partie du déplacement ξ due à l'élément dR de la région des ébranlements sera donc, aux époques t ultérieures à $\sqrt{\tau^2}$ (les seules où cet élément ait à intervenir), le produit de F(R)dR par le facteur

$$(329)\qquad \frac{1}{2}e^{-2kt}\,\mathrm{U}(k^2t^2-k^2\tau^2).$$

Or la fonction U(ζ) est, d'après les formules (304) et (305) (p. 536),

$$\mathrm{U}(\zeta)=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{coh}(2\sqrt{\zeta}\cos\theta)\,d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{coh}(2\sqrt{\zeta}\cos\theta)\,d\theta.$$

D'où il résulte, pour le facteur d'influence cherché (329), l'expression

$$(330)\qquad \frac{e^{-2kt}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{coh}\left(2\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2}\cos\theta\right)d\theta.$$

Supposons le radical, $\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2}$, devenu *assez grand en comparaison de l'unité.* Le cosinus hyperbolique figurant sous le signe $\int$ se réduira sensiblement à la moitié de l'exponentielle correspondante; et ce facteur (330) sera, avec une erreur *très petite par rapport à* e^{-2kt},

$$(331)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-2\left(kt-\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2}\cos\theta\right)}\,d\theta.$$

L'exponentielle, sous le signe $\int$, a son exposant négatif et d'une valeur absolue modérée pour $\theta=0$, mais forte dès que $\cos\theta$ est un peu inférieur à 1. On peut donc borner l'intégrale définie aux éléments voisins de $\theta=0$, pour lesquels $\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2}$; ce qui réduit l'exponentielle à

$$e^{-2\left(kt-\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2}\right)-\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2}\,\theta^2}.$$

D'ailleurs, sans que θ cesse d'être petit, le produit $\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2}\,\theta^2$ prend des valeurs très notables, de sorte que toute la partie perceptible de l'intégrale définie, dans (331), revient à

$$e^{-2\left(kt-\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2}\right)}\int_0^{\infty}e^{-\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2}\,\theta^2}\,d\theta=\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-2\left(kt-\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2}\right)}}{\sqrt{\pi\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2}}}.$$

Ainsi, le facteur (331), dont le produit par $F(R)dR$ donne la partie du déplacement ξ due à l'élément dR de la région d'ébranlement, admet l'expression asymptotique

$$(332)\qquad \frac{e^{-2(kt-\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2})}}{4\sqrt{\pi\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2}}}.$$

Son évanouissement, quand t grandit, se fait avec une extrême lenteur; car dès que t excède assez τ pour que l'on ait sensiblement

$$\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2}=kt\left(1-\frac{\tau^2}{2t^2}\right),$$

l'expression (332) devient, à très peu près, en supposant $k\tau$ d'abord comparable à $\sqrt{kt}$, puis, finalement, petit même devant $\sqrt{kt}$,

$$(333)\qquad \frac{e^{-\frac{k^2\tau^2}{kt}}}{4\sqrt{\pi kt}}\left(1+\frac{\tau^2}{4t^2}+\dots\right)=\frac{1}{4\sqrt{\pi kt}}\left(1-\frac{k\tau^2}{t}+\dots\right);$$

et l'on voit qu'elle décroît, environ, comme l'inverse de $e^{\frac{k\tau^2}{t}}\sqrt{kt}$ en premier lieu, puis, comme l'inverse de $\sqrt{kt}$, lorsque $k\tau$ commence à s'effacer devant $\sqrt{kt}$ ou que la fraction $\frac{k\tau^2}{t}$ devient petite.

Toutefois, cette excessive lenteur, d'autant plus accusée que se trouve moindre le coefficient k de résistance, est, à proprement parler, celle de l'action des frottements pour neutraliser l'impulsion due à une certaine quantité totale de mouvement, initialement imprimée au milieu dans la région des ébranlements; et il ne faudrait pas l'attribuer au rétablissement même de l'équilibre *à l'arrière d'une onde non accompagnée d'impulsion*. En effet, l'expression asymptotique totale de ξ, produit de (333), par $F(R)dR$, intégré dans toute la région $\int dR$ d'ébranlement, pourra, pour kt assez grand, s'écrire à très peu près, d'abord, tant que $k\tau$ *sera comparable à* $\sqrt{kt}$,

$$(334)\qquad \xi=\frac{\int F(R)e^{-\frac{k\tau^2}{t}}dR}{4\sqrt{\pi kt}},$$

et finalement, lorsque $\sqrt{kt}$ deviendra grand, même à côté de $k\tau$, ou que le dernier membre de (333) sera applicable,

$$(334\ bis)\qquad \xi=\frac{\int F(R)\,dR}{4\sqrt{\pi kt}}-\frac{\sqrt{k}}{4t\sqrt{\pi t}}\int F(R)\tau^2\,dR.$$

Or, quand on ébranle le milieu comme, au fond, nous le supposons ici, en communiquant à la région ébranlée de simples vitesses initiales sans déplacements simultanés sensibles, la fonction F(R) exprime justement ces vitesses, d'après une indication donnée à la suite de la formule (297) (p. 533); et l'intégrale $\int F(R)\,dR$ représente, à un facteur constant près, l'*impulsion d'ensemble* ou la *quantité de mouvement* imprimée au milieu.

Si elle diffère de zéro, on a bien, sensiblement, pour t assez grand,

$$\xi = \frac{\int F(R)\,dR}{4\sqrt{\pi k t}};$$

et l'évanouissement de ξ se fait avec la lenteur dont il s'agit.

Mais, au contraire, dans le cas d'actions *intérieures*, telles que celles, par exemple, d'un phénomène chimique ayant eu pour théâtre la région d'ébranlement, l'intégrale $\int F(R)\,dR$ s'annule; et l'expression (334 *bis*) de ξ devient

$$\xi = \left[-\int F(R)\tau^2\,dR\right]\frac{\sqrt{k}}{4t\sqrt{\pi t}}.$$

Elle décroît donc, sensiblement, comme l'inverse de $t\sqrt{t}$, et d'autant moins que $\sqrt{k}$ est plus grand, ou que le coefficient de frottement H est plus fort.

On conçoit, en effet, que, dans le cas d'une *impulsion,* où le déplacement imprimé aurait été permanent, *définitif,* sans la présence des frottements, ceux-ci demandent d'autant plus de temps pour l'annuler, c'est-à-dire pour remettre dans leurs situations initiales les particules du milieu, qu'ils sont plus faibles; mais que, dans le cas contraire où il n'y a pas d'impulsion et où, sans les frottements, l'onde aurait été nettement délimitée à son arrière, le rétour à l'équilibre primitif se trouve d'autant plus retardé que les frottements sont plus grands.

Quand on donne des déplacements initiaux $\xi_0 = f(R)$ sans vitesses simultanées, cas où la somme $\int f(R)\,dR$ s'annule de même si ces déplacements ont été produits par des vitesses (rapidement acquises et rapidement disparues), *à valeur moyenne nulle* ou dues à des actions *intérieures,* la solution est un peu moins simple, parce que, d'après ce qu'on a vu à la suite de (297) (p. 533), F(R) y vaut $\frac{a^2 H}{2\mu}\xi_0$

ou $2kf(\mathrm{R})$; en sorte que la formule (308) (p. 537) garde tous ses termes. On y observera que la valeur asymptotique (332) de (330) donne, sauf erreur relative négligeable,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{coh}\left(2\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2}\cos\theta\right)d\theta = \frac{\pi}{4}\,\frac{e^{2\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2}}}{\sqrt{\pi\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2}}};$$

d'où il résulte (p. 553), encore sauf erreur relative négligeable, pour les fortes valeurs du radical $\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2}$,

$$\text{(335)}\qquad \mathrm{U}(k^2t^2-k^2\tau^2) = \frac{1}{2}\,\frac{e^{2\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2}}}{\sqrt{\pi\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2}}}.$$

On différentiera en t le second membre, pour avoir l'expression de $\frac{d.\mathrm{U}(k^2t^2-k^2\tau^2)}{dt}$ à porter dans le premier terme de la formule (308) de φ, terme qui sera

$$\frac{1}{2}\int f(\mathrm{R})\,\frac{d.\mathrm{U}(k^2t^2-k^2\tau^2)}{dt}\,d\mathrm{R};$$

et l'on évaluera ensuite ce terme en série, de la même manière qu'on a fait pour arriver aux formules (334) et (334 *bis*). La dérivée en t de $\mathrm{U}(k^2t^2-k^2\tau^2)$ se trouvera ainsi réductible à $2k\mathrm{U}(k^2t^2-k^2\tau^2)$; ce qui rendra la première partie de l'expression (308) de φ égale à la seconde et donnera finalement, au lieu de (334),

$$\text{(336)}\qquad \xi = \frac{\int f(\mathrm{R})e^{-\frac{k\tau^2}{t}}d\mathrm{R}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{k}{t}},$$

puis (t grandissant toujours), au lieu de (334 *bis*),

$$\text{(336 bis)}\qquad \xi = \frac{\int f(\mathrm{R})\,d\mathrm{R}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{k}{t}} - \frac{\int f(\mathrm{R})\tau^2\,d\mathrm{R}}{\sqrt{\pi}}\,\frac{k}{t}\sqrt{\frac{k}{t}}.$$

On voit que, à part le facteur k en plus aux numérateurs, ces formules impliqueront les mêmes conséquences que (334) et (334 *bis*) [1].

---

[1] **Cas d'une résistance proportionnelle au déplacement.** — Les résultats sont un peu moins simples quand la résistance étudiée est proportionnelle au déplacement ξ, non à la vitesse, ou lorsqu'on a, dans les formules de la page 532, $\mathrm{H}=0$, $a>0$, $\xi=\varphi$, et que, par suite, les formules des pages sui-

98. Complications à l'arrière de l'onde, dues à la non-homogénéité de l'équation du mouvement; conséquences qui en résultent au point de vue de la netteté des sensations. — En résumé, et comme l'a reconnu M. Poincaré pour les mouvements régis par la solution (308), les ondes élémentaires émanées de chaque point de la

---

vantes, savoir (297), (300), etc., doivent être prises avec les signes inférieurs. Alors le cosinus hyperbolique se trouve remplacé par le cosinus circulaire dans la fonction $U(\zeta)$, devenue ainsi :

$$U(\zeta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\sqrt{\zeta}\cos\theta)\,d\theta.$$

Or l'expression asymptotique de cette fonction est

$$(\text{pour } \zeta \text{ très grand}) \quad U(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sqrt{\zeta}}}\cos\left(2\sqrt{\zeta} - \frac{\pi}{4}\right),$$

comme on peut voir par la formule (26) de la XXXI[e] Leçon de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, *Compléments*, p. 154*). Il vient donc, pour t assez grand, dans l'expression (308) de φ (p. 537), en supposant finalement $k\tau$ comparable à $\sqrt{kt}$,

$$U(k^2t^2 - k^2\tau^2) = \frac{\cos\left(2\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi\sqrt{k^2t^2-k^2\tau^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi kt}}\cos\left(2kt - \frac{\pi}{4} - \frac{k\tau^2}{t}\right)$$

et, au même degré d'approximation,

$$\frac{d}{dt}U(k^2t^2 - k^2\tau^2) = -2\sqrt{\frac{k}{\pi t}}\sin\left(2kt - \frac{\pi}{4} - \frac{k\tau^2}{t}\right).$$

L'expression (308) de φ est alors, sensiblement,

$$\left\{\begin{aligned} \varphi = &-\sqrt{\frac{k}{\pi t}}\int f(R)\sin\left(2kt - \frac{\pi}{4} - \frac{k\tau^2}{t}\right)dR \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}}\int F(R)\cos\left(2kt - \frac{\pi}{4} - \frac{k\tau^2}{t}\right)dR. \end{aligned}\right.$$

On la traitera comme les précédentes (334) et (336), qui ont donné (334 *bis*) et (336 *bis*), aux distances τ des éléments dR de la région d'ébranlement assez modérées pour que la fraction $\frac{k\tau^2}{t}$ soit petite devant l'unité. Cela permettra, à ces distances, de dédoubler, sous les signes $\int$, le sinus et le cosinus qui y figurent en

$$(\sin \text{ ou } \cos)\left(2kt - \frac{\pi}{4}\right) \mp \frac{k\tau^2}{t}(\cos \text{ ou } \sin)\left(2kt - \frac{\pi}{4}\right).$$

On voit qu'alors l'expression de φ (ou de ξ) se composera de quatre parties,

région d'ébranlement ont à leur avant un *front* nettement défini, animé de la vitesse ordinaire de propagation de la lumière, mais à leur arrière une *queue* sans limite précise. Par suite, quand les ébranlements se répètent *à de très courts intervalles,* les mouvements successivement émis à partir d'un même endroit, ou par un même corps qui y vibre (¹), se mêlent et se confondent en arrivant au point quelconque (x, y, z) de l'espace, puisque chacun d'eux y trouve des restes de ceux qui l'ont précédé.

Ainsi il suffit, en général, de résistances ou d'actions perturbatrices comme celles que nous considérons ici, pour empêcher, dans les mouvements transmis, cette merveilleuse conservation au loin que permet l'équation ordinaire (298) (p. 533) dans les milieux à une ou à trois dimensions, des particularités infiniment diverses affectant ces mouvements dès leur source d'émission et caractéristiques du corps qui la constitue. On ne saurait trop admirer une telle conservation et surtout ses conséquences psychologiques; car elle fait de la *vue* et de l'*ouïe,* c'est-à-dire de nos deux sens se rapportant à des phénomènes régis par l'équation (298), les sens *intellectuels* par excellence, aptes à nous procurer des sensations aussi variées que nettes et, par suite, à

---

dont deux, affectées respectivement, en coefficient, de

$$\int f(\mathrm{R})\,d\mathrm{R} \quad \text{ou de} \quad \int \mathrm{F}(\mathrm{R})\,d\mathrm{R},$$

seront comparables aux inverses de $\sqrt{t}$, mais s'annuleront, avec leur coefficient respectif, dans le cas d'ébranlements causés par des actions *intérieures,* tandis que les deux autres, ayant en coefficient

$$\int f(\mathrm{R})\tau^2\,d\mathrm{R} \quad \text{ou} \quad \int \mathrm{F}(\mathrm{R})\tau^2\,d\mathrm{R},$$

seront de l'ordre de petitesse des inverses de $t\sqrt{t}$. Le décroissement des valeurs de ξ, pour des temps t croissants, est donc comparable à ce qu'il était dans le cas d'une résistance proportionnelle à la vitesse; mais ces valeurs de ξ, au lieu de tendre *sans cesse* vers zéro comme précédemment, *oscillent* indéfiniment, avant de s'évanouir, autour de cette limite zéro, avec une période, $\frac{\pi}{k}$, égale, d'après (296) (p. 532), à $2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\rho a}}$, ou inverse de la racine carrée du coefficient a de résistance.

(¹) Afin de rendre la question accessible, nous supposons, on le voit, comme au n° 27 (p. 328), que le corps vibrant agit sur le milieu élastique par une suite d'impulsions infiniment brèves, dans l'intervalle desquelles il disparaît ou est comme anéanti. En réalité, sa présence *continue* exigera la vérification de conditions spéciales à sa surface et apportera dans le phénomène de nouvelles complications.

nous fournir les plus précises et les plus riches de nos connaissances sur l'univers, en même temps que des signes assez distincts et assez nombreux pour nous permettre d'exprimer dans peu d'instants ou sur de petits espaces, par la parole, l'écriture, le dessin, et même par représentation intérieure d'images ou de mots fixant l'esprit, nos idées de toute nature ([1]).

99. Comparaison, à cet égard, des sensations auditives et visuelles. — Sous ce rapport, le sens de la vue est, à certains égards, inférieur à celui de l'ouïe, en raison de la dispersion de la lumière dans les milieux pondérables qui, due à de petits termes complémentaires, non homogènes avec les termes principaux des équations de mouvement, tend, par l'inégalité des vitesses de propagation qu'elle introduit, à résoudre les ondes lumineuses en mouvements pendulaires, *séparés dans l'espace*. Mais cette infériorité est heureusement atténuée par diverses circonstances. Deux d'entre elles sont la petitesse même de la dispersion dans l'air où nous vivons et l'excellent achromatisme de l'œil pour les radiations qu'il n'absorbe pas. Une troisième, rentrant peut-être en partie dans la précédente, consiste en ce que les résistances passives, inévitables dès qu'intervient dans les mouvements de l'éther la matière pondérable avec sa structure moléculaire compliquée, régularisent sans doute les vibrations lumineuses, en annulant très vite ou à faible distance, dans toute agitation de période donnée, les termes de la série correspondante de Fourier autres que le premier, ou à périodes sous-multiples de la sienne et,

---

([1]) J'ai présenté avec plus de détails ces considérations de Philosophie naturelle, relatives à l'équation ordinaire du son comparée à celles d'autres phénomènes, dans un Volume (de 1885) *Sur l'application des potentiels à l'équilibre et au mouvement des solides élastiques, etc.* (p. 339, 340, 696) et dans la partie, consacrée au *Calcul intégral*, du *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (fascicule élémentaire, p. 204; *Compléments*, p. 448* à 451*). J'ai remarqué d'ailleurs. dans le même fascicule de *Compléments* du Calcul intégral (p. 450*) et, antérieurement, à la page 642 de l'*Application des potentiels, etc.*, que les ondes élementaires régies par l'équation ordinaire du son, dans un milieu *plat* ou à *deux* coordonnées, laissent à leur suite un faible reste d'agitation, nuisible à la netteté de celles qui, supposées issues des mêmes centres, viendraient peu de temps après elles.

La limitation précise de chaque onde, tant à son arrière qu'à son avant, dans un milieu homogène parfaitement élastique ayant longueur, largeur et hauteur ou profondeur, tient à cette circonstance, assez particulière, que la solution générale des équations du mouvement s'y exprime, comme on le voit, par la formule (299) (p. 533), au moyen d'*intégrales de surface* ou *doubles*, malgré les *trois* dimensions de l'espace où l'onde progresse.

par suite, à longueurs d'ondes plus courtes, donnant bien plus de prise aux résistances dont il s'agit, par le fait même de cette brièveté ([1]). Les mouvements, *dès lors pendulaires,* admettent, en effet, comme expressions, les parties réelles des solutions symboliques de Cauchy, à exponentielle imaginaire, pour lesquelles sont en quelque sorte homogènes (comme on a vu p. 373, 459, 493, etc.), toutes les équations linéaires à coefficients constants.

Enfin et surtout, l'excessive petitesse des ondes lumineuses permet à leurs amplitudes de varier beaucoup dans de minimes espaces et, néanmoins, graduellement, ou sans altération de leurs lois simples, c'est-à-dire sans se compliquer de phénomènes notables de *diffraction :* d'où résulte une localisation extrême des impressions lumineuses sur les diverses parties de la rétine et, par suite, une précision ou finesse de détails, presque infinie, de leur correspondance avec les objets extérieurs qui les causent. A quoi il faut ajouter que la brièveté prodigieuse des périodes vibratoires amène la fusion complète, pour la sensibilité, des impressions successives produites en un même point de la rétine durant un court instant, de manière à ne laisser percevoir qu'une *moyenne,* incomparablement plus constante que ses éléments, et à donner ainsi une sensation uniforme ou régulière, malgré le désordre, l'incohérence possible, de l'agitation intestine dont cette sensation constitue le *retentissement conscient* en nous.

([1]) Il en est, du moins, ainsi dans les fluides à l'état de mouvement, pourvus de petits frottements intérieurs, comme l'eau ou l'air, et qui servent si bien de type à l'éther vibrant dans les corps. Par exemple, une houle complexe et confuse, née, ou incessamment émise, sous l'action du vent, dans une région déterminée de l'Océan, devient régulière au loin en s'y débarrassant de ses ondes courtes, *harmoniques* (en quelque sorte) de la houle *fondamentale* produite, et dont l'extinction successive se fait à des distances respectivement proportionnelles à la cinquième puissance de leurs périodes, quand elles avaient hauteur initiale pareille (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* t. CXXI, p. 85; 8 juillet 1895).

Je dis d'ailleurs que cette troisième circonstance simplificatrice des phénomènes optiques, savoir l'absorption inévitable, par les corps, d'un grand nombre d'harmoniques des radiations émises, rentre en partie dans la deuxième, qui est l'achromatisme de l'œil, parce que cet achromatisme, consistant dans l'égalisation des temps totaux que mettent les rayons de diverse période à se transmettre de la pupille à la rétine par les trajets respectifs de durée minimum, serait probablement impossible, s'il devait avoir lieu pour la totalité ou seulement la majeure partie des radiations émises par la plupart des corps; tandis qu'il devient possible, à un assez haut degré d'approximation (dans la mesure où la nature est parvenue à le réaliser), pour celles d'entre elles dont les périodes sont comprises dans une étendue restreinte, grâce justement à l'absorption de toutes les autres radiations par les milieux de l'œil.

Toutefois, les divers avantages de la vue sont, peut-être, largement compensés, pour l'ouïe, par la simultanéité de transmission, dans l'air, de tous les sons d'amplitude modérée produits ensemble, qui rend possible, ou indépendante de la distance, cette sorte de perception des formes simples composant un mode de vibration, qu'est le sentiment de *l'harmonie* (1). Faut-il expliquer par celui-ci non seulement la variété, tant syllabique que symphonique, mais aussi la puissance, la profondeur, la vivacité incomparables des impressions que sont susceptibles de produire en nous le langage et la musique? Il serait bien difficile de le dire.

100. Étendue très restreinte de l'échelle des périodes, pour les radiations visibles. — Une raison un peu autre que l'extinction rapide, par les milieux extérieurs, des harmoniques de chaque radiation principale émise, peut encore expliquer pourquoi, en Optique, ces *harmoniques* sont loin d'avoir un rôle aussi considérable ou aussi apparent qu'en Acoustique. Elle consiste en ce que toute l'échelle des lumières *simples* perçues par notre œil, depuis le rouge sombre jusqu'au violet extrême, n'atteint pas une *octave* complète. Il suffit donc que nous apercevions la partie *fondamentale* d'une radiation émise par un corps, pour que toute période sous-multiple de la sienne, c'est-à-dire la période d'une quelconque des radiations harmoniques, sorte des limites de notre sensibilité *visuelle*. Et la même exclusion s'applique à la radiation fondamentale dont nous apercevrions la première harmonique, celle dont la période est moitié de la sienne; en sorte que des harmoniques de radiations nous échappant pourraient, seules, impressionner *simultanément* notre rétine dans son mode *spécial* de fonctionnement, qui constitue la vision. Or il est naturel que leur intensité soit faible, en raison même de leur éloignement relatif dans la *série* dont elles font partie. D'ailleurs, s'il arrive, plus ou moins exceptionnellement, que cette intensité soit notable, elles se comportent, sans doute, comme tout autant de radiations distinctes et nous échappent en tant que *coharmoniques*.

Le peu de longueur de l'échelle des périodes affectant la vue tient-il à ce que notre *clavier optique* n'aurait pas assez de *touches*, c'est-à-dire, notre rétine, assez d'organes élémentaires à périodes

(1) Pour que l'harmonie d'un orchestre, par exemple, puisse être perçue, il faut, en effet (et c'est à peine nécessaire de le rappeler ici) que l'oreille soit impressionnée au même instant par les sons de l'orchestre *émis ensemble*, et non par ceux qui l'auraient été successivement.

vibratoires distinctes? Ou tient-il au pouvoir absorbant très étendu, à la transparence très *élective*, des milieux de l'œil? Les physiologistes ne le savent, sans doute, pas bien encore. Peut-être y a-t-il tout à la fois, à ce fait capital, l'une et l'autre causes, qui ne sont probablement pas de trop pour donner à notre vue une précision suffisante, en atténuant dans une mesure nécessaire, ou en réduisant à de justes limites, la variété déjà si effrayante non seulement des ébranlements vibratoires que reçoit l'œil, mais même de ceux que la rétine transmet au cerveau.

Le nombre et, par suite, le rapprochement des périodes existant dans la lumière blanche sont, en effet, prodigieux. Aussi n'est-on nullement surpris que l'œil soit incapable d'y en discerner aucune, ou d'imiter l'ouïe, appréciant la composition musicale des sons. Quant aux lumières simples, les occasions de les observer sont si rares dans la nature, qu'il n'a pas eu non plus, faute soit d'adaptation native, soit d'éducation, à leur attribuer, comme aux sons, une sorte de *hauteur*. Car la *couleur* qu'elles ont leur est commune avec bien des lumières composées et ne paraît pas, dès lors, être une qualité absolument liée à la période, ou analogue à la hauteur en Acoustique.

Il n'y a probablement pas, à cette absence de sensation des périodes par l'œil, l'unique motif du manque d'exercice, c'est-à-dire du défaut d'occasions où il pourrait observer des lumières assez peu complexes pour faciliter son initiation à leur analyse, mais aussi une raison plus profonde. Telle serait, notamment, la nécessité d'assurer *avant tout* l'achromatisme, si indispensable à la netteté des perceptions. Tels seraient, peut-être aussi, les inconvénients qu'aurait pu avoir, pour l'être vivant, une pareille faculté d'analyse, même localisée dans un appareil accessoire et rendue ainsi compatible avec l'achromatisme de l'organe principal. Car les physiciens ont constaté que l'observation des lumières simples, des *couleurs spectrales,* fatigue très rapidement la vue : ce qui porterait à penser que la présence, dans l'œil, de fibres propres à décomposer la lumière, ou à rendre possible la perception de ses éléments, donnerait peut-être lieu à la production constante de cette fatigue et amènerait la cécité, ou, tout au moins, l'atrophie de l'organe accessoire d'analyse dont il s'agit. La formation de celui-ci serait, dès lors, irréalisable.

DIXIÈME PARTIE.

COMPLÉMENTS.

Complément au n° 45, concernant l'explication des anomalies aux lois de Fresnel sur la réflexion vitreuse, dans le voisinage de l'angle de polarisation.

L'expression du coefficient $\Omega - \Omega_1$ de Cauchy, que nous avons obtenue (p. 393) en admettant la forme linéaire, en x, soit du carré a^2 de la vitesse de propagation de la lumière dans les divers feuillets, d'abscisse x, de la couche de transition, soit de son inverse $\frac{1}{a^2}$, est essentiellement positive quand on suppose, pour fixer les idées, $a_0 > a_1$, ou $N > 1$; car les éléments de l'intégrale définie, constituant (même p. 393) ce coefficient, ont alors tous leurs facteurs positifs. Il faudrait et il suffirait, pour que l'un de ceux-ci et, par suite, l'élément lui-même d'intégrale devinssent négatifs, que la valeur correspondante de a^2 *sortît* de l'intervalle compris entre a_0^2 et a_1^2.

L'existence de telles valeurs de a^2, supérieures à a_0^2 ou inférieures à a_1^2, ne serait peut-être pas très vraisemblable dans la couche de transition, supposée parfaitement pure, de deux corps homogènes contigus; car elle implique un mode de variation de a, en fonction de x, assez compliqué. Mais elle est, au contraire, possible et même naturelle, quand la couche séparative se trouve composée en partie plus ou moins grande de poussières ou d'autres impuretés.

Les valeurs *négatives* de $\Omega - \Omega_1$, comme Jamin en a observé un certain nombre, surtout à la surface des liquides, indiqueraient donc la présence de matières étrangères aux deux milieux ou, tout au moins, d'une mince *couche superficielle* de l'un d'eux, beaucoup plus ou beaucoup moins réfringente que l'intérieur : circonstance, après tout, assez admissible.

Complément aux nos 47 et suivants, relatifs à l'entraînement des ondes : extension du principe d'Huygens et de Fresnel, sur la construction des rayons lumineux par le moyen des surfaces d'onde courbes, aux cas où la translation du milieu transparent déforme les ondes.

I. *Légère déformation des ondes par la translation rapide du milieu, même quand il est isotrope.* — Nous avons vu (p. 399) que, lorsqu'un milieu transparent homogène est hétérotrope, les translations de ce milieu altèrent, en général, la configuration des ondes lumineuses qui s'y propagent; et l'on démontre facilement qu'il en est de même à l'intérieur d'un milieu isotrope, quand ces translations sont assez rapides pour qu'on ne puisse plus négliger, comme nous l'avons fait, dans les équations du mouvement vibratoire, les carrés et produits des composantes V_x, V_y, V_z.

Il suffit, pour le reconnaître, de considérer un système d'ondes planes latéralement indéfinies, à vibrations orientées, par exemple, suivant les y, propagé vers les x positifs dans un tel milieu isotrope. L'équation du mouvement sera (p. 397), par rapport à des axes fixes et en choisissant comme unité de longueur la vitesse de propagation $\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ de la lumière dans l'éther libre,

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + A\left(\frac{d}{dt} + V_x \frac{d}{dx}\right)^2 \eta = \frac{d^2\eta}{dx^2},$$

c'est-à-dire

$$(1+A)\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2AV_x \frac{d^2\eta}{dx\,dt} = (1 - AV_x^2)\frac{d^2\eta}{dx^2},$$

ou encore

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{2AV_x}{1+A}\frac{d^2\eta}{dx\,dt} = \frac{1-AV_x^2}{1+A}\frac{d^2\eta}{dx^2}.$$

Prenons, avec Fresnel, un axe mobile d'abscisses x' liées à x (p. 398) par la relation

$$x' = x - \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)V_x t \qquad \text{ou} \qquad x' = x - \frac{AV_x}{1+A}t;$$

ce qui revient, comme on a vu par les formules (160), à remplacer, dans l'équation du mouvement, $\frac{d}{dt}$ par $\frac{d}{dt} - \frac{AV_x}{1+A}\frac{d}{dx'}$.

L'équation deviendra, si l'on efface, pour plus de simplicité, l'accent de x',

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{2AV_x}{1+A}\frac{d^2\eta}{dx\,dt} + \frac{A^2V_x^2}{(1+A)^2}\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{2AV_x}{1+A}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\eta}{dt} - \frac{AV_x}{1+A}\frac{d\eta}{dx}\right) = \frac{1-AV_x^2}{1+A}\frac{d^2\eta}{dx^2},$$

ou bien, après des réductions évidentes,

$$(\alpha) \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{1}{1+A}\left(1 - \frac{AV_x^2}{1+A}\right)\frac{d^2\eta}{dx^2}.$$

On voit que, par rapport à l'axe mobile des x choisi, le seul qui fasse disparaître de l'équation du mouvement la dérivée oblique $\frac{d^2\eta}{dx\,dt}$ et rapproche, par suite, autant, cette équation de celle qu'on aurait dans un milieu en repos, la vitesse de propagation, devenue $\sqrt{\frac{1}{1+A}\left(1 - \frac{AV_x^2}{1+A}\right)}$, se trouve légèrement réduite; car elle est multipliée par le facteur

$$\sqrt{1 - \frac{AV_x^2}{1+A}} \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)V_x^2}.$$

Ainsi, la translation du corps raccourcit un peu les ondes d'une période donnée et altère, par conséquent, leur figure. Si nos équations continuaient à s'appliquer, quand même la vitesse de translation excéderait l'unité (*célérité* de la lumière dans le vide), les ondes cesseraient de se propager uniformément, et le phénomène subirait une transformation totale, lorsque le carré, V_x^2, de la composante de la translation suivant le sens de progression des ondes, atteindrait, puis dépas-

serait le nombre $\frac{1+A}{A}$ ou $\frac{N^2}{N^2-1}$: ce qui rendrait imaginaire la célérité, ou vitesse de propagation.

S'il s'agit, maintenant, de petites vibrations quelconques, et qu'on ait choisi l'axe des x suivant le sens de la vitesse V de translation, de manière à avoir $V_x = V$, $V_y = 0$, $V_z = 0$, les trois équations du mouvement seront de même : 1° par rapport à des axes fixes,

$$\frac{d^2(\xi,\eta,\zeta)}{dt^2} + A\left(\frac{d}{dt} + V\frac{d}{dx}\right)^2(\xi,\eta,\zeta) = \Delta_2(\xi,\eta,\zeta) - \frac{d\theta}{d(x,y,z)},$$

et, 2°, par rapport à des axes animés, suivant les x, de la vitesse $\left(1-\frac{1}{N^2}\right)V$ ou $\frac{AV}{1+A}$, axes conduisant, comme on vient de voir, à remplacer $\frac{d}{dt}$ par $\left(\frac{d}{dt} - \frac{AV}{1+A}\frac{d}{dx}\right)$ ou $\left(\frac{d}{dt} + V\frac{d}{dx}\right)$ par $\left(\frac{d}{dt} + \frac{V}{1+A}\frac{d}{dx}\right)$,

$$(\alpha_1) \qquad (1+A)\frac{d^2(\xi,\eta,\zeta)}{dt^2} = \left(\Delta_2 - \frac{AV^2}{1+A}\frac{d^2}{dx^2}\right)(\xi,\eta,\zeta) - \frac{d\theta}{d(x,y,z)}.$$

Ces trois dernières équations, différentiées respectivement en x, y, z et ajoutées, donnent, pour régir, dans le mouvement relatif des ondes, la dilatation cubique θ, la relation

$$(\alpha'_1) \qquad (1+A)\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{AV^2}{1+A}\frac{d^2\theta}{dx^2} = 0.$$

Celle-ci devient, évidemment, pour tout système d'ondes planes, où les déplacements ξ, η, ζ et, par suite, la dilatation cubique θ, sont exclusivement (ou presque exclusivement) fonction d'une variable réelle, de la forme $t - lx - my - nz$,

$$(\alpha_2) \qquad \left(1 + A + \frac{AV^2}{1+A}l^2\right)\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0;$$

d'où il résulte, comme on sait, $\theta = 0$, dans les catégories de phénomènes que nous étudions. Les vibrations sont donc transversales; car, annuler l'expression de θ, qui est ici $-l\frac{d\xi}{dt} - m\frac{d\eta}{dt} - n\frac{d\zeta}{dt}$ ou, à un facteur constant près, la composante de la vitesse vibratoire suivant la normale aux ondes, c'est écrire que les atomes d'éther se déplacent dans les plans d'onde.

Dès lors, ξ, η, ζ se séparant dans les trois équations (α_1) du mouvement, celles-ci se réduisent, pour les ondes planes considérées, après suppression de la dérivée seconde en t de ξ, η ou ζ, facteur commun, à la relation unique

$$1 + A = l^2 + m^2 + n^2 - \frac{AV^2}{1+A}l^2 = \frac{1}{\omega^2}\left(1 - \frac{AV^2\cos^2\alpha}{1+A}\right):$$

ω y désigne la vitesse de propagation des ondes suivant leur normale, et $V\cos\alpha$ la projection, sur celle-ci, de la vitesse translatoire V du corps. Le carré de la vitesse de propagation reste donc $\frac{1}{1+A}$, ou n'est pas modifié, pour les ondes pa-

rallèles à la translation; mais il se trouve réduit, comme on a vu, à

$$\frac{1}{1+A}\left(1-\frac{AV^2}{1+A}\right),$$

pour les ondes qui lui sont perpendiculaires.

La relation entre les trois paramètres, l, m, n, de l'équation $lx+my+nz=t_0$ d'une onde, est ainsi du second degré, et homogène dans ses termes variables; d'où l'on déduit que la surface d'onde courbe, enveloppe des ondes planes de toute direction passées simultanément à l'origine, est un ellipsoïde ([1]).

Ses demi-axes perpendiculaires aux x, ou à la translation V, sont évidemment les vitesses maxima $\frac{1}{\sqrt{1+A}}$ de propagation; et son demi-axe, dirigé suivant la translation ou en sens inverse, est la vitesse minima $\frac{1}{\sqrt{1+A}}\sqrt{1-\frac{AV^2}{1+A}}$. L'ellipsoïde a donc pour équation

$$\frac{x^2}{1-\frac{AV^2}{1+A}}+y^2+z^2=\frac{1}{1+A}.$$

Ainsi, l'onde courbe est aplatie par le mouvement du corps. Elle le serait même infiniment, ou se changerait en un simple *disque*, *touché* par les ondes planes de toute direction suivant son *contour circulaire*, *où aboutiraient alors tous les rayons lumineux* émanés du centre, si la vitesse V atteignait la valeur $\sqrt{\frac{1+A}{A}}$. Au delà, c'est-à-dire pour les valeurs de V encore plus grandes, le disque se changerait, comme le montre la même équation de l'onde, en un hyperboloïde de révolution à une nappe, ouvert dans les deux sens des x positifs et des x négatifs. Et il n'y aurait d'ondes planes possibles (à propagation uniforme) que suivant les directions de ses plans tangents, c'est-à-dire suivant les plans dont l'angle avec l'axe de révolution ou le sens de la translation serait moindre que la demi-ouverture du cône asymptote à l'hyperboloïde.

Dans tous les cas, l'onde n'ayant qu'une seule nappe, qu'un seul plan tangent, tout au plus, parallèle, d'un même côté du centre, à un plan quelconque mené par ce centre, il y a hétérotropie du milieu en mouvement (avec isotropie autour de l'axe des x), mais *sans biréfringence*, ni *polarisation*. En effet, la vitesse ω n'a, au plus, qu'une valeur absolue pour chaque valeur α de l'angle de la normale aux ondes avec l'axe des x; et, *sur leurs plans*, la vibration peut se faire indifféremment dans tous les azimuts.

II. *Lois des ondes planes, latéralement indéfinies, dans un corps transparent hétérotrope animé d'une translation rapide, et même dans tout milieu vibrant dont les équations de mouvement sont linéaires aux dérivées partielles, du second ordre et homogènes quant à l'ordre des dérivées.* — Passons maintenant au cas d'un milieu naturellement hétérotrope animé d'une translation V à composantes V_x, V_y, V_z; et demandons-nous ce qui, dans la même hypothèse

---

([1]) *Voir*, par exemple, le Tome I, consacré au *Calcul différentiel*, de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (second fascicule : *Compléments*, p. 227*).

d'extrême exactitude de nos équations, subsiste des lois simples des ondes planes, quand on tient compte du pouvoir biréfringent du milieu et des carrés ou produits de V_x, V_y, V_z, mais qu'on néglige la dispersion, l'absorption et le pouvoir rotatoire. Par rapport à des axes, soit fixes, soit animés eux-mêmes d'une translation uniforme quelconque, les trois équations en ξ, η, ζ aux dérivées partielles seront encore linéaires, homogènes du second ordre (c'est-à-dire affectées, dans chacun de leurs termes, d'une des dérivées secondes de ξ, η, ζ en t, x, y ou z), et enfin, à coefficients constants. Ne leur attribuons pas actuellement d'autres caractères que ceux-là.

Si, d'abord, nos ondes planes sont latéralement indéfinies et d'amplitude uniforme, ou à déplacements ξ, η, ζ fonctions uniquement de l'expression linéaire $t-lx-my-nz$, les mouvements pourront être rectilignes, ou consister en déplacements δ à cosinus directeurs (l', m', n') communs et invariables; ce qui donnera, l', m', n' étant constants et f désignant une fonction arbitraire,

$$(\alpha')\quad \xi = l'\delta,\qquad \eta = m'\delta,\qquad \zeta = n'\delta,\qquad \text{avec}\qquad \delta = f(t-lx-my-nz).$$

Effectivement, appelons δ', δ'', ... les dérivées successives de δ par rapport à sa variable $t-lx-my-nz$ ou, en conséquence, par rapport au temps t : l'on aura, pour δ et ses dérivées, les formules symboliques de différentiation

$$\frac{d}{d(x,y,z)} = -(l,m,n)\frac{d}{dt},$$

c'est-à-dire, notamment,

$$\frac{d\delta}{d(x,y,z)} = -(l,m,n)\delta',\qquad \frac{d^2\delta}{d(x,y,z)\,d(x,y,z)} = (l,m,n)(l,m,n)\delta'';$$

et, en désignant par φ, χ, ψ, φ_1, χ_1, ψ_1, φ_2, χ_2, ψ_2 les polynomes respectifs du second degré en l, m, n que donne la substitution de $-l$, $-m$, $-n$ à $\frac{d}{d(x,y,z)}$ dans les termes en ξ, η ou ζ des trois équations du mouvement, après transposition à leurs premiers membres de tous les termes des seconds membres, ces trois équations deviendront, au facteur commun près δ'',

$$(\alpha'')\quad \varphi l' + \chi m' + \psi n' = 0,\qquad \varphi_1 l' + \chi_1 m' + \psi_1 n' = 0,\qquad \varphi_2 l' + \chi_2 m' + \psi_2 n' = 0.$$

Leur compatibilité exigera simplement l'annulation du déterminant des neuf éléments φ, χ, ψ, φ_1, χ_1, ψ_1, φ_2, χ_2, ψ_2; ce qui donne une équation du sixième degré en l, m, n assignant, comme nous savons, pour chaque direction des plans d'onde, c'est-à-dire, pour chaque système donné des rapports mutuels de l, m, n, certaines vitesses ω de propagation des ondes, vitesses inverses du radical $\sqrt{l^2+m^2+n^2}$. Après quoi, l', m', n' seront entre eux comme des déterminants partiels λ, μ, ν formés encore avec les mêmes neuf éléments et, par suite, fonctions entières de l, m, n.

Les considérations du bas de la page 298 s'appliqueraient ici, quand l'équation en ω aurait trois racines positives, pour permettre de résoudre un mode d'ébranlement quelconque, s'exerçant de la même manière sur toute l'étendue d'une couche plane du milieu, en trois modes *simples*, où les vibrations seraient *rectilignes* et la propagation uniforme.

Si une racine ω est réelle quels que soient les rapports mutuels de l, m, n, des ondes planes de toute direction, passées par l'origine des coordonnées depuis un

même temps t_0, auront pour équation

$$(\alpha''') \qquad lx + my + nz = t_0.$$

Leur enveloppe, obtenue en faisant varier l, m, n, constituera sensiblement, comme on voit par le n° 23 (p. 316), une onde courbe, émanée de l'origine depuis le même temps t_0 et qui offrirait, en chaque endroit (x, y, z), les mêmes caractères, à très peu près, que ces ondes planes. Chacun de ses rayons, de direction donnée, croît proportionnellement à t_0; car l'équation des enveloppées contient seulement, avec l, m, n, les rapports $\frac{(x, y, z)}{t_0}$.

III. *Relation, dans le même cas très général, entre la direction d'ondes planes latéralement limitées et le sens de leur propagation.* — Il y a lieu de voir si, comme dans le cas d'un milieu transparent homogène en repos (p. 306), un faisceau de lumière parallèle, ou constitué par des ondes planes *limitées latéralement,* aura son axe dirigé suivant le rayon aboutissant, dans l'onde courbe, au point de contact du plan tangent qui leur est parallèle.

Or, dans un système d'ondes planes *latéralement* limitées, *peu différent,* en chaque endroit (x, y, z), d'un système latéralement indéfini, la composante δ, suivant la direction fixe (l', m', n'), des déplacements, dépend surtout de $t - lx - my - nz$, ou n'a que des variations *lentes* avec x, y, z quand la *variable principale* $t - lx - my - nz$ ne change pas. En outre, les différences $\xi - l'\delta$, $\eta - m'\delta$, $\zeta - n'\delta$ n'y sont que de *petits* écarts, fonctions encore, *principalement,* de la variable $t - lx - my - nz$, et, par suite, à variations insensibles ou négligeables, d'un ordre de petitesse supérieur, quand x, y, z varient sans que cette variable change. On peut donc, écrivant, pareillement à ce qu'on a fait au n° 18 (p. 303),

$$(\beta) \qquad \xi = l'\delta + \varepsilon, \qquad \eta = m'\delta + \varepsilon_1, \qquad \zeta = n'\delta + \varepsilon_2,$$

regarder ε, ε_1, ε_2 comme fonctions seulement de la variable principale, ou, par suite, comme donnant en tout, dans les premiers membres des équations de mouvement, les termes, analogues aux premiers membres de (α'') multipliés par δ'',

$$(\beta_1) \qquad \varphi\varepsilon'' + \chi\varepsilon_1'' + \psi\varepsilon_2'', \qquad \varphi_1\varepsilon'' + \chi_1\varepsilon_1'' + \psi_1\varepsilon_2'', \qquad \varphi_2\varepsilon'' + \chi_2\varepsilon_1'' + \psi_2\varepsilon_2''.$$

Mais les termes fournis par les trois produits $(l', m', n')\,\delta$ seront plus complexes; car, pour différentier δ en x, y, z, on aura, comme nous savons, les formules symboliques

$$\frac{d}{d(x, y, z)} = -(l, m, n)\frac{d}{dt} + \frac{\partial}{\partial(x, y, z)},$$

et, par suite, toujours en négligeant les dérivées secondes $\frac{\partial^2}{\partial(x, y, z)\,\partial(x, y, z)}$:

$$\frac{d^2\delta}{dx\,dt} = \frac{d\delta'}{dx} = -l\delta'' + \frac{\partial\delta'}{\partial x} = -\left(l - \frac{1}{\delta''}\frac{\partial\delta'}{\partial x}\right)\delta'',$$

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = l^2\delta'' - 2l\frac{\partial\delta'}{\partial x} = \left(l - \frac{1}{\delta''}\frac{\partial\delta'}{\partial x}\right)^2\delta'',$$

$$\frac{d^2\delta}{dx\,dy} = lm\,\delta'' - l\frac{\partial\delta'}{\partial y} - m\frac{\partial\delta'}{\partial x} = \left(l - \frac{1}{\delta''}\frac{\partial\delta'}{\partial x}\right)\left(m - \frac{1}{\delta''}\frac{\partial\delta'}{\partial y}\right)\delta'', \qquad \ldots$$

Bref, chaque dérivée partielle seconde de δ diffère de son expression, relative

au cas d'une onde plane latéralement indéfinie, par la substitution à $l, m, n,$ dans cette expression, de l, m, n accrus respectivement de la différentielle *fictive*

$$(\beta') \qquad \partial(l, m, n) = -\frac{1}{\delta''}\frac{\partial\delta'}{\partial(x, y, z)}.$$

Et si $\partial\varphi, \partial\chi, \partial\psi, \ldots$ désignent les différentielles correspondantes des polynomes $\varphi, \chi, \psi, \ldots$, les premiers membres de (α'') seront, de ce chef, accrus, après division par δ'', de

$$l'\,\partial\varphi + m'\,\partial\chi + n'\,\partial\psi, \qquad l'\,\partial\varphi_1 + m'\,\partial\chi_1 + n'\,\partial\psi_1, \qquad l'\,\partial\varphi_2 + m'\,\partial\chi_2 + n'\,\partial\psi_2.$$

En tout, les équations du mouvement deviendront donc (après division par δ'') pour un système d'ondes planes latéralement limitées, et en supprimant les termes $l'\varphi, \ldots, n'\psi_2$ qui se neutralisent en vertu de (α'') :

$$(\beta'') \qquad \begin{cases} \frac{\varepsilon''}{\delta''}\varphi + \frac{\varepsilon''_1}{\delta''}\chi + \frac{\varepsilon''_2}{\delta''}\psi + l'\,\partial\varphi + m'\,\partial\chi + n'\,\partial\psi = 0, \\ \frac{\varepsilon''}{\delta''}\varphi_1 + \frac{\varepsilon''_1}{\delta''}\chi_1 + \frac{\varepsilon''_2}{\delta''}\psi_1 + l'\,\partial\varphi_1 + m'\,\partial\chi_1 + n'\,\partial\psi_1 = 0, \\ \frac{\varepsilon''}{\delta''}\varphi_2 + \frac{\varepsilon''_1}{\delta''}\chi_2 + \frac{\varepsilon''_2}{\delta''}\psi_2 + l'\,\partial\varphi_2 + m'\,\partial\chi_2 + n'\,\partial\psi_2 = 0. \end{cases}$$

Appelons, comme dans la Note des pages 472 à 476, λ', μ', ν' les trois polynomes en l, m, n vérifiant les équations, à même déterminant que le système (α'') et dès lors compatibles aussi :

$$\varphi\lambda' + \varphi_1\mu' + \varphi_2\nu' = 0, \qquad \chi\lambda' + \chi_1\mu' + \chi_2\nu' = 0, \qquad \psi\lambda' + \psi_1\mu' + \psi_2\nu' = 0.$$

Alors les équations (β''), respectivement multipliées par λ', μ', ν' et ajoutées, donneront

$$l'(\lambda'\partial\varphi + \mu'\partial\varphi_1 + \nu'\partial\varphi_2) + m'(\lambda'\partial\chi + \mu'\partial\chi_1 + \nu'\partial\chi_2) \\ + n'(\lambda'\,\partial\psi + \mu'\,\partial\psi_1 + \nu'\,\partial\psi_2) = 0,$$

c'est-à-dire, par la substitution à $\partial\varphi, \partial\varphi_1, \ldots$ de leurs développements

$$\frac{d\varphi}{dl}\,\partial l + \frac{d\varphi}{dm}\,\partial m + \frac{d\varphi}{dn}\,\partial n, \ldots,$$

puis, à $\partial(l, m, n)$, de leurs valeurs $-\frac{1}{\delta''}\frac{\partial\delta'}{\partial(x, y, z)}$, et après suppression finale du facteur $-\frac{1}{\delta''}$:

$$(\beta''') \qquad \begin{cases} \left[l'\left(\lambda'\frac{d\varphi}{dl} + \mu'\frac{d\varphi_1}{dl} + \nu'\frac{d\varphi_2}{dl}\right) + m'\left(\lambda'\frac{d\chi}{dl} + \ldots\right)\right. \\ \qquad\qquad \left. + n'\left(\lambda'\frac{d\psi}{dl} + \ldots\right)\right]\frac{\partial\delta'}{\partial x} + \ldots = 0. \end{cases}$$

Multiplions par dt et intégrons, sur place, soit à partir d'un instant où le déplacement δ était nul dans la région (x, y, z), soit, s'il s'agit de mouvements périodiques, de manière que la valeur moyenne de δ durant une période soit nulle en chaque point (x, y, z). De plus, remplaçons les cosinus directeurs l', m', n' du déplacement principal δ par les polynomes proportionnels en l, m, n appelés λ, μ, ν; et désignons enfin par P, Q, R, comme dans la question analogue de la

note citée (p. 475), ce que deviennent alors dans (β'') les quantités entre crochets. Nous aurons

$$(\gamma) \qquad P\frac{\partial\delta}{\partial x} + Q\frac{\partial\delta}{\partial y} + R\frac{\partial\delta}{\partial z} = 0.$$

Or, les équations (α''), où l'on substituera de même λ, μ, ν à l', m', n', pourront se traiter comme l'ont été à la page 475 les équations (γ) de la page 474, pour donner, entre les variations élémentaires de l, m, n dans l'équation finale en l, m, n, la relation aux différentielles totales

$$(\gamma') \qquad P\,dl + Q\,dm + R\,dn = 0.$$

L'on en déduira pareillement l'identité de la direction (x, y, z) du rayon r aboutissant, dans l'onde courbe, au point de contact de celle-ci et de l'onde plane enveloppée que l'on donne, avec la direction (P, Q, R) suivant laquelle se fait la propagation du mouvement.

Donc, *même dans le cas d'ondes planes isolées ou non périodiques*, d'étendue restreinte, le rayon instantané correspondant se construira, au moyen d'une onde courbe enveloppe d'ondes planes de toute direction, par la règle d'Huygens et de Fresnel, comme si les mouvements y étaient pendulaires (p. 476). Mais nous nous bornons ici à des équations de mouvement homogènes du second ordre par rapport aux dérivées partielles des déplacements ξ, η, ζ en x, y, z, t.

Grâce à la condition (γ), une fois vérifiée, les équations (β'') se réduisent à deux distinctes; et celles-ci, jointes à la relation supplémentaire,

$$l'\varepsilon + m'\varepsilon_1 + n'\varepsilon_2 = 0,$$

exprimant que δ est la composante effective des déplacements suivant la direction fixe (l', m', n'), détermineront complètement les trois petits écarts ε, ε_1, ε_2, quel que soit le mode *lent*, donné, de variation de δ d'un point à l'autre de l'onde plane en question.

IV. — *Extension, au même cas, de la construction d'Huygens pour les rayons réfléchis et réfractés issus d'un rayon incident donné.* — Comme les considérations du n° 48 (p. 402) montrent que les quatre équations définies ordinaires, relatives à la continuité des rotations moyennes et des déplacements tangentiels, continuent à s'appliquer aux surfaces séparatives de deux milieux homogènes animés d'une translation commune, il en résulte que la construction d'Huygens pour les rayons réfléchis et réfractés (p. 364) subsistera sans modification, à la condition d'adopter, bien entendu, les figures d'ondes courbes enveloppant effectivement, dans l'espace relatif lié aux axes coordonnés choisis, les ondes planes de toute direction ([1]).

([1]) Au début de cette démonstration (p. 402) des conditions de continuité à la limite commune de deux corps en mouvement, j'aurais pu observer que les dérivées premières et secondes $\frac{d(\xi,\eta,\zeta)}{dt}$, $\frac{d^2(\xi,\eta,\zeta)}{dt^2}$, calculées dans le système d'axes mobiles liés à ces corps, restent finies bien qu'elles soient non plus des vitesses ou des accélérations, mais seulement des dérivées des déplacements vibratoires prises par rapport au temps, à l'intérieur de la couche de transition, en la suivant dans sa translation rapide; car ces déplacements vibratoires ξ, η, ζ de

Je suppose ici, implicitement, que ces conditions de continuité, quoique équivalant en tout à *quatre* relations distinctes seulement, au lieu de *six* ordinairement nécessaires quand il y a trois fonctions inconnues ξ, η, ζ, suffiront néanmoins, par leur adjonction aux trois équations indéfinies du mouvement dans chaque milieu, à déterminer la suite des états physiques résultant d'un état initial donné.

Cela résulte de la marche suivie au n° 31 (p. 342 à 345), et qu'on suivrait de même ici, pour extraire, des trois équations indéfinies, considérées dans la couche de transition, six conditions définies, en lesquelles ces équations indéfinies se condensent, pour ainsi dire. Ayant considéré d'abord, à part, chacune des deux dernières équations indéfinies, nous en avons déduit, par deux intégrations successives suivant l'épaisseur de la couche, deux de nos quatre équations de continuité et, par conséquent, au total, les *quatre,* qui sont évidemment tout ce que les deux équations dont il s'agit pouvaient, *à elles seules,* nous donner. Après quoi, soit de la première équation indéfinie, soit de l'ensemble des trois, nous avons extrait deux autres conditions, mais en reconnaissant qu'elles résultaient des précédentes, combinées avec les équations indéfinies prises dans les deux milieux contigus, ou sans aucun nouveau recours à la couche de transition; et tout cela, à raison de la forme des seconds membres de toutes ces équations indéfinies, réduite par l'hypothèse de la transversalité des vibrations dans l'éther libre. Or les mêmes circonstances se produiront ici, sauf une plus grande complication des formules et plus de difficulté, sinon même l'impossibilité, en général, d'intégrer deux fois par rapport au temps, les relations analogues à (91) ou à la première du n° 3 (p. 272). Au résumé, les conditions résultant, dans la couche de transition, de l'adjonction de la première équation indéfinie aux deux autres, ne constitueront que des conditions définies *surabondantes.*

Ce fait peut se reconnaître d'une autre manière, plus directe peut-être, quand les deux milieux contigus sont isotropes, cas où l'on a vu ci-dessus (p. 565) que la dilatation cubique θ est nulle, ou que les déplacements, *là où ils varient graduellement avec x, y, z,* se font à très peu près dans les plans d'onde. Dès lors, en effet, une des trois composantes ξ, η, ζ du déplacement résulte, en fonction des deux autres, de la relation

$$l\xi + m\eta + n\zeta = 0;$$

et, quand les plans d'onde sont *donnés* soit explicitement, soit implicitement, il ne faut pas plus de conditions définies, ou relatives à une surface limite, que si l'on avait à déterminer *deux seulement* de ces trois fonctions. Ainsi l'on conçoit que quatre conditions, au lieu de six, suffisent bien.

Pour savoir s'il en est de même dans le cas de corps hétérotropes, formons la relation qui remplace alors celle, $\theta = 0$, du cas particulier précédent. Les trois équations du mouvement, en y appelant, d'une part, A, B, C, D, E, F les six coefficients de résistance de la matière pondérable, d'autre part, α, β, γ les composantes de la vitesse de translation des axes, et α', β', γ' les différences respec-

---

l'éther ne cessent pas d'être finis (et même très petits comme ailleurs) au sein de la couche en question : ce qui ne permettrait pas d'y supposer infinie, *d'une manière continue,* une dérivée de ξ, η, ζ par rapport au temps, quelle qu'elle soit.

tives $\alpha - V_x$, $\beta - V_y$, $\gamma - V_z$, seront, comme on a vu (p. 401),

$$\left(\frac{d}{dt} - \alpha\frac{d}{dx} - \beta\frac{d}{dy} - \gamma\frac{d}{dz}\right)^2\xi$$
$$+\left(\frac{d}{dt} - \alpha'\frac{d}{dx} - \beta'\frac{d}{dy} - \gamma'\frac{d}{dz}\right)^2(A\xi + F\eta + E\zeta) = \Delta_2\xi - \frac{d\theta}{dx}, \quad \cdots$$

Or ces équations, différentiées respectivement en x, y, z et ajoutées, donnent, entre les dérivées de ξ, η, ζ, la relation

$$\left(\frac{d}{dt} - \alpha\frac{d}{dx} - \cdots\right)^2\theta + \left(\frac{d}{dt} - \alpha'\frac{d}{dx} - \cdots\right)^2\left[A\frac{d\xi}{dx} + \cdots + D\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) + \cdots\right] = 0,$$

c'est-à-dire, dans le cas d'ondes planes où ξ, η, ζ sont fonction de $t - lx - my - nz$,

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[(1 + \alpha l + \beta m + \gamma n)^2\theta + (1 + \alpha' l + \cdots)^2\left(A\frac{d\xi}{dx} + \cdots\right)\right] = 0,$$

et, par suite, vu la nature des mouvements (propagés d'ailleurs ou périodiques) que nous étudions ici,

$$(1 + \alpha l + \cdots)^2\theta + (1 + \alpha' l + \cdots)^2\left[A\frac{d\xi}{dx} + \cdots + D\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right) + \cdots\right] = 0.$$

Telle est donc la relation linéaire et homogène cherchée entre les dérivées premières de ξ, η, ζ en x, y, z. Or, pour les ondes en question, elle devient évidemment, en changeant tous les signes,

$$(1 + \alpha l + \cdots)^2(l\xi' + m\eta' + n\zeta') + (1 + \alpha' l + \cdots)^2(Al\xi' + \cdots) = 0,$$

ou même, après multiplication par dt et intégration sur place (relative),

$$(\gamma_1) \qquad (1 + \alpha l + \cdots)^2(l\xi + m\eta + n\zeta) + (1 + \alpha' l + \cdots)^2(Al\xi + \cdots) = 0.$$

C'est bien une équation du premier degré entre ξ, η et ζ; mais, alors même qu'on choisisse pour les trois axes coordonnés les directions rectangulaires annulant D, E, F, la vitesse de propagation ω y figure, en tant que facteur commun à l, m, n ne s'éliminant pas par division, à moins qu'on n'ait soit $A = B = C$, c'est-à-dire un milieu isotrope, soit $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$, c'est-à-dire un milieu en repos. Or, comme la vitesse ω de propagation varie, pour les plans d'onde donnés, avec la direction de la vibration, l'équation (γ_1) ne permet plus d'assigner, en chaque point (x, y, z), un plan *unique* où cette direction soit contenue. Néanmoins, elle paraît continuer à déterminer implicitement une des trois composantes ξ, η, ζ du déplacement en fonction des deux autres; ou, ce qui revient au même, elle semble bien permettre de décomposer tous les mouvements vibratoires possibles en deux systèmes seulement de vibrations rectilignes, ayant leurs directions respectives parfaitement déterminées, et n'introduisant ainsi dans la question, comme fonctions inconnues de $t - lx - my - nz$, que leurs deux *élongations*. Car, si cette équation (γ_1) était compatible, en général, avec plus de deux directions, *dans l'intérieur du corps*, pour les vibrations d'ondes planes d'orientation donnée, la troisième de ces directions continuerait à y satisfaire même à la limite $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$, $\gamma' = 0$, c'est-à-dire dans le corps en repos. Or l'on a vu, au n° 14 (p. 292), que cette troisième direction, alors existante en effet, normale aux plans d'onde ou correspondant à des vibrations longitudinales,

échappe à l'équation (γ_1), faute d'une vitesse de propagation ω différente de zéro, qui lui permette de se produire dans l'intérieur des corps (¹).

V. — *Loi de variation des déplacements dans les ondes émanées d'un centre : cas où les fonctions* ξ, η, ζ *se séparent dans les équations du mouvement.* — Etudions enfin, comme au n° 24 (p. 319 à 323), le mode de variation des déplacements ξ, η, ζ, pour les ondes courbes émanées de l'origine. Alors, dans la variable principale $t - t_0$ des expressions (β) de ξ, η, ζ, le temps, t_0, qu'emploient les ondes à venir de l'origine au point (x, y, z), a toujours la même valeur, $lx + my + nz$, que pour l'onde plane qui leur est tangente en (x, y, z). Et il a aussi, par suite, les mêmes dérivées premières l, m, n par rapport à x, y, z, en raison des deux relations, vérifiées identiquement en tous les points de l'onde courbe enveloppe,

$$dt_0 = d(lx + my + nz), \qquad x\,dl + y\,dm + z\,dn = 0,$$

lesquelles donnent $l\,dx + m\,dy + n\,dz$ comme différentielle totale de la fonction t_0. Mais l, m, n et, par suite, l', m', n', seront des fonctions lentement variables de x, y, z ou, plutôt, de leurs rapports mutuels : il viendra donc, par exemple,

$$\frac{d\xi}{dx} = -l\xi' + \frac{\partial \xi}{\partial x}, \qquad \frac{d^2\xi}{dx^2} = l^2\xi'' - 2l\frac{\partial \xi'}{\partial x} - \xi'\frac{\partial l}{\partial x},$$

et encore $\Bigg($vu que l'on aura des relations d'intégrabilité comme

$$\left.\frac{d^2 t_0}{dx\,dy} = \frac{dl}{dy} = \frac{dm}{dx}\right),$$

$$\frac{d^2\xi}{dx\,dy} = lm\xi'' - l\frac{\partial \xi'}{\partial y} - m\frac{\partial \xi'}{\partial x} - \xi'\frac{\partial l}{\partial y}$$
$$= lm\xi'' - l\frac{\partial \xi'}{\partial y} - m\frac{\partial \xi'}{\partial x} - \frac{\xi'}{2}\left(\frac{\partial l}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial x}\right),$$

Les dérivées premières complètes de ξ, η, ζ en x, y, z conservent leur forme du cas des ondes planes, mais les dérivées secondes respectives

$$\frac{d^2\xi}{(dx^2, dy^2, dz^2, dy\,dz, dz\,dx, dx\,dy)}$$

(¹) On remarquera que l'équation (α'_1) (p. 565), par laquelle la dilatation cubique se trouve régie dans un milieu isotrope, et, de même, l'équation (γ_1) ci-dessus, sont dans le genre de l'équation (133) (p. 381), ou qu'elles rendent possibles des *ondes évanescentes* (*avec condensations et dilatations cubiques en cas d'isotropie*), dès que la vitesse translatoire V n'est pas nulle. On pourrait donc, s'il y avait lieu, se servir de pareilles ondes évanescentes, pour vérifier, à la surface séparative de deux milieux, six relations distinctes, comme, par exemple, les relations (142) du n° 42 (p. 384), ou d'autres analogues. De telles conditions, linéaires, permettraient toujours, évidemment, d'obtenir par la construction d'Huygens les rayons réfléchis et réfractés, pourvu que chacune d'elles fût *homogène,* quant à l'ordre des dérivées y figurant, et même sans cela pour les solutions, représentatives de mouvements pendulaires, dérivées des solutions symboliques de Cauchy, à exponentielle imaginaire commune. En effet, une telle exponentielle rend, en quelque sorte, homogènes toutes nos équations linéaires à coefficients constants.

acquièrent en plus les termes

$$-\frac{\xi'}{2}\left(2\frac{\partial l}{\partial x},\ 2\frac{\partial m}{\partial y},\ 2\frac{\partial n}{\partial z},\ \frac{\partial m}{\partial z}+\frac{\partial n}{\partial y},\ \frac{\partial n}{\partial x}+\frac{\partial l}{\partial z},\ \frac{\partial l}{\partial y}+\frac{\partial m}{\partial x}\right).$$

Par suite, la partie de la première équation du mouvement où figure le déplacement ξ aura, à côté du terme principal $\varphi\xi''$, ou $\varphi(l'\delta''+\varepsilon'')$, des termes en $\frac{\partial(\xi', l, m, n)}{\partial(x, y, z)}$. Soit, pour fixer les idées, $\varphi = \mathrm{a} - \mathrm{b}\,l - \ldots + \mathrm{c}\,l^2 + \ldots + \mathrm{d}\,nl + \mathrm{e}\,lm$, ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{a}\frac{d^2\xi}{dt^2}+\mathrm{b}\frac{d^2\xi}{dx\,dt}+\ldots+\mathrm{c}\frac{d^2\xi}{dx^2}+\ldots+\mathrm{d}\frac{d^2\xi}{dz\,dx}+\mathrm{e}\frac{d^2\xi}{dx\,dy},$$

cette partie, en ξ, de la première équation du mouvement. Elle deviendra visiblement

$$(\mathrm{a}-\mathrm{b}l-\ldots+\mathrm{c}l^2+\ldots+\mathrm{d}nl+\mathrm{e}lm)\,\xi''-(-\mathrm{b}+2\mathrm{c}l+\mathrm{c}m+\mathrm{d}n)\frac{\partial\xi'}{\partial x}-\ldots$$
$$-\frac{\xi'}{2}\left[\frac{\partial(-\mathrm{b}+2\mathrm{c}l+\mathrm{e}m+\mathrm{d}n)}{\partial x}+\ldots\right],$$

c'est-à-dire,

$$\varphi\xi''-\left(\frac{d\varphi}{dl}\frac{d\xi'}{dx}+\frac{d\varphi}{dm}\frac{\partial\xi'}{\partial y}+\frac{d\varphi}{dn}\frac{\partial\xi'}{\partial z}\right)-\frac{\xi'}{2}\left(\frac{\partial\frac{d\varphi}{dl}}{\partial x}+\frac{\partial\frac{d\varphi}{dm}}{\partial y}+\frac{\partial\frac{d\varphi}{dn}}{\partial z}\right),$$

et, multipliée, puis divisée, par $2\xi'$,

$$(\gamma'')\qquad \frac{1}{2\xi'}\left[(\xi'^2)'\varphi-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\varphi}{dl}\xi'^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\varphi}{dm}\xi'^2\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\varphi}{dn}\xi'^2\right)\right].$$

Cela posé, pour traiter d'abord le cas le plus simple, supposons les fonctions ξ, η, ζ séparées dans les équations de mouvement, la première de celles-ci ne contenant, par exemple, que ξ. Alors les polynomes χ, ψ seront nuls; et l'équation en l, m, n sera simplement $\varphi = 0$, du moins en ce qui concerne le déplacement ξ. L'expression (γ''), égalée à zéro, donnera donc

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\varphi}{dl}\xi'^2\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\varphi}{dm}\xi'^2\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{d\varphi}{dn}\xi'^2\right)=0,$$

ou bien, en observant que les dérivées $\frac{d\varphi}{d(l, m, n)}$, entre elles comme x, y, z, sont les produits respectifs des cosinus directeurs $\frac{(x, y, z)}{r}$ du rayon r par une fonction $\varkappa$ des mêmes cosinus, invariable tout le long du rayon,

$$(\gamma''')\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{x\xi'^2}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{y\xi'^2}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{z\xi'^2}{r}\right)=0.$$

En traitant cette équation comme l'équation analogue en F du n° 24 (p. 322), on reconnaît qu'elle exprime simplement la proportionnalité inverse de la fonction ξ' à la distance r, le long de chaque rayon r considéré en particulier, quand d'ailleurs la variable principale $t - t_0$ ne change pas; et une intégration *sur place* de $\xi'dt$ montre ensuite que le *déplacement* ξ, *dans chaque onde suivie le long d'un même rayon, est lui-même en raison inverse de r.*

L'équation (γ''') exprime ainsi, évidemment, la conservation, par chaque onde, de sa force-vive suivant les x, le long de tout rayon émané du centre des ébranlements.

Le cas où les trois inconnues ξ, η, ζ se séparent effectivement dans les trois équations du mouvement et où, par suite, trois seulement des neuf polynomes φ, χ, ψ, ..., ψ_2 diffèrent de zéro, savoir φ, χ_1, ψ_2, se trouve réalisé pour un milieu transparent *isotrope* animé d'une translation rapide. Car, alors, l'équation (α_2) (p. 565), vérifiée *à une première approximation*, même dans les ondes courbes, montre que θ est une fonction très petite, de l'ordre de celles dont les dérivées par rapport à la variable principale sont seules sensibles; ce qui réduit encore à (α_2) l'équation (α'_1) en θ, même à la deuxième approximation, et continue, par suite, à y donner $\theta = 0$. Il ne reste, dès lors, quels que soient les axes coordonnés, ou fixes, ou animés d'une translation uniforme, que ξ dans la première équation du mouvement, η dans la deuxième et ζ dans la troisième.

VI. — *Cas général; équation aux dérivées partielles régissant le déplacement principal* δ. — Supposons maintenant que chaque équation du mouvement contienne à la fois ξ, η et ζ. L'on aura, pour ces trois inconnues, les formules (β) (p. 568), avec l, m, n et, par suite, l', m', n', fonctions lentement variables de x, y, z, et avec de petits termes correctifs ε, ε_1, ε_2 n'ayant de sensibles que leurs dérivées principales, relatives à la variable $t - t_0$.

Ces termes donneront donc seulement les expressions (β_1) (p. 568) aux premiers membres des équations de mouvement.

Quant à la partie principale de ξ, qui est $l'\delta$, elle y donnera visiblement des expressions analogues à (γ''), sauf substitution de $l'\delta$ à ξ et, par suite, de $l'\delta'$ à ξ' et de $l'^2(\delta'^2)'$ ou $2l'^2\delta'\delta''$ à $(\xi'^2)'$. Ainsi, la partie en $l'\delta$ de la première équation du mouvement sera

$$\frac{1}{2l'\delta'}\left[2l'^2\delta'\delta''\varphi - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d\varphi}{dl}l'^2\delta'^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{d\varphi}{dm}l'^2\delta'^2\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}l'^2\delta'^2\right)\right],$$

ou bien, en multipliant par $-2\delta'$ et dédoublant $l'^2\delta'^2$ en $l'(l'\delta'^2)$,

$$-2\delta' l'\delta''\varphi + \frac{\partial.\frac{d\varphi}{dl}l'\delta'^2}{\partial x} + \frac{\partial.\frac{d\varphi}{dm}l'\delta'^2}{\partial y} + \frac{\partial.\frac{d\varphi}{dn}l'\delta'^2}{\partial z}$$
$$+\delta'^2\left(\frac{d\varphi}{dl}\frac{\partial l'}{\partial x} + \frac{d\varphi}{dm}\frac{\partial l'}{\partial y} + \frac{d\varphi}{dn}\frac{\partial l'}{\partial z}\right).$$

Les termes en $m'\delta$, $n'\delta$ donneront des expressions analogues; et la première équation du mouvement sera, en tout, après suppression des termes en $l'\varphi$, $m'\chi$, $n'\psi$, se neutralisant en vertu de la première relation (α'') (p. 567) :

$$(\theta)\quad \begin{cases} -2\delta'(\varphi\varepsilon''+\chi\varepsilon''_1+\psi\varepsilon''_2) + \dfrac{\partial.\left(l'\dfrac{d\varphi}{dl}+m'\dfrac{d\chi}{dl}+n'\dfrac{d\psi}{dl}\right)\delta'^2}{\partial x} \\ +\dfrac{\partial.\left(l'\dfrac{d\varphi}{dm}+m'\dfrac{d\chi}{dm}+n'\dfrac{d\psi}{dm}\right)\delta'^2}{\partial y} + \dfrac{\partial.\left(l'\dfrac{d\varphi}{dn}+m'\dfrac{d\chi}{dn}+n'\dfrac{d\psi}{dn}\right)\delta'^2}{\partial z} \\ +\delta'^2\left(\dfrac{d\varphi}{dl}\dfrac{\partial l'}{\partial x}+\dfrac{d\chi}{dl}\dfrac{\partial m'}{dx}+\dfrac{d\psi}{dl}\dfrac{\partial n'}{\partial x}+\dfrac{d\varphi}{dm}\dfrac{\partial l'}{\partial y}+\dfrac{d\chi}{dm}\dfrac{\partial m'}{\partial y}+\ldots+\dfrac{d\psi}{dn}\dfrac{\partial n'}{\partial z}\right)=0. \end{cases}$$

Multiplions respectivement cette équation, et ses deux analogues en $(\varphi_1, \chi_1, \psi_1)$, $(\varphi_2, \chi_2, \psi_2)$, par les multiplicateurs λ', μ', ν' définis ci-dessus ou, plutôt, par des quantités qui leur soient proportionnelles et que nous appellerons aussi λ', μ', ν'. Il viendra, en ajoutant les résultats, l'équation en δ' du problème :

$$(\theta')\left\{\begin{aligned}&\lambda'\frac{\partial.\left(l'\dfrac{d\varphi}{dl}+m'\dfrac{d\chi}{dl}+n'\dfrac{d\psi}{dl}\right)\delta'^2}{\partial x}+\mu'\frac{\partial.\left(l'\dfrac{d\varphi_1}{dl}+m'\dfrac{d\chi_1}{dl}+\ldots\right)\delta'^2}{\partial x}\\&\quad+\nu'\frac{\partial.\left(l'\dfrac{d\varphi_2}{dl}+\ldots\right)\delta'^2}{\partial x}+\ldots+\delta'^2\left[\left(\lambda'\frac{d\varphi}{dl}+\mu'\frac{d\varphi_1}{dl}+\nu'\frac{d\varphi_2}{dl}\right)\frac{\partial l'}{\partial x}\right.\\&\qquad\left.+\left(\lambda'\frac{d\chi}{dl}+\mu'\frac{d\chi_1}{dl}+\ldots\right)\frac{\partial m'}{\partial x}+\left(\lambda'\frac{d\psi}{dl}+\ldots\right)\frac{\partial n'}{\partial x}+\ldots\right]=0.\end{aligned}\right.$$

L'élongation δ, ou, plus précisément, la vitesse correspondante δ', sont donc tenues de vérifier l'équation (θ'), dans laquelle ne figurent d'inconnu, en chaque point (x, y, z), que le carré δ'^2 et ses *petites* dérivées $\dfrac{\partial}{\partial(x, y, z)}$. Une fois cette relation (θ') satisfaite, les équations du mouvement, qui sont (θ) et ses analogues, se trouvent réduites à deux distinctes entre ε'', ε''_1 et ε''_2. Mais on peut y joindre la condition $l'\varepsilon + m'\varepsilon_1 + n'\varepsilon_2 = 0$, ou sa dérivée seconde en t, $l'\varepsilon'' + m'\varepsilon''_1 + n'\varepsilon''_2 = 0$, exprimant que δ est la véritable composante totale du déplacement vibratoire suivant la direction (l', m', n') assignée en chaque point. Et alors ε'', ε''_1, ε''_2 sont déterminés. Enfin, deux intégrations successives sur place en déduisent, dans chaque cas ou d'après la distribution des valeurs de δ sur les diverses ondes, les petits écarts ε, ε_1, ε_2 qu'éprouve le mouvement hors de sa trajectoire rectiligne idéale, de direction (l', m', n').

VII. *Intégration de cette équation, quand le déterminant est symétrique : conservation de la force vive de chaque onde sur chaque rayon.* — La signification de l'équation (θ') n'est simple, à ce qu'il semble, et son intégration ne paraît (du moins à première vue) effectuable, que lorsque les neuf polynomes φ, χ, ψ, φ_1, ..., ψ_2 se réduisent à six distincts, par les trois égalités

$$\varphi_1 = \chi, \qquad \varphi_2 = \psi, \qquad \chi_2 = \psi_1,$$

rendant *symétrique* le déterminant de ces neuf éléments et donnant, par suite, λ', μ', ν' égaux à λ, μ, ν, ou permettant de prendre ici

$$\lambda' = l', \qquad \mu' = m', \qquad \nu' = n'.$$

Alors, par exemple, les premier et quatrième termes triples écrits de (θ) s'associent pour donner

$$\frac{\partial . l'\left(\lambda'\dfrac{d\varphi}{dl}+\mu'\dfrac{d\varphi_1}{dl}+\nu'\dfrac{d\varphi_2}{dl}\right)\delta'^2}{\partial x}.$$

Il en est de même des autres groupes de termes; et l'équation se réduit beaucoup. Rappelons-nous les polynomes P, Q, R définis au n° III (p. 569), ou plutôt, désignons par P, Q, R ce que deviennent ces polynomes, quand on les fait varier, tous les trois, dans un même rapport, en substituant aux fonctions λ, μ, ν ou λ', μ', ν' de l, m, n les cosinus directeurs proportionnels l', m', n', qui sont aussi

des fonctions déterminées de l, m, n : alors il vient

$$(\theta'') \qquad \frac{\partial.\mathrm{P}\delta'^2}{\partial x}+\frac{\partial.\mathrm{Q}\delta'^2}{\partial y}+\frac{\partial.\mathrm{R}\delta'^2}{\partial z}=0.$$

Or, d'après ce qu'on a vu (p. 570), les fonctions P, Q, R de l, m, n, ainsi définies, sont proportionnelles à x, y, z, ou égales aux produits respectifs des cosinus $\frac{(x, y, z)}{r}$ par une fonction $\varkappa$ des mêmes cosinus, invariable le long de chaque rayon r. L'on a donc l'équation, pareille à (γ''') (p. 574),

$$(\theta''') \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{x\,\delta'^2}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{y\,\delta'^2}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{z\,\delta'^2}{r}\right)=0,$$

exprimant que, sur toute onde suivie dans son mouvement et le long d'un même rayon, la vitesse vibratoire δ' et, par suite, le déplacement δ, sont inverses de la distance r au centre des ébranlements; ce qui implique la conservation, suivant chaque droite émanée du centre, de la force vive de l'onde.

On voit que la symétrie du déterminant des neuf éléments φ, χ, ψ, ..., ψ_2 entraîne : 1° *l'intégrabilité, le long de chaque rayon r pris isolément,* de l'équation (θ') par laquelle sont régies, dans une même onde, les vitesses vibratoires δ'; et 2°, en même temps que cette intégrabilité, la *conservation de la force vive*.

Or, dans le cas d'un corps transparent, *même animé d'une translation rapide*, les équations de mouvement de l'éther vérifient les trois conditions $\varphi_1=\chi$, $\varphi_2=\psi$, $\chi_2=\psi_1$ de symétrie du déterminant; car, par exemple, les termes en η, dans la première équation du mouvement, et les termes en ξ, dans la seconde, ont respectivement les formes

$$\mathrm{F}\left(\frac{d}{dt}-\alpha'\frac{d}{dx}-\beta'\frac{d}{dy}-\gamma'\frac{d}{dz}\right)^2\eta+\frac{d^2\eta}{dx\,dy}$$

et

$$\mathrm{F}\left(\frac{d}{dt}-\alpha'\frac{d}{dx}-\beta'\frac{d}{dy}-\gamma'\frac{d}{dz}\right)^2\xi+\frac{d^2\xi}{dx\,dy},$$

donnant pour χ et φ_1 l'expression commune

$$\mathrm{F}(1+\alpha' l+\beta' m+\gamma' n)^2+lm.$$

Ainsi, *il y a conservation, suivant chaque rayon, de la force vive de toute onde lumineuse, propagée, à partir d'un centre, dans un corps transparent soit fixe, soit mobile dans l'éther.* Il en serait de même si l'éther, tout en restant élastique, cessait d'être isotrope, pourvu qu'il continuât à admettre un potentiel d'élasticité [1].

On voit que, du moins dans les cas particuliers les plus intéressants, comme sont ceux des ondes planes et des ondes émanées d'un centre, le principe des forces vives doit avoir une certaine manière de s'appliquer à ces sortes de mouvements dont les équations contiennent, à côté du terme ordinaire affecté aux accélérations, d'autres termes contenant les dérivées secondes *complètes* des dé-

---

[1] *Voir*, à ce sujet, mon Volume intitulé *Applications des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, etc. (p. 674).

placements, par rapport au temps, définies à la page 397, ou prises le long de chemins parallèles, parcourus avec une vitesse constante donnée.

Complément a la théorie de l'ellipsoïde inverse (n° 56) principalement dans le cas d'asymétrie.

I. *Simplifications aux calculs concernant l'ellipsoïde inverse.* — Dans un exposé sommaire, où l'on ne préciserait pas les différences existant entre la direction exacte (l', m', n') de la vibration et sa direction dite *approchée* (l'_1, m'_1, n'_1), non plus qu'entre la valeur exacte de ω définie par l'équation (169) (p. 414) et sa valeur approchée définie par (172), on pourrait se conten ter de poser la formule que donnent les trois équations (166), multipliées respectivement par l', m', n' et ajoutées. Cette formule, d'où se trouvent éliminés les coefficients d'asymétrie d, e, f, est

$$U l'^2 + V m'^2 + W n'^2 = -(ll' + mm' + nn')^2.$$

Or, vu la quasi-transversalité des vibrations, ou, ce qui revient au même, la petitesse du trinome $ll' + mm' + nn'$, corrélative dans les équations (166) à celle de U, V, W, d, e, f, le second membre obtenu est du *deuxième* ordre; et une altération négligeable (de cet ordre), imposée à ω dans U, V, W, suffira pour faire annuler le premier membre. On aura donc, sans erreur sensible,

$$U l'^2 + V m'^2 + W n'^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{l'^2}{a^2} + \frac{m'^2}{b^2} + \frac{n'^2}{c^2} = \frac{1}{\omega^2}.$$

Or une transformation comme celle qui nous a conduits (p. 420) à l'ellipsoïde *direct* de Fresnel, permet de substituer au premier membre le quotient de $(l'^2 + m'^2 + n'^2)^2$ par $a^2 l'^2 + b^2 m'^2 + c^2 n'^2$, c'est-à-dire l'inverse de ce dernier trinome. Et il vient, à très peu près,

$$a^2 l'^2 + b^2 m'^2 + c^2 n'^2 = \omega^2;$$

ce qui est, vu l'approximation demandée, l'équivalent de (179).

Pour démontrer la seconde propriété de l'ellipsoïde inverse *dans un milieu symétrique* (p. 418), celle qu'il a de faire connaître la direction approchée (l'_1, m'_1, n'_1) de la vibration par les axes de son ellipse diamétrale parallèle aux ondes, il suffit d'observer que la normale à l'ellipsoïde, menée au point où aboutit le diamètre de direction (l'_1, m'_1, n'_1), a ses cosinus directeurs proportionnels à $a^2 l'_1$, $b^2 m'_1$, $c^2 n'_1$, c'est-à-dire, justement, aux cosinus directeurs exacts l', m', n' de la vibration. Celle-ci y est donc normale à l'ellipsoïde et, par suite, à son ellipse, considérée, d'intersection par le plan d'onde diamétral, ellipse qui coupe ainsi à angle droit le plan projetant la vibration sur l'onde. Donc le diamètre de direction (l'_1, m'_1, n'_1), que l'on sait représenter la projection même de la vibration, se trouve normal à l'ellipse, ce qui exige bien qu'il en soit un des deux axes.

II. *Obliquité, sur le plan d'onde, du plan des deux directions exacte et approchée de la vibration, dans le cas d'asymétrie.* — Quand les coefficients d, e, f d'asymétrie sont nuls, la direction approchée (l'_1, m'_1, n'_1) de la vibration

est, je viens de le rappeler, la projection, sur le plan de l'onde, de la direction exacte (l', m', n'). Il y a lieu de se demander si elle l'est encore, généralement, lorsque d, e, f diffèrent de zéro. Or l'examen du cas particulier où f est nul et où les ondes sont normales à l'axe des z, suffit pour montrer que non.

Car l'on a alors

$$l = 0, \qquad m = 0, \qquad n = \frac{1}{\omega}, \qquad P = 0;$$

ce qui réduit, d'une part, l'équation (169) et les rapports égaux (167) à

$$(\alpha) \qquad \frac{UV}{c^2} + d^2U + e^2V = 0, \qquad \frac{l'}{eV} = \frac{m'}{-dU} = \frac{n'}{UV},$$

d'autre part, (172) et les rapports égaux (173) à

$$UV = 0, \qquad \frac{l'_1}{eb^2V} = \frac{m'_1}{-da^2U} = \frac{n'_1}{0}.$$

La direction (l'_1, m'_1, n'_1) coïncide avec l'axe ou des x (si $U = 0$), ou des y (si $V = 0$). Elle ne peut donc être la projection, sur le plan des xy, de la direction (l', m', n'), qu'à la condition, pour celle-ci, de se trouver dans le plan ou des zx, ou des zy. Or cela exigerait que les deux dernières relations (α) donnassent soit $m' = 0$, c'est-à-dire $U = 0$, soit $l' = 0$, c'est-à-dire $V = 0$. Mais la première relation (α) montre que U et V ne peuvent pas s'annuler l'un sans l'autre : circonstance rendue impossible par le fait de l'invariabilité de la différence $U - V$, égale à celle des inverses de a^2 et de b^2.

Complément a la théorie de la dispersion.

I. ***Complément au n° 63, relatif au terme principal de dispersion ou terme de Cauchy.*** — Le rayon ε de la sphère d'uniformisation est, comme je l'ai dit à la page 439, en rapport de longueur avec les intervalles moléculaires, quoique notablement plus grand qu'eux. Mais, en réalité, sa détermination reste extrêmement délicate, et elle serait même impossible, si l'on demandait autre chose qu'un calcul approximatif. Car l'uniformisation à effectuer ici doit faire disparaître des fonctions ξ, η, ζ les inégalités locales, ou dues à la discontinuité de la matière pondérable, sans néanmoins atténuer celles qui constituent les ondes mêmes, et dont il s'agit justement de mettre en relief les effets divers. Or, comme les distances intermoléculaires sont supposées un peu comparables à la longueur d'ondulation, cette atténuation, cet effacement des ondes, dans les expressions considérées de ξ, η, ζ, se produiraient pour peu qu'on prît ε trop grand. Ainsi, la correction à effectuer se trouve très limitée, dans sa précision, par la nécessité où l'on est, tout en uniformisant, de ne le faire que d'une manière restreinte. C'est donc l'expérience seule qui fixera le choix de ε, d'après les valeurs qu'elle assignera, dans l'expression (204) (p. 440) de ω^2 ou dans l'expression corrélative de l'indice de réfraction, au coefficient $\varkappa$, que la formule (200) (p. 439) rattache à ε.

La marche suivie, qui a l'avantage de la simplicité, ne constitue donc qu'un mode sommaire d'approximation, mais pas plus imparfait peut-être que la méthode compliquée, due en principe à Cauchy et paraissant spéciale aux corps à constitution périodique ou cristallisés, à laquelle il est fait allusion vers le milieu de

la page 437, méthode où il serait également difficile d'éviter les deux écueils contraires signalés ici, si l'on voulait l'appliquer aux corps *amorphes* ou à cristallisation confuse ([1]). Aussi, ne prétendant nullement à la rigueur, je n'ai pas jugé nécessaire, à la page 437, d'introduire dans la formule d'uniformisation, c'est-à-dire dans l'expression approchée de ξ, en fonction de ξ_m, les termes en $\Delta_2\Delta_2\xi_m$, $\Delta_2\Delta_2\Delta_2\xi_m$, ..., qui, toutefois, pourraient bien donner une approximation plus grande. La mise en compte des termes en $\Delta_2\Delta_2\xi_m$, qui est immédiate et simple grâce à la dernière formule de la page 437, conduit, par exemple, à prendre

$$(a)\qquad \xi = \xi_m - \frac{\varepsilon^2}{10}\Delta_2\xi_m + \frac{9\varepsilon^4}{1400}\Delta_2\Delta_2\xi_m.$$

Or, dans le dernier terme, on aura sensiblement, d'après la première des trois équations approchées du mouvement,

$$\Delta_2\xi_m = \frac{\rho+\rho A}{\mu}\frac{d^2\xi_m}{dt^2} = -\frac{\rho+\rho A}{\mu}k^2\xi_m;$$

de sorte qu'il viendra

$$(a')\qquad \xi = \xi_m - \frac{\varepsilon^2}{10}\left(1 + \frac{9}{14}\,\frac{\varepsilon^2}{10}\,\frac{\rho+\rho A}{\mu}k^2\right)\Delta_2\xi_m,$$

au lieu de la formule employée au n° 63,

$$\xi = \xi_m - \frac{\varepsilon^2}{10}\Delta_2\xi_m.$$

Par suite, si l'on pose encore, d'après (200) (p. 439) et en supposant isotrope le corps,

$$\rho A\frac{\varepsilon^2}{10} = x\mu \qquad \text{ou} \qquad \frac{\varepsilon^2}{10} = \frac{x\mu}{\rho A},$$

le coefficient x se trouvera remplacé, dans les formules (201), (202) et (204) (p. 439 et 440), notamment dans la dernière, qui exprime le carré ω^2 de la vitesse de propagation, par

$$(a'')\qquad x\left(1 + \frac{9}{14}\,\frac{\varepsilon^2}{10}\,\frac{\rho+\rho A}{\mu}k^2\right),\quad \text{c'est-à-dire par}\quad x\left(1 + \frac{9}{14}x\frac{1+A}{A}k^2\right);$$

et, au facteur binome $1 - xk^2$ du numérateur, dont le second terme est négatif, s'adjoindra le nouveau terme, également négatif, $-\frac{9}{14}\,\frac{1+A}{A}x^2k^4$. Il a bien, du moins à un coefficient correctif près, la forme et le *signe* de celui qu'ajoutent les physiciens, inverse de la quatrième puissance de la période vibratoire, quand ils veulent exprimer leurs observations les plus précises.

La théorie de la dispersion ne me paraît guère comporter, du moins dans l'état actuel de nos connaissances, une véritable rigueur, à cause surtout de la diffi-

---

([1]) Elle semble encore bien complexe sous la forme, pourtant la plus réduite possible, que lui a donnée M. Potier dans son Mémoire de 1872, intitulé : *Recherches sur l'intégration d'un système d'équations aux différentielles partielles à coefficients périodiques* (*Association française pour l'avancement des sciences*, t. I, p. 255 à 272).

culté d'évaluer exactement, dans un corps, l'impulsion élastique de l'éther sur ses propres éléments de volume, supposés pris assez grands pour admettre l'introduction de déplacements ξ, η, ζ uniformisés (p. 439). Au fond, cette difficulté se présentait déjà, moins accusée (il est vrai), dans notre quatrième Leçon (t. I, p. 61), en raison ou à propos des inévitables anomalies de ξ, η, ζ au voisinage de chaque molécule pondérable.

II. *Les termes propres de dispersion, de polarisation rotatoire et d'absorption, fonctions de la période vibratoire apparente, non de la période réelle.* — On a vu, au n° 64 (p. 441 et 442), que, dans le cas d'un corps en mouvement, le terme principal de dispersion contient la période *apparente* de vibration, par rapport à un observateur entraîné avec le corps, et non la période *réelle*, que constaterait un observateur restant fixe dans l'éther. J'aperçois, pour arriver à ce résultat, une méthode beaucoup plus simple, applicable aussi aux autres termes de dispersion, soit à ceux dont il vient d'être parlé, soit aux termes de Briot, et qui s'étend aux phénomènes de polarisation rotatoire et d'absorption.

Elle consiste à observer, d'abord, que, dans le système des axes coordonnés fixes, tous ces termes contiennent ou les déplacements ξ, η, ζ eux-mêmes, ou leurs dérivées exprimées par les deux symboles Δ_2 et $\frac{d_c}{dt}$. Or, si l'on rapporte le mouvement, comme il faut finir par le faire, à des axes liés au système donné de corps et à l'observateur, d'une part, le symbole Δ_2 et, en général, les dérivées $\frac{d}{d(x,y,z)}$ ne changent pas; d'autre part, la dérivation complète en t, exprimée par $\frac{d_c}{dt}$, devient une dérivation partielle $\frac{d}{dt}$. Donc ceux d'entre les termes considérés qui contenaient ξ, η, ζ non différentiés *gardent* la forme qu'ils ont dans un corps en repos, et les autres, différentiés, la gardent ou *l'acquièrent*. Dès lors, pour les mouvements *pendulaires* ainsi rapportés aux axes mobiles, et où la variable $k(t - lx - my - nz)$ d'un système d'ondes planes a le coefficient k de t modifié par le passage des axes fixes à ceux-là, tous ces termes s'évaluent, d'eux-mêmes, en fonction de la période vibratoire *apparente*, notamment quand on y remplace ξ, η, ζ par $-\frac{1}{k^2}\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2}$ et $\frac{d^2\Delta_2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2}$ par $-k^2\Delta_2(\xi, \eta, \zeta)$, comme nous avons fait pour conserver le plus possible aux équations leur homogénéité ou n'y faire figurer que des dérivées secondes.

Il est clair que, de même, les termes (218) (p. 456), par lesquels s'expriment la polarisation rotatoire et la double réfraction elliptique, auront, dans un corps en mouvement, des dérivées secondes complètes en t, à la place de ξ'', η'', ζ'', et que ces termes prendront également, dans le système des axes mobiles, leur forme propre au cas d'un corps en repos. Donc, si les vibrations sont pendulaires, c'est également la période *apparente* qui figurera dans tous ces termes. Enfin, quand, pour expliquer l'absorption, on introduira des résistances proportionnelles aux vitesses, la même raison qui, au n° 47 (p. 397), nous a fait remplacer les accélérations par les dérivées secondes complètes $\frac{d_c^2}{dt^2}$, fera substituer aux vitesses des dérivées premières analogues $\frac{d_c}{dt}$, et conduira même à y prendre les coefficients fonctions des périodes apparentes; de sorte que les termes d'absorption acquerront encore les formes du cas d'un corps en repos, si l'on adopte des axes mobiles entraînés avec le corps. Ainsi, ces termes introduiront uniquement

la période apparente; et il en sera, visiblement, de même dans la question, connexe, de la dispersion anomale des corps absorbants (p. 453).

III. *Ces divers phénomènes semblent, néanmoins, pouvoir différer, mais très peu, de ce qu'ils seraient, pour même période apparente, dans un corps en repos.* — Toutefois, ce qui précède ne suffit pas pour que les phénomènes dont il s'agit se produisent, dans les corps en mouvement, comme ils le feraient, pour même période apparente, dans les corps en repos. En effet, avec le système d'axes mobiles, les composantes V_x, V_y, V_z de la vitesse translatoire V figureront encore au premier terme, développé, des équations du mouvement, terme qui devient (p. 402)

$$\rho \frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} - 2\rho\left(V_x \frac{d}{dx} + V_y \frac{d}{dy} + V_z \frac{d}{dz}\right)\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}.$$

Un examen spécial sera donc nécessaire, pour reconnaître jusqu'à quel point sa petite partie en V_x, V_y, V_z se trouvera sans influence appréciable.

S'il s'agit, par exemple, de la dispersion, et qu'on ait à construire, pour un observateur entraîné avec les axes mobiles, les deux rayons réfléchi et réfracté issus d'un rayon incident donné, l'application de la théorie exposée aux n°s 48 et 51 (p. 402 et 406) exigera que chaque milieu isotrope soit défini par la *seule* constante $A = N^2 - 1$, pouvant, il est vrai, dépendre de la couleur, ou que les équations du mouvement reçoivent la forme

$$(b)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho\left(\frac{d^2}{dt^2} - 2V_x\frac{d^2}{dx\,dt} - 2V_y\frac{d^2}{dy\,dt} - 2V_z\frac{d^2}{dz\,dt}\right)(\xi, \eta, \zeta) + \rho A\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} \\ &= \mu\left[\Delta_2(\xi, \eta, \zeta) - \frac{d\theta}{d(x, y, z)}\right], \quad \cdots\end{aligned}\right.$$

Or le terme de Briot se trouve déjà (p. 433) implicitement compris dans A. Mais celui de Cauchy, ou terme en $\varkappa k^2$ (p. 440) figurera aux seconds membres, à côté de μ, par le facteur binome (à y adjoindre) $1 - \varkappa k^2$; et il faudra, pour conserver à ces seconds membres leur forme *voulue, commune à tous les milieux isotropes,* multiplier les équations par $1 + \varkappa k^2$, très sensiblement. Alors, dans les premiers membres, A fera place à $A(1 + \varkappa k^2)$, et il s'introduira, en outre, les termes

$$\varkappa k^2\rho\left(\frac{d^2}{dt^2} - 2V_x\frac{d^2}{dx\,dt} - 2V_y\frac{d^2}{dy\,dt} - 2V_z\frac{d^2}{dz\,dt}\right)(\xi, \eta, \zeta).$$

Pour un système d'ondes planes, ces termes valent en tout, avec les notations du n° 64 (p. 441),

$$\varkappa k^2(1 + 2lV_x + 2mV_y + 2nV_z)\rho\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2},$$

ou encore

$$\varkappa k^2\left(1 + 2\frac{V'}{\omega}\right)\rho\frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2};$$

et, joints au terme en $A(1 + \varkappa k^2)$, ils conduisent à prendre, pour le coefficient unique, analogue à A, qui doit définir le milieu, l'expression définitive

$$(b')\qquad A' = A + (1 + A)\varkappa k^2\left(1 + \frac{2}{1 + A}\frac{V'}{\omega}\right).$$

Or celle-ci est la même que pour un corps en repos, où k, inverse (maintenant)

de la période *apparente*, recevrait la nouvelle valeur

$$(b'') \qquad k' = k\left(1 + \frac{1}{1+A}\frac{V'}{\omega}\right) = (\text{sensiblement})\, k\left(1+\frac{1}{N^2}\frac{V'}{\omega}\right).$$

Si, au lieu d'y multiplier k par $1+\frac{1}{N^2}\frac{V'}{\omega}$, on le multipliait par $1+\frac{V'}{\omega}$, ce serait à très peu près (ω n'ayant guère changé) l'inverse de ce que l'on a fait au n° 64 (p. 441); et, par conséquent, on réintroduirait, dans ce terme de Cauchy, la période réelle, au lieu de la période apparente qui s'y trouve. Donc, en ne multipliant, ici, k que par $1+\frac{1}{N^2}\frac{V'}{\omega}$, on accroît la période apparente de la fraction $\frac{1}{N^2}$ de l'intervalle qui sépare cette période de la période réelle.

En résumé, un observateur entraîné avec un système optique donné de corps transparents isotropes, verra la réflexion et la réfraction des rayons se faire comme à l'état de repos, pourvu que l'on remplace, *pour chaque corps du système, dans le terme de Briot correspondant, la période réelle par la période apparente et, dans celui de Cauchy, la période réelle par la période apparente, accrue de la fraction* $\frac{1}{N^2}$ *de l'intervalle qui existe entre ces deux périodes*, N désignant l'indice de réfraction approché du corps par rapport au vide.

Si le corps est, par exemple, du verre, cas où $N = \frac{3}{2}$, la fraction $\frac{1}{N^2}$ vaudra $\frac{4}{9}$; de sorte que la période intermédiaire à introduire dans le terme de Cauchy sera plus près de la période apparente que de la période réelle. Et comme les deux termes de Cauchy et de Briot font, *tous les deux*, varier l'indice en sens inverse de la période, une période *fictive* unique, donnant, dans le verre *en repos*, l'indice de réfraction constaté du verre *en mouvement*, sera une certaine moyenne entre les deux périodes respectives propres aux deux termes [1] : elle se trouvera donc *notablement plus rapprochée* de la période *apparente* que de la période réelle.

Notre théorie aboutit ainsi, très sensiblement, au moins pour la dispersion, à la conclusion suggérée à M. Mascart (p. 442) par ses délicates expériences.

IV. *Complément au n° 67, sur la dispersion chez les corps opaques; obliquité des rayons aux ondes et leur courbure dans ces corps.* — Le problème de la dispersion des rayons réfractés par un corps opaque suppose préalablement résolu celui de leur délimitation latérale. Pour aborder celui-ci, bornons-nous au cas d'isotropie; et les équations de mouvement seront (115) (p. 372), où nous prendrons ξ, η, ζ sans indice. Alors, les inconnues ξ, η, ζ y étant séparées, nous pourrons, dans la solution symbolique formée au n° 38 (p. 373), considérer à

---

(1) Supposons, par exemple, pour fixer les idées, la période apparente moindre que la période réelle. Alors, en introduisant, dans les deux termes à la fois, la période propre au terme de Cauchy (supérieure à celle du terme de Briot), on évaluera *par défaut* le terme de Briot. Mais si l'on introduit, au contraire, dans les deux termes, la période plus faible propre au terme de Briot, on évaluera par excès le terme de Cauchy. La valeur vraie de l'indice est donc entre les deux valeurs ainsi obtenues et correspond bien à une période intermédiaire.

part chacune d'elles, ξ par exemple. Posons donc

$$\xi = \mathrm{U}\, e^{k(t-l_1 x - my)\sqrt{-1}},$$

en faisant le coefficient imaginaire d'amplitude U lentement variable avec x, y, z. L'équation en ξ revient à

$$\frac{1}{\omega_1^2}\frac{d^2\xi}{dt^2} = \Delta_2\xi,$$

où ω_1^2 a l'expression imaginaire (118) (p. 374), à laquelle celle de l_1 est reliée par la formule (119). A cause des *petites* dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial(x, y, z)}$ de U et, en conséquence, de ξ, par rapport aux variables autres que $t - l_1 x - my$, l'on aura, comme il a été trouvé bien des fois dans ce Volume, sans que le caractère imaginaire de la variable principale vienne modifier ici en rien les règles de différentiation,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \xi'', \qquad \frac{d\xi}{dx} = -l_1\xi' + \frac{\partial\xi}{\partial x}, \qquad \frac{d^2\xi}{dx^2} = l_1^2\xi'' - 2l_1\frac{\partial\xi'}{\partial x}, \qquad \dots$$

$$\Delta_2\xi = (l_1^2 + m^2)\xi'' - 2\left(l_1\frac{\partial\xi'}{\partial x} + m\frac{\partial\xi'}{\partial y}\right);$$

et l'équation du mouvement ci-dessus deviendra, vu (117) (p. 373),

$$l_1\frac{\partial\xi'}{\partial x} + m\frac{\partial\xi'}{\partial y} = 0,$$

c'est-à-dire

$$l_1\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial x} + m\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial y} = 0.$$

Soit $\mathrm{U} = e^{u+u_1\sqrt{-1}}$, e^u étant le module de U, ou l'*amplitude* des valeurs effectives de ξ (abstraction faite de l'exponentielle décroissante, fonction de x seul, comprise dans le facteur $e^{-kl_1x\sqrt{-1}}$), et u_1 étant l'*argument* de U, expression d'une avance ou d'un retard de *phase*. Ces deux quantités u et u_1 sont données à la surface $x = 0$ du corps opaque; ou, plutôt, elles y résultent des formules indiquées au n° 39, à propos de la réflexion métallique (p. 374). A cette surface $x = 0$, l'amplitude e^u du déplacement réfracté effectif ξ est variable, proportionnelle partout à celle du déplacement de même nom dans l'onde incidente; mais le changement u_1 de phase y est constant, pour les directions assignées de cette onde et des vibrations qui la constituent.

Or la substitution, à U, de $e^{u+u_1\sqrt{-1}}$ et, à l_1, m, de leurs valeurs des n°s 39 et 67 (p. 375 et 451), savoir

$$l_1 = \frac{\mathrm{L}}{\omega}(\cos\nu - \sqrt{-1}\sin\nu) = \frac{\cos r}{\Omega} - \sqrt{-1}\,\frac{\mathrm{L}}{\omega}\sin\nu, \qquad m = \frac{\sin i}{\omega} = \frac{\sin r}{\Omega},$$

change l'équation précédente en

$$\left(\frac{\cos r}{\Omega} - \sqrt{-1}\,\frac{\mathrm{L}}{\omega}\sin\nu\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \frac{\sin r}{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{-1}\,\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = 0;$$

et la séparation de l'imaginaire d'avec le réel y donne,, après multiplication par

la vitesse de propagation Ω de l'onde réfractée,

$$(c)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}\cos r + \frac{\partial u}{\partial y}\sin r + \left(L\frac{\Omega}{\omega}\sin\nu\right)\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0,\\ &\frac{\partial u_1}{\partial x}\cos r + \frac{\partial u_1}{\partial y}\sin r - \left(L\frac{\Omega}{\omega}\sin\nu\right)\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\end{aligned}\right.$$

ou bien, en désignant par $\frac{\partial(u, u_1)}{\partial n}$ les dérivées premières respectives de u et u_1 suivant une petite normale ∂n aux ondes réfractées,

$$(c')\qquad \frac{\partial u}{\partial n} + \left(L\frac{\Omega}{\omega}\sin\nu\right)\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0,\qquad \frac{\partial u_1}{\partial n} - \left(L\frac{\Omega}{\omega}\sin\nu\right)\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Il vient encore, par l'élimination du coefficient $L\frac{\Omega}{\omega}\sin\nu$ entre ces deux équations, la relation remarquable

$$(c'')\qquad \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial n}\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0.$$

Or, sauf dans le cas de l'incidence *normale*, où les deux éléments rectilignes ∂n et ∂x se confondent, et où cette dernière équation (c'') implique la double invariabilité de u et de u_1 suivant la normale aux ondes, les deux équations (c') ou (c) prouvent l'obliquité, par rapport aux ondes, des *rayons lumineux, le long desquels le coefficient d'amplitude* e^u *se conserve*. Car, si l'amplitude du déplacement ξ, qui est le produit de e^u par une exponentielle en x seul, se transmettait, abstraction faite de l'exponentielle en x, suivant l'élément ∂n, l'annulation de $\frac{\partial u}{\partial n}$, dans la première équation (c') considérée près de la surface $x = 0$, y donnerait $\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0$: d'où il résulterait $\frac{\partial u_1}{\partial n} = 0$ en ces points où u_1 ne varie pas avec y; et alors la seconde équation (c'), y devenant $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, exigerait $\left(\text{vu } \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right)$, l'annulation de $\frac{\partial u}{\partial y}$, ou empêcherait l'amplitude e^u d'y varier arbitrairement d'un point à l'autre de la surface, comme il le faut pour qu'elle soit partout proportionnelle au déplacement ξ incident. Donc *les rayons, réfractés sous les incidences obliques par un corps opaque isotrope. sont eux-mêmes obliques à leurs ondes.*

De plus, ces rayons (ainsi définis par la relation $u = \text{const.}$) ont des courbures variables avec la manière dont change l'amplitude du mouvement vibratoire d'un point à l'autre de la surface. Car, si, dans un plan parallèle à celui d'incidence ou des xy, mais d'ailleurs quelconque, r_1 désigne, en tout point (x, y, z), l'angle variable du rayon avec les x positifs, ou que $\cos r_1$, $\sin r_1$, o soient ses cosinus directeurs, l'on aura évidemment

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos r_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\sin r_1 = 0;$$

et l'angle r_1 ne pourra être constant, le long d'un rayon, que si le rapport des deux dérivées partielles de u en x et y, ou aussi, par suite, celui des deux déri-

vées $\frac{\partial u}{(\partial n, \partial x)}$, le sont eux-mêmes; ce qui entraînera, vu l'égalité de ce dernier rapport, d'après (c'), à celui des deux dérivées $\frac{\partial u_1}{(\partial x, \partial n)}$, multiplié par

$$-\left(L\frac{\Omega}{\omega}\sin\nu\right)^2,$$

l'invariabilité du rapport de celles-ci, ou, par suite encore, du rapport des deux dérivées $\frac{\partial u_1}{\partial(y, x)}$, le long du même rayon. Or cette dernière invariabilité n'est pas possible, la dérivée $\frac{\partial u_1}{\partial y}$ étant nulle à la surface $\left(\text{où } \frac{\partial u_1}{\partial x} \text{ ne l'est pas}\right)$ et différant de zéro dans l'intérieur du corps opaque, où u_1 devient, corrélativement à u, fonction de x et de y.

La courbure des rayons est, d'ailleurs, visiblement dépendante de la manière dont u varie avec y à la surface $x = 0$. C'est, en effet, à partir de celle-ci que les deux équations simultanées (c) déterminent de proche en proche, ou dans le passage de chaque plan $x =$ const. au plan suivant, d'abscisse $x + dx$, les deux fonctions u et u_1. On le voit en résolvant ces deux équations par rapport aux dérivées $\frac{\partial(u, u_1)}{\partial x}$, qu'elles font connaître en fonction de $\frac{\partial(u, u_1)}{\partial y}$, et, d'abord, sur le plan $x = 0$ où sont donnés u et u_1. On peut donc concevoir évalués les accroissements élémentaires $\frac{\partial(u, u_1)}{\partial x}\partial x$ éprouvés par u et u_1 le long des petites normales ∂x séparant ce plan $x = 0$ du plan parallèle voisin; d'où l'on passera de même, par l'intégration du système (c) en définitive, aux plans suivants $x =$ const.

V. *Direction initiale et équation aux dérivées partielles des rayons réfractés par un corps opaque; anomalie de leur dispersion.* — Cherchons la direction des rayons réfractés, *à leur naissance,* c'est-à-dire près de la surface $x = 0$, où $\frac{\partial u_1}{\partial y} = 0$. Alors la seconde équation (c) donne pour $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ la valeur

$$\left(L\frac{\Omega}{\omega}\frac{\sin\nu}{\cos r}\right)\frac{\partial u}{\partial x};$$

et celle-ci change la première équation (c) en

$$(d)\qquad (\text{pour } x = 0)\quad \left(\cos r + L^2\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\sin^2\nu}{\cos r}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + (\sin r)\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

La direction suivant laquelle l'amplitude du déplacement ξ et aussi, pareillement, les amplitudes de η, ζ, se conservent (à part toujours une exponentielle d'extinction, variable uniquement avec la distance x à la surface), est donc celle dont les cosinus directeurs sont entre eux comme

$$\cos r + L^2\frac{\Omega^2}{\omega^2}\frac{\sin^2\nu}{\cos r},\quad \sin r,\quad 0,$$

ou, en éliminant $\cos r$, $\sin r$ par les formules ci-dessus (p. 584) qui définissent r et Ω, comme

$$L,\quad \sin i\cos\nu,\quad 0.$$

Donc, tandis que la perpendiculaire aux ondes réfractées fait, avec l'axe des x normal à la surface séparative, l'angle r ayant pour tangente $\frac{\sin i}{L\cos\nu}$, le rayon réfracté, que définit précisément cette direction suivant laquelle se conservent les coefficients e^u d'amplitude, fait l'angle *plus petit,* qu'on peut appeler *angle de réfraction,* dont la tangente est $\frac{\sin i \cos\nu}{L}$.

On a vu (p. 580) que L et ν croissent, en général, avec la période vibratoire. L'angle de réfraction décroît donc du violet au rouge; et le rouge se trouve le plus dévié vers la normale, non le violet, qui serait, au contraire, plus réfrangible que le rouge dans un corps transparent. Ainsi, à ce point de vue encore, et non pas seulement à celui du n° 67 ou des changements de direction des ondes, *l'opacité produit l'anomalie de dispersion.*

Connaissant, à la surface $x = 0$, la fonction u et aussi, par la relation (d), sa dérivée en x, pour toutes les valeurs de y, il est aisé d'extraire des équations (c) une équation linéaire, aux dérivées partielles secondes de u, dont l'intégration ferait connaître l'amplitude e^u dans tout le corps opaque et, par suite, les rayons courbes $u =$ const. Il suffit, pour la former, de résoudre les deux équations (c) par rapport aux deux dérivées $\frac{\partial u_1}{\partial(x, y)}$ qu'on veut éliminer, et d'égaler les deux dérivées secondes $\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\, \partial y}$ que donne leur différentiation, ou, ce qui revient au même, d'ajouter à la première équation (c'), différentiée en n, la seconde différentiée en x et multipliée par $-L\frac{\Omega}{\omega}\sin\nu$.

Il vient ainsi, sous forme symbolique,

$$\left(\cos r \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \sin r \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \left(L\frac{\Omega}{\omega}\sin\nu\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

ou bien, par l'élimination, comme ci-dessus, de $\cos r$ et de $\sin r$,

$$\left(L\cos\nu \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \sin i \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + (L\sin\nu)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

c'est-à-dire, en développant,

$$(d') \qquad L^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2L\sin i\cos\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (\sin i)^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

On remarquera que cette équation (d') et la relation définie (d) seront les mêmes pour les trois déplacements ξ, η, ζ, comme était déjà la même l'exponentielle en x, décroissante, due à la partie imaginaire de l_1. Or, à la surface $x=0$, ξ et η, déplacements parallèles au plan d'incidence, se trouveront partout proportionnels au déplacement incident transversal parallèle au même plan, et, par suite, seront proportionnels entre eux, ou n'auront le logarithme, u, de leur amplitude respective e^u, différent, que par une constante. Donc la partie variable de u leur sera commune dans tout le corps opaque et ces deux déplacements ne constitueront ensemble qu'une famille de rayons lumineux.

Ainsi, un rayon incident donné, en pénétrant dans le corps opaque, n'y produira que deux rayons distincts, l'un, à vibrations parallèles au plan d'incidence (ou constituées par les deux déplacements ξ, η), l'autre, à vibrations normales au plan d'incidence (ou constituées par le déplacement ζ).

COMPLÉMENT AU N° 68 (p. 457). — CE QUE DEVIENNENT LES DEUX ÉQUATIONS DES FORCES VIVES ET DU VIRIEL, DANS LES PHÉNOMÈNES DE POLARISATION ROTATOIRE ET DE DOUBLE RÉFRACTION ELLIPTIQUE.

I. *Équation des forces vives.* — Voyons ce qu'ajoutent à l'équation des forces vives les résistances spéciales (218) (p. 456), opposées par les grosses molécules dissymétriques d'un corps transparent au mouvement vibratoire de l'éther, du moins si l'on admet que le corps, homogène, soit, en outre, indéfini dans tous les sens et en repos aux distances infinies de l'origine.

Multipliées par l'élément de volume $d\varpi$ d'éther, puis par les déplacements élémentaires suivant les axes $\xi' dt$, $\eta' dt$, $\zeta' dt$, de cet élément durant l'instant dt, enfin, intégrées dans tout le volume agité ϖ, ces résistances (218) donnent pour l'instant dt le travail *résistant* (c'est-à-dire pris en signe contraire) ou le *gain* d'énergie potentielle (¹)

$$(a)\qquad dt\int_\varpi \rho\alpha\left[\xi'\left(\frac{d\eta''}{dz}-\frac{d\zeta''}{dy}\right)+\eta'\left(\frac{d\zeta''}{dx}-\frac{d\xi''}{dz}\right)+\zeta'\left(\frac{d\xi''}{dy}-\frac{d\eta''}{dx}\right)\right]d\varpi.$$

Or cette expression est la différentielle en t de l'intégrale

$$(a')\qquad \int_\varpi \frac{\rho\alpha}{2}\left[\xi'\left(\frac{d\eta'}{dz}-\frac{d\zeta'}{dy}\right)+\eta'\left(\frac{d\zeta'}{dx}-\frac{d\xi'}{dz}\right)+\zeta'\left(\frac{d\xi'}{dy}-\frac{d\eta'}{dx}\right)\right]d\varpi.$$

Effectivement, différentions (a') par rapport au temps t. Il vient d'abord, en faisant varier les facteurs binomes de l'expression entre crochets, la moitié de la somme cherchée (a). Il reste donc à reconnaître que l'autre moitié de celle-ci égale ce que donnera la différentiation des autres facteurs, savoir, en tout,

$$(b)\qquad \frac{dt}{2}\int_\varpi \rho\alpha\left[\xi''\left(\frac{d\eta'}{dz}-\frac{d\zeta'}{dy}\right)+\eta''\left(\frac{d\zeta'}{dx}-\frac{d\xi'}{dz}\right)+\zeta''\left(\frac{d\xi'}{dy}-\frac{d\eta'}{dx}\right)\right]d\varpi.$$

Remplaçons, dans (b),

$$\xi''\frac{d\eta'}{dz}-\ldots-\eta''\frac{d\xi'}{dz}+\ldots \quad\text{par}\quad \frac{d(\xi''\eta'-\eta''\xi')}{dz}+\ldots-\eta'\frac{d\xi''}{dz}+\ldots+\xi'\frac{d\eta''}{dz}-\ldots.$$

Les trois termes, intégrables une fois, en $\dfrac{d(\xi''\eta'-\eta''\xi')}{dz}$ ..., donneront des intégrales se rapportant uniquement à la surface limite σ du volume ϖ; et, si λ, μ, ν désignent les trois cosinus directeurs de la normale à l'élément quelconque $d\sigma$ de σ, tirée à partir de l'intérieur, il en résultera l'intégrale totale de superficie,

$$\frac{dt}{2}\int_\sigma \rho\alpha\left[(\xi''\eta'-\eta''\xi')\nu+(\eta''\zeta'-\zeta''\eta')\lambda+(\zeta''\xi'-\xi''\zeta')\mu\right]d\sigma,$$

(¹) On remarquera que les termes (218) sont, au n° 69 (p. 457), inscrits avec leurs signes dans les premiers membres des équations du mouvement, à côté des accélérations : ces parties des composantes $(\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_z)$ sont donc considérées comme *positives* quand ce sont des résistances *proprement dites*, s'exerçant suivant les x, y, z négatifs.



ou

$$(b') \qquad \frac{dt}{2}\int_\sigma \rho\alpha[\xi'(\mu\zeta''-\nu\eta'')+\eta'(\nu\xi''-\lambda\zeta'')+\zeta'(\lambda\eta''-\mu\xi'')]\,d\sigma,$$

intégrale nulle par hypothèse, puisque l'on admet l'existence du repos à la limite de l'espace ϖ. Il reste donc, pour l'expression (b),

$$\frac{dt}{2}\int_\varpi \rho\alpha\left(-\eta'\frac{d\xi''}{dz}+\ldots+\xi'\frac{d\eta''}{dz}-\ldots\right)d\varpi,$$

c'est-à-dire, identiquement, la seconde moitié cherchée de (a).

Ainsi, abstraction faite du terme (b'), relatif à la surface limite σ, que nous supposons nul, mais dont il faudrait plus généralement tenir compte, les résistances productrices de la polarisation rotatoire et de la double réfraction elliptique entraînent l'adjonction, à l'énergie potentielle en jeu dans le problème, du terme (a'), dont le décroissement d'un instant à l'autre constitue justement le travail de ces résistances. Comme il y figure les vitesses ξ', η', ζ' ou leurs dérivées en x, y, z, cette énergie potentielle se rapproche, par son expression, des demi-forces vives : il conviendra donc de la comprendre dans ce que nous appelons (p. 284) la demi-force vive *fictive* et aussi, par suite, dans l'énergie actuelle *totale*.

Rapportée à l'unité de volume, *elle égale le produit de* $\rho\alpha$ *par l'expression*

$$(c) \qquad \frac{\xi'}{2}\left(\frac{d\eta'}{dz}-\frac{d\zeta'}{dy}\right)+\frac{\eta'}{2}\left(\frac{d\zeta'}{dx}-\frac{d\xi'}{dz}\right)+\frac{\zeta'}{2}\left(\frac{d\xi'}{dy}-\frac{d\eta'}{dx}\right),$$

qui, au signe près, s'obtient elle-même, évidemment, en multipliant la vitesse instantanée de rotation moyenne de la particule d'éther par la projection, sur l'axe de rotation correspondant, de la vitesse (ξ', η', ζ') *de translation de la particule.*

II. *Équation du viriel.* — Les mêmes résistances (218) figureront au premier membre de l'équation du viriel (p. 285), par l'intégrale

$$(d) \qquad \int_\varpi \frac{\rho\alpha}{2}\left[\xi\left(\frac{d\eta''}{dz}-\frac{d\zeta''}{dy}\right)+\ldots\right]d\varpi.$$

Transformons cette expression en opérant comme ci-dessus après la formule (b), c'est-à-dire en remplaçant

$$\xi\frac{d\eta''}{dz}-\ldots-\eta\frac{d\xi''}{dz}+\ldots$$

par

$$\frac{d(\xi\eta''-\eta\xi'')}{dz}+\ldots-\eta''\frac{d\xi}{dz}+\ldots+\xi''\frac{d\eta}{dz}-\ldots.$$

Il viendra

$$(d') \quad \left\{\begin{aligned}&\int_\varpi \frac{\rho\alpha}{2}\left[\xi\left(\frac{d\eta''}{dz}-\frac{d\zeta''}{dy}\right)+\ldots\right]d\varpi\\ &\quad=\int_\sigma \frac{\rho\alpha}{2}[(\eta\zeta''-\zeta\eta'')\lambda+\ldots]\,d\sigma+\int_\varpi \frac{\rho\alpha}{2}\left[\xi''\left(\frac{d\eta}{dz}-\frac{d\zeta}{dy}\right)+\ldots\right]d\varpi,\end{aligned}\right.$$

expression où le terme en $\int_\sigma$ pourrait s'écrire encore

$$\frac{d}{dt}\int_\sigma \frac{\rho\alpha}{2}[(\eta\zeta'-\zeta\eta')\lambda+\ldots]\,d\sigma.$$

Mais faisons abstraction, comme dans l'équation des forces vives, de ce terme relatif à la surface limite, où nous supposerons, par exemple, que règne le repos. Alors le double de l'expression (d) équivaudra, en remplaçant une fois cette expression par le second membre de (d'), à

$$(d'')\qquad \int_\varpi \frac{\rho\alpha}{2}\left[\xi\frac{d\eta''}{dz}+\xi''\frac{d\eta}{dz}-\xi\frac{d\zeta''}{dy}-\xi''\frac{d\zeta}{dy}+\ldots\right]d\varpi.$$

Or l'on a, par exemple,

$$\xi\frac{d\eta''}{dz}+\xi''\frac{d\eta}{dz}=\frac{d^2}{dt^2}\left(\xi\frac{d\eta}{dz}\right)-2\xi'\frac{d\eta'}{dz},\quad\ldots;$$

et la moitié de l'expression (d''), c'est-à-dire l'intégrale même (d), qui est à considérer, devient

$$(e)\quad \frac{d^2}{dt^2}\int_\varpi \frac{\rho\alpha}{4}\left[\xi\left(\frac{d\eta}{dz}-\frac{d\zeta}{dy}\right)+\ldots\right]d\varpi-\int_\varpi \frac{\rho\alpha}{2}\left[\xi'\left(\frac{d\eta'}{dz}-\frac{d\zeta'}{dy}\right)+\ldots\right]d\varpi.$$

Telle est, par conséquent, la quantité dont s'accroîtra ici le premier membre de l'équation (ε'') du viriel (p. 286) obtenue au n° 10. On remarquera que son second terme est l'expression (a') changée de signe, et que le premier est, comme le premier terme de (ε'') (p. 286), la dérivée seconde, par rapport au temps, d'une intégrale où ξ, η, ζ se trouvent ou tels quels ou différentiés seulement en x, y, z.

En raisonnant comme au n° 11 (p. 286 et 287), on reconnaîtra de même que, dans les propagations d'ondes, l'*énergie actuelle totale, en y comprenant le terme* (a'), *égale l'énergie potentielle élastique, et qu'elle se conserve séparément*, non moins que l'énergie totale elle-même. Et elle se conserverait encore, mais seulement en moyenne, dans des ondes périodiques stationnaires.

III. *Cas où la force vive se conserve.* — Il y a lieu de distinguer les mouvements où l'expression (c) et, par suite, le nouveau terme (a') s'annuleraient, puisque alors les formules des forces vives et du viriel seraient les mêmes que dans un corps sans pouvoir rotatoire; d'où il suit que la force vive, prise à part, s'y conserverait. Or, annuler l'expression (c), c'est exprimer l'*intégrabilité* de l'équation, aux différentielles totales,

$$(e')\qquad \xi'dx+\eta'dy+\zeta'dz=0,$$

c'est-à-dire, admettre que les petites droites (à projections dx, dy, dz sur les axes) perpendiculaires en (x, y, z) à la vitesse (ξ', η', ζ'), et qui couvrent toujours, de la sorte, un élément plan autour de (x, y, z), constituent ainsi de proche en proche, aux différents points (x, y, z) de l'espace occupé par le corps, une certaine famille $f(x, y, z)=c$ de surfaces courbes. C'est donc admettre que les vitesses (ξ', η', ζ') se trouvent, à tout instant, partout normales à une famille

de surfaces, dont l'équation, d'ailleurs susceptible de contenir le temps t, est alors, justement, l'intégrale même $f = \text{const.}$ de (e') (¹).

Au reste, cette annulation de l'expression (c) n'est qu'une des manières, la plu s simple, dont pourraient se conserver à part, dans une onde, l'intégrale (a') et, par suite, la demi-force vive.

Complément a l'étude de la polarisation circulaire.

I. *Application, à un milieu transparent isotrope-dissymétrique, de la théorie générale des ondes planes à vibrations pendulaires.* — Appliquons à un corps isotrope-dissymétrique, produisant, par conséquent, la polarisation circulaire des vibrations dans les ondes planes à propagation uniforme, les formules des pages 474 à 476. Les équations du mouvement, si l'on y adopte, pour unité de longueur, la vitesse de la lumière dans le corps symétrique correspondant, et que $2g$ désigne alors le coefficient de dissymétrie, seront, d'après les formules (220) (p. 458),

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2}\left[\xi + 2g\left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}\right),\ \eta + 2g\left(\frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz}\right),\ \zeta + 2g\left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}\right)\right] \\ &\qquad\qquad - \Delta_2(\xi, \eta, \zeta) + \frac{d\theta}{d(x, y, z)} = 0; \end{aligned}\right.$$

et elles reviendront à poser, après suppression d'un facteur k^2,

$$(a')\quad \left\{\begin{array}{lll} \varphi = l^2 + m^2 + n^2 - 1, & \chi = 2gkn\sqrt{-1}, & \psi = -2gkm\sqrt{-1}, \\ \varphi_1 = -2gkn\sqrt{-1}, & \chi_1 = l^2 + m^2 + n^2 - 1, & \psi_1 = 2gkl\sqrt{-1}, \\ \varphi_2 = 2gkm\sqrt{-1}, & \chi_2 = -2gkl\sqrt{-1}, & \psi_2 = l^2 + m^2 + n^2 - 1. \end{array}\right.$$

Les trois fonctions φ_1, φ_2, χ_2 se trouvant conjuguées à χ, ψ, ψ_1, il est clair que les déterminants partiels λ', μ', ν' seront aussi conjugués à λ, μ, ν. Nous savons, d'ailleurs (p. 458), qu'on aura $\theta = 0$, ou $lL + mM + nN = 0$ et, par suite,

$$(a'')\qquad l\lambda + m\mu + n\nu = 0, \qquad l\lambda' + m\mu' + n\nu' = 0;$$

d'où encore

$$(b)\qquad \frac{l}{\mu\nu' - \nu\mu'} = \frac{m}{\nu\lambda' - \lambda\nu'} = \frac{n}{\lambda\mu' - \mu\lambda'}.$$

De plus, les trois fonctions égales φ, χ_1, ψ_2 différeront de zéro, sans quoi L, M, N, dès lors proportionnels à l, m, n en vertu de (γ) (p. 474) et de (a'), ne pourraient annuler le trinome $lL + mM + nN$. Il suffit alors d'ajouter ces trois équations (γ), multipliées respectivement par L, M, N, pour avoir $L^2 + M^2 + N^2 = 0$, ou

$$(b')\qquad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 0, \qquad \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = 0.$$

Par suite, les trois fractions

$$(b'')\qquad \frac{(\mu\nu' - \nu\mu',\ \nu\lambda' - \lambda\nu',\ \lambda\mu' - \mu\lambda')}{\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu'}$$

(¹) *Voir*, par exemple, mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, t. II, *Compléments*, p. 2* à 7*.

ont, d'après l'identité classique fréquemment employée (p. 417), la somme de leurs carrés égale à -1; et, se trouvant, d'après (b), proportionnelles à l, m, n, elles égalent respectivement $\pm\sqrt{-1}\,\dfrac{(l, m, n)}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$.

Enfin, le déterminant des neuf éléments (a') donne, après suppression du facteur φ (différent de zéro, comme on vient de le voir), l'équation en l, m, n :

$$(c) \qquad (l^2+m^2+n^2-1)^2-4g^2k^2(l^2+m^2+n^2)=0.$$

En la résolvant par rapport à $l^2+m^2+n^2$ ou $\frac{1}{\omega^2}$, il vient

$$(c') \qquad \frac{1}{\omega^2} \quad \text{ou} \quad l^2+m^2+n^2=1+2g^2k^2\pm 2gk\sqrt{1+g^2k^2},$$

valeurs de $l^2+m^2+n^2$ constantes, l'une, supérieure, l'autre inférieure à l'unité, de quantités inégales, très petites dans tous les corps (où g est toujours faible) et y valant à fort peu près $2gk$.

L'équation (c) rend $\sqrt{l^2+m^2+n^2}$ fonction linéaire de $l^2+m^2+n^2-1$; et les trois fractions (b'') deviennent, à la condition de bien choisir le signe du symbole imaginaire,

$$(c'') \qquad \pm\sqrt{-1}\,\frac{2gk(l, m, n)}{l^2+m^2+n^2-1}.$$

Or, en faisant varier avec continuité les rapports mutuels de l, m, n sans changer, vu (c), la somme $l^2+m^2+n^2$, on voit que ces fractions (b''), *fonctions continues* à dénominateur essentiellement positif, ne s'annulent jamais à la fois; de sorte que le signe de $\pm\sqrt{-1}$ y est toujours le même. Or, si l'on fait, par exemple, $m=0$, $n=0$, $l>0$, χ, ψ, φ_1, φ_2 sont nuls, ψ_1 et $-\psi_2$ valent $2gkl\sqrt{-1}$, enfin, φ, χ_1, ψ_2 égalent l^2-1. Et l'on reconnaît immédiatement que les équations (γ), (δ) (p. 474 et 475) permettent de prendre, à des facteurs constants près,

$$\lambda=0, \qquad \mu=l^2-1, \qquad \nu=-2gkl\sqrt{-1},$$
$$\lambda'=0, \qquad \mu'=l^2-1, \qquad \nu'=2gkl\sqrt{-1};$$

d'où

$$\mu\nu'-\nu\mu'=4gkl(l^2-1)\sqrt{-1},$$

et aussi, en tenant finalement compte de (c),

$$\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu'=(l^2-1)^2+4g^2k^2l^2=2(l^2-1)^2.$$

Le premier rapport (b'') est donc alors $\sqrt{-1}\,\frac{2gk.l}{l^2-1}$; ce qui montre qu'il faut adopter exclusivement, dans (c''), le signe supérieur.

D'après (c), la célérité ω a la valeur absolue du rapport constant de $2gk$ à $l^2+m^2+n^2-1$, rapport positif pour la vibration circulaire la plus lente, négatif pour la plus rapide, si du moins g est >0. Les trois fractions (b'') vaudront donc $\pm\omega\sqrt{-1}(l, m, n)$, le signe supérieur se rapportant, pour $g>0$, à la vibration circulaire lente, le signe inférieur, à l'autre; et nous aurons les trois formules, indispensables ci-après :

$$(d) \quad (\mu\nu'-\nu\mu', \nu\lambda'-\lambda\nu', \lambda\mu'-\mu\lambda')=\pm\omega\sqrt{-1}(\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu')(l, m, n).$$

Cela posé, ici où les dérivées partielles en l, m, n de φ, χ, ψ, ..., ψ_2 sont, vu (a'), ou $2l$, $2m$, $2n$, ou zéro, ou $\pm 2gk\sqrt{-1}$, les expressions de P, Q, R, savoir

$$P = \lambda\left(\lambda'\frac{d\varphi}{dl} + \mu'\frac{d\varphi_1}{dl} + \nu'\frac{d\varphi_2}{dl}\right) + \mu\left(\lambda'\frac{d\chi}{dl} + \mu'\frac{d\chi_1}{dl} + \ldots\right) + \nu\left(\lambda'\frac{d\psi}{dl} + \ldots\right), \quad \ldots,$$

deviennent simplement

$$P = 2(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu') - 2gk\sqrt{-1}(\mu\nu' - \nu\mu'), \qquad Q = \ldots, \qquad R = \ldots,$$

c'est-à-dire, vu les formules (d),

$$(d') \qquad (P, Q, R) = 2(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')(1 \pm gk\omega)(l, m, n).$$

La direction (P, Q, R) des rayons se confond donc avec celle, (l, m, n), de la normale aux ondes, comme on pouvait le prévoir en observant que les surfaces d'onde courbes, enveloppes des ondes planes de toute direction passées simultanément à l'origine, se composent ici de deux sphères concentriques.

II. *Équation aux dérivées partielles régissant l'amplitude des vibrations dans les ondes courbes émanées d'un centre.* — Mais supposons maintenant nos ondes ainsi sphériques et émanées de l'origine. Alors les dérivées premières, l, m, n, de t_0, et leurs fonctions λ, μ, ν, λ', μ', ν' seront, comme L, M, N, lentement variables avec x, y, z; et, dans les différentiations secondes à effectuer, les opérations symboliques exprimées par ∂l, ∂m, ∂n (p. 474), quand elles porteront sur des produits dans le genre, par exemple, de lL, les dédoubleront; car l'opération $\partial l . l$L donnera non seulement, comme dans le cas d'ondes planes, $l\partial l$.L, mais, de plus, L$\partial l . l$, c'est-à-dire L $\frac{\sqrt{-1}}{k}\frac{\partial l}{\partial x}$. Un carré accru de sa différentielle symbolique, $(l + \partial l)^2$ par exemple, deviendra donc, dans les équations (γ),

$$l^2 + \frac{2\sqrt{-1}}{k}\, l\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sqrt{-1}}{k}\frac{\partial l}{\partial x},$$

ou aura gagné le troisième terme. De ce chef, le premier membre de la première équation (γ') (p. 474), où φ égale ici $l^2 + m^2 + n^2 - 1$, s'accroîtra de

$$\frac{\sqrt{-1}}{k}\,L\left(\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z}\right);$$

en sorte que cette équation sera maintenant

$$(d'') \qquad \left\{ \begin{aligned} &\varphi L + \chi M + \psi N + 2\frac{\sqrt{-1}}{k}\left(l\frac{\partial L}{\partial x} + m\frac{\partial L}{\partial y} + n\frac{\partial L}{\partial z}\right) \\ &\quad - 2g\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + \frac{\sqrt{-1}}{k}\,L\left(\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

Multipliée par λ', et jointe aux deux autres, analogues, respectivement multi-

pliées de même par μ', ν', elle donne, à un facteur constant près :

$$\lambda'\left(l\frac{\partial L}{\partial x}+m\frac{\partial L}{\partial y}+n\frac{\partial L}{\partial z}\right)+\mu'\left(l\frac{\partial M}{\partial x}+m\frac{\partial M}{\partial y}+\ldots\right)+\nu'\left(l\frac{\partial N}{\partial x}+\ldots\right)$$
$$+gk\sqrt{-1}\left[\lambda'\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}\right)+\mu'\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}\right)+\nu'\left(\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}\right)\right]$$
$$+\frac{1}{2}(\lambda' L+\mu' M+\nu' N)\left(\frac{\partial l}{\partial x}+\frac{\partial m}{\partial y}+\frac{\partial n}{\partial z}\right)=0.$$

Remplaçons-y, comme nous avons vu avant les formules (δ'') (p. 475) qu'il convenait de le faire, L, M, N par λI, μI, νI, où I est le coefficient d'amplitude des mouvements; puis développons les calculs. Un groupement convenable des termes obtenus donne :

$$(\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu')\left(l\frac{\partial I}{\partial x}+m\frac{\partial I}{\partial y}+n\frac{\partial I}{\partial z}\right)$$
$$-gk\sqrt{-1}\left[(\mu\nu'-\nu\mu')\frac{\partial I}{\partial x}+(\nu\lambda'-\lambda\nu')\frac{\partial I}{\partial y}+(\lambda\mu'-\mu\lambda')\frac{\partial I}{\partial z}\right]$$
$$+(\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu')\frac{I}{2}\left(\frac{\partial l}{\partial x}+\frac{\partial m}{\partial y}+\frac{\partial n}{\partial z}\right)$$
$$+I\left[\lambda'\left(l\frac{\partial\lambda}{\partial x}+m\frac{\partial\lambda}{\partial y}+n\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)+\mu'\left(l\frac{\partial\mu}{\partial x}+\ldots\right)+\nu'\left(l\frac{\partial\nu}{\partial x}+\ldots\right)\right]$$
$$+gkI\sqrt{-1}\left[\lambda'\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}-\frac{\partial\nu}{\partial y}\right)+\mu'\left(\frac{\partial\nu}{\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)+\nu'\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}-\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)\right]=0.$$

Observons que λ, μ, ν, fonctions de l, m, n, sont invariables le long des rayons r, ici normaux aux ondes; ce qui annule les trois expressions

$$l\frac{\partial(\lambda,\mu,\nu)}{\partial x}+m\frac{\partial(\lambda,\mu,\nu)}{\partial y}+n\frac{\partial(\lambda,\mu,\nu)}{\partial z}.$$

Regardons, de plus, l'expression $\lambda'\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}-\frac{\partial\nu}{\partial y}\right)+\mu'\left(\frac{\partial\nu}{\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)+\ldots$ comme la demi-somme plus la demi-différence de sa valeur et de celle de l'expression, qui lui est conjuguée,

$$\lambda\left(\frac{\partial\mu'}{\partial z}-\frac{\partial\nu'}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial\nu'}{\partial x}-\frac{\partial\lambda'}{\partial z}\right)+\nu\left(\frac{\partial\lambda'}{\partial y}-\frac{\partial\mu'}{\partial x}\right),$$

en observant que cette demi-différence des deux expressions est, identiquement,

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial(\mu\nu'-\nu\mu')}{\partial x}+\frac{\partial(\nu\lambda'-\lambda\nu')}{\partial y}+\frac{\partial(\lambda\mu'-\mu\lambda')}{\partial z}\right].$$

Enfin, multiplions l'équation par $2I$ et groupons respectivement, d'une part, tous les termes où figurent l, m, n, d'autre part, tous ceux où figureront les binomes $\mu\nu'-\nu\mu'$, ... Nous aurons

$$(d_1)\quad\left\{\begin{aligned}&(\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu')\left(\frac{\partial.lI^2}{\partial x}+\frac{\partial.mI^2}{\partial y}+\frac{\partial.nI^2}{\partial z}\right)\\&-gk\sqrt{-1}\left[\frac{\partial.(\mu\nu'-\nu\mu')I^2}{\partial x}+\ldots\right]\\&+gkI^2\sqrt{-1}\left[\lambda'\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}-\frac{\partial\nu}{\partial y}\right)+\lambda\left(\frac{\partial\mu'}{\partial z}-\frac{\partial\nu'}{\partial y}\right)+\ldots\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Remplaçons maintenant les binomes $\mu\nu' - \nu\mu', \ldots$ par leurs valeurs (d), proportionnelles à l, m, n. Le facteur qui y multiplie l, m, n étant invariable le long du rayon et, par suite, donnant zéro comme somme des trois produits, par x, y, z, de ses dérivées respectives en x, y, z, on peut traiter ce facteur comme constant dans la quantité entre crochets, puis réduire le second terme, triple, de (d_1) avec le premier et diviser enfin l'équation par le coefficient total,

$$(1 \pm gk\omega)\,(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu'),$$

du nouveau terme ainsi obtenu. Il vient alors, pour régir les variations du coefficient I d'amplitude aux divers points, l'équation aux dérivées partielles

$$(d_2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial . l\mathrm{I}^2}{\partial x} + \dfrac{\partial . m\mathrm{I}^2}{\partial y} + \dfrac{\partial . n\mathrm{I}^2}{\partial z} \\ \quad + \dfrac{gk\mathrm{I}^2\sqrt{-1}}{(1 \pm gk\omega)(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')}\left[\lambda\left(\dfrac{\partial\mu'}{\partial z} - \dfrac{\partial\nu'}{dy}\right) + \lambda'\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial z} - \dfrac{\partial\nu}{\partial y}\right) + \ldots\right] = 0. \end{cases}$$

Substituons-y encore, à l, m, n, proportionnels aux cosinus directeurs $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ du rayon, les trois produits respectifs de $\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}$ ou $\frac{1}{\omega}$ par $\frac{(x, y, z)}{r}$; puis, dédoublons le trinome $\frac{\partial}{\partial x}\frac{x\mathrm{I}^2}{r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y\mathrm{I}^2}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z\mathrm{I}^2}{r}$ en

$$x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{I}^2}{r} + y\frac{\partial}{\partial y}\frac{\mathrm{I}^2}{r} + z\frac{\partial}{\partial z}\frac{\mathrm{I}^2}{r} \quad \text{et} \quad 3\frac{\mathrm{I}^2}{r};$$

enfin, introduisant la dérivée $\frac{\partial}{\partial r}$ de $\frac{\mathrm{I}^2}{r}$ le long du rayon r prolongé, remplaçons le nouveau trinome $x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{I}^2}{r} + \ldots$ par $r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\mathrm{I}^2}{r}$. La somme des trois premiers termes de (d_2) deviendra

$$\frac{1}{\omega}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\frac{\mathrm{I}^2}{r} + 3\frac{\mathrm{I}^2}{r}\right),$$

ou

$$\frac{1}{\omega r^2}\frac{\partial . \mathrm{I}^2 r^2}{\partial r},$$

ou, finalement,

$$\frac{2}{\omega}\frac{\mathrm{I}}{r}\frac{\partial . \mathrm{I}r}{\partial r};$$

et l'équation (d_2), divisée par $\frac{2\mathrm{I}^2}{\omega}$, pourra, dès lors, s'écrire

$$(e)\qquad \frac{1}{\mathrm{I}r}\frac{\partial . \mathrm{I}r}{\partial r} + \frac{gk\omega\sqrt{-1}}{1 \pm gk\omega}\,\frac{\lambda\left(\dfrac{\partial\mu'}{\partial z} - \dfrac{\partial\nu'}{\partial y}\right) + \lambda'\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial z} - \dfrac{\partial\nu}{\partial y}\right) + \ldots}{2(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')} = 0.$$

III. *Intégration de cette équation; conservation de la force vive le long de chaque rayon lumineux.* — On voit que cette équation, si son second terme était nul, donnerait immédiatement, comme dans un milieu symétrique, une valeur constante au produit $\mathrm{I}r$ le long d'un même rayon, ou qu'elle y ferait le coefficient

d'amplitude I et, par suite, la vitesse vibratoire, inverses de la distance r au centre, de manière à assurer la conservation de la force vive de chaque onde à l'intérieur de tout cône infiniment aigu de rayons. Il y a donc lieu de chercher si le second terme ne serait pas nul, ou, ce qui revient au même (vu que ce second terme est la somme de deux quantités imaginaires conjuguées), si l'une des deux expressions variables figurant en numérateur, par exemple,

$$(e') \qquad \lambda\left(\frac{\partial\mu'}{\partial z}-\frac{\partial\nu'}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial\nu'}{\partial x}-\frac{\partial\lambda'}{\partial z}\right)+\nu\left(\frac{\partial\lambda'}{\partial y}-\frac{\partial\mu'}{\partial x}\right),$$

n'aurait pas sa partie *réelle* identiquement nulle.

Pour le reconnaître, et faute d'avoir découvert une méthode plus élégante, formons les expressions, peu symétriques, de λ, μ, ν, λ', μ', ν'. En considérant, par exemple, les deux premières équations (γ) (p. 474), qui donnent pour λ, μ, ν les déterminants partiels

$$\chi\psi_1-\psi\chi_1, \quad \psi\varphi_1-\varphi\psi_1, \quad \varphi\chi_1-\chi\varphi_1,$$

nous aurons, vu les valeurs (a') (p. 591) de φ, χ, ψ, φ_1, χ_1, ψ_1, abstraction faite partout du facteur $-4g^2k^2$ et si l'on observe que $l^2+m^2+n^2-1$ est, en vertu de (c), la quantité constante $\pm\frac{2gk}{\omega}$,

$$(e'') \qquad \lambda = ln\mp\frac{\sqrt{-1}}{\omega}m, \qquad \mu = mn\pm\frac{\sqrt{-1}}{\omega}l, \qquad \nu = n^2-\frac{1}{\omega^2};$$

d'où

$$\lambda' = ln\pm\frac{\sqrt{-1}}{\omega}m, \qquad \mu' = mn\mp\frac{\sqrt{-1}}{\omega}l, \qquad \nu' = n^2-\frac{1}{\omega^2}.$$

Il vient d'abord

$$(f) \qquad \lambda\left(\frac{\partial\mu'}{\partial z}-\frac{\partial\nu'}{\partial y}\right) = \left(ln\mp\frac{\sqrt{-1}}{\omega}m\right)\left(\frac{\partial.mn}{\partial z}\mp\frac{\sqrt{-1}}{\omega}\frac{\partial l}{\partial z}-\frac{\partial.n^2}{\partial y}\right).$$

Or, observons que l, m, n sont, au facteur constant près $\sqrt{l^2+m^2+n^2}$, les trois cosinus directeurs $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$, c'est-à-dire les trois dérivées partielles $\frac{\partial r}{\partial(x, y, z)}$, et même qu'elles seraient plus généralement, ou pour tout système d'ondes émanées de l'origine, même dans un milieu hétérotrope, les dérivées partielles en x, y, z du temps t_0 employé par les ondes à se propager le long du rayon r. Ainsi, l, m, n vérifient toujours, comme on a eu, du reste, déjà plusieurs fois occasion de le remarquer, les conditions d'intégrabilité

$$(f') \qquad \frac{\partial m}{\partial z}=\frac{\partial n}{\partial y}, \qquad \frac{\partial n}{\partial x}=\frac{\partial l}{\partial z}, \qquad \frac{\partial l}{\partial y}=\frac{\partial m}{\partial x}.$$

Grâce à la première de celles-ci, l'expression (f) devient simplement

$$\left(ln\mp\frac{\sqrt{-1}}{\omega}m\right)\left(m\frac{\partial n}{\partial z}-n\frac{\partial n}{\partial y}\mp\frac{\sqrt{-1}}{\omega}\frac{\partial l}{\partial z}\right);$$

et sa partie réelle est

$$(g) \qquad ln\left(m\frac{\partial n}{\partial z}-n\frac{\partial n}{\partial y}\right)-\frac{m}{\omega^2}\frac{\partial l}{\partial z}.$$

Traitons de même l'expression $\mu\left(\frac{\partial\nu'}{\partial x}-\frac{\partial\lambda'}{\partial z}\right)$; et nous verrons que sa partie réelle est

$$(g')\qquad mn\left(n\frac{\partial n}{\partial x}-l\frac{\partial n}{\partial z}\right)+\frac{l}{\omega^2}\frac{\partial m}{\partial z}.$$

Enfin, l'expression $\nu\left(\frac{\partial\lambda'}{\partial y}-\frac{\partial\mu'}{\partial x}\right)$ a comme partie réelle

$$(g'')\qquad \left(n^2-\frac{1}{\omega^2}\right)\left(l\frac{\partial n}{\partial y}-m\frac{\partial n}{\partial x}\right).$$

En ajoutant (g), (g'), (g''), on voit, d'abord, que les six termes où ne figure pas ω^2 se détruisent deux à deux et, ensuite, que les deux couples de termes restants, l'un en $\frac{l}{\omega^2}$, l'autre en $\frac{m}{\omega^2}$, s'annulent en vertu de (f').

Ainsi, l'expression (e') a sa partie réelle nulle; et le second terme de l'équation (e) se réduit bien à zéro.

Si ce terme ne s'était pas trouvé nul, l'intégration de l'équation (e) le long de chaque rayon vecteur aurait été, néanmoins, effectuable directement et simplement. En effet, comme λ, μ, ν, λ', μ', ν', invariables le long de chaque rayon, sont des fonctions homogènes du degré zéro en x, y, z, leurs dérivées partielles premières constituent des fonctions homogènes du degré -1; et ce second terme se serait trouvé de la forme $\frac{gk\mathrm{K}\sqrt{-1}}{r}$, avec K réel et *constant le long d'un même rayon*. L'équation (e), multipliée par dr, aurait donc eu pour intégrale, *sur ce rayon*,

$$\mathrm{I}\,r^{1+gk\mathrm{K}\sqrt{-1}}=\text{const.}\qquad\text{ou}\qquad \mathrm{I}=\frac{\text{const.}}{r}\,e^{-\sqrt{-1}\,gk\mathrm{K}\log r}.$$

L'exponentielle imaginaire se serait jointe, dans les formules (β) (p. 473) des déplacements symboliques ξ, η, ζ, au facteur variable $e^{k(t-t_0)\sqrt{-1}}$. Elle aurait donc conduit, simplement, à remplacer la variable principale $t-t_0$, c'est-à-dire, ici, $t-\frac{r}{\omega}$, par $t-t_0-g\mathrm{K}\log r$; modification insignifiante aux distances r un peu grandes, dont le logarithme devient sensiblement constant sur des longueurs notables.

IV. *Réflexions diverses : non-existence de surfaces, même variables, auxquelles seraient normales les vitesses vibratoires de l'éther dans les milieux dissymétriques.* — En résumé, tant dans le cas d'ondes émanées d'un centre que dans celui d'ondes planes, la force vive se conserve le long de chaque rayon, sans qu'on ait même à y tenir compte de l'intégrale (a') (p. 588), que nous avons dû ajouter à l'expression de l'*énergie actuelle totale* (p. 589) pour pouvoir étendre d'une manière générale, à l'éther des milieux transparents composés de grosses molécules dissymétriques, les principes des forces vives et du viriel. Et, en effet, cette intégrale (a') s'annule ici identiquement *dans la solution symbolique;* car l'équation (e') (p. 590) y est intégrable.

On le reconnaît en observant que ξ, η, ζ et, par suite, ξ', η', ζ' se trouvent, dans la solution symbolique considérée, proportionnels à λ, μ, ν. Cette équation (e') devient donc

$$(h)\qquad \lambda\,dx+\mu\,dy+\nu\,dz=0,$$

ou bien, vu les valeurs (e'') de λ, μ, ν,

$$n(l\,dx + m\,dy + n\,dz) - \frac{dz}{\omega^2} \pm \frac{\sqrt{-1}}{\omega}(l\,dy - m\,dx) = 0,$$

c'est-à-dire, en raison de ce que l, m, n sont les dérivées premières du temps t_0 de propagation,

$$(h') \qquad n\,dt_0 - \frac{dz}{\omega^2} \pm \frac{\sqrt{-1}}{\omega}(l\,dy - m\,dx) = 0.$$

Or, t_0, l, m, n sont les quotients respectifs de r, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ par ω; et l'équation (h'), dont il s'agit de reconnaître l'intégrabilité *analytique*, devient, si on la multiplie par $\omega^2 r$,

$$(z\,dr - r\,dz) \pm \omega\sqrt{-1}(x\,dy - y\,dx) = 0.$$

Alors, divisée, dans sa partie réelle, par $r^2 - z^2$ et, dans sa partie imaginaire, par l'expression équivalente $x^2 + y^2$, elle admet immédiatement, comme intégrale générale,

$$(h'') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \log\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{z}{r}}{1+\dfrac{z}{r}}} \pm \omega\sqrt{-1}\,\text{arc tang}\,\dfrac{y}{x} = \text{const.}, \\ \text{ou} \\ \log\sqrt{\dfrac{\omega - n}{\omega + n}} \pm \omega\sqrt{-1}\,\text{arc tang}\,\dfrac{m}{l} = \text{const.} \end{array} \right.$$

Il est vrai que l'expression (a') (p. 588) n'est ainsi démontrée nulle que pour la solution symbolique, et non pour les vitesses ξ', η', ζ' effectives, parties réelles des ξ', η', ζ' symboliques. Mais cela suffit pour la conservation de la force vive (*également symbolique*), dans cette solution, ou, ainsi qu'on l'a vu, pour rendre le coefficient I d'amplitude et, par suite, les parties réelles de ξ, η, ζ, qui expriment les déplacements effectifs, inverses de la distance r au centre d'ébranlement, le long de chaque rayon en émanant. D'où il suit, comme on sait, que la force vive des ondes réelles se conserve le long de ces rayons.

Seulement, il n'y a plus de famille de surfaces à laquelle les vitesses effectives ξ', η', ζ' soient normales. Car, si, attribuant à λ, μ, ν les expressions (e''), l'on suppose, pour simplifier, le coefficient d'amplitude I tout entier imaginaire dans la solution symbolique [ce qui revient à faire abstraction d'une partie constante dans l'argument $k(t - t_0)\sqrt{-1}$ de l'exponentielle, ou à choisir une origine des temps convenable], les dérivées ξ', η', ζ' seront, à un facteur près, constant et réel, les produits de λ, μ, ν par $e^{k(t-t_0)\sqrt{-1}}$; de sorte qu'on pourra prendre, sauf le même facteur, comme expression symbolique de $\xi'\,dx + \eta'\,dy + \zeta'\,dz$, le premier membre de ($h$), multiplié par $e^{k(t-t_0)\sqrt{-1}}$. Alors à un facteur près *réel* et fini, cette expression sera, vu (h') et (h''), le produit

$$[\cos k(t - t_0) + \sqrt{-1}\sin k(t - t_0)]\left[d\log\sqrt{\frac{\omega - n}{\omega + n}} \pm \omega\sqrt{-1}\,d\,\text{arc tang}\,\frac{m}{l}\right];$$

et, sauf encore un facteur réel, elle aura comme partie réelle (à annuler)

$$(i) \qquad d\log\sqrt{\frac{\omega-n}{\omega+n}} \mp \omega \operatorname{tang} k(t-t_0).d \operatorname{arc\,tang}\frac{m}{l}.$$

Or, cheminer de proche en proche, à partir d'un point quelconque (x, y, z) et *instantanément* (c'est-à-dire à une époque donnée ou *fixe* t), le long des éléments rectilignes (dx, dy, dz) pour lesquels s'annule cette expression (i), c'est par exemple, 1° sur la sphère $t_0 =$ const., ou $r =$ const., passant par (x, y, z), décrire la courbe le long de laquelle on a

$$(i') \qquad \log\sqrt{\frac{\omega-n}{\omega+n}} \mp \omega\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{m}{l}\right)\operatorname{tang} k(t-t_0) = \text{une const. } c.$$

et, 2°, normalement à cette sphère et aux sphères concentriques, parcourir le rayon r passant par (x, y, z), sur lequel l, m, n sont invariables.

Des surfaces normales aux vitesses actuelles contiendraient donc, si elles existaient, tous les rayons r coupant les courbes (i') : ce seraient des cônes à génératrices émanées de l'origine et à directrices exprimées par l'équation (i'), avec la valeur de t_0 assignée. Mais comme, à une distance r du sommet autre que celle du point (x, y, z) de départ, les courbes analogues à (i'), émanées du premier rayon r prolongé ou raccourci, correspondraient à une valeur, $\frac{r}{\omega}$, de t_0 et, par suite, à une valeur, c, du second membre, différentes des valeurs premières, ces courbes couperaient les cônes qui sont, dès lors, incapables de contenir *tous* les chemins suivant lesquels on peut, *de proche en proche*, se mouvoir normalement aux vitesses actuelles.

Mais on reconnaît aisément que l'intégrale (a') (p. 588) prise, le long d'un rayon r croissant, dans la couche sphérique d'épaisseur constante occupée par une onde, y conserve, néanmoins, sa valeur (dès lors différente de zéro). Car, les vitesses réelles ξ', η', ζ' ne changent *rapidement* qu'en fonction de

$$t - lx - my - nz,$$

où l, m, n sont (comme d'autres paramètres) très peu variables d'un point à l'autre et même constants le long du rayon. D'où il résulte que la fonction sous le signe $\int$, dans (a'), ne varie sensiblement, quand on suit l'onde le long du rayon, qu'à raison du lent changement des amplitudes, inverses de r, dans les deux facteurs de chacun des six produits constituant cette fonction. Et comme le champ ϖ, ou même $d\varpi$, de l'intégrale, à l'intérieur du cône aigu formé par le rayon lumineux en question, sera proportionnel au carré r^2 de la distance au sommet, on voit que l'intégrale (a') aura bien indéfiniment, dans l'onde, la même valeur.

Il est digne de remarque que la force vive se conserve également le long des rayons, comme on a vu (p. 577), et encore pour les ondes émanées d'un centre non moins que pour les ondes planes, dans l'éther des milieux homogènes en mouvement, quoique l'on ne sache pas, du moins à ma connaissance, comment les principes des forces vives et du viriel pourraient généralement s'y étendre. Il y a, sans doute, dans le fait de l'émanation *à partir d'un centre* (et il y aurait peut-être aussi dans quelque fait analogue, toutes les fois que l'on démêlerait de même des *rayons* distincts), un élément de simplification suffisant pour agrandir le champ d'application de ces principes en en réduisant l'expression.

COMPLÉMENT AU N° 76 *bis*, CONCERNANT L'ABSORPTION ET LE POLYCHROÏSME.

I. *Éclaircissements sur l'hétérotropie des liquides magnétiques et sur des calculs du* n° 76 *bis*. — On pourrait, à première vue, ne pas comprendre que les solutions liquides sur lesquelles ont porté les expériences de M. Quirino Majorana, manifestent, par leur biréfringence et surtout par leur mode d'absorption de la lumière sous l'influence du magnétisme, une hétérotropie bien caractérisée, alors que, par définition même, la fluidité implique l'isotropie. Mais il suffit d'un peu de réflexion, pour concevoir que les molécules magnétiques (ou diamagnétiques) disséminées çà et là dans la masse liquide, et qui s'y trouvent orientées indifféremment en tous sens à l'état naturel, se dirigent, au contraire, sans résistance appréciable, toutes de la même manière par rapport à la ligne des pôles, dès qu'elles sont placées dans un champ magnétique uniforme.

Le passage des équations (α') aux équations (β) (p. 483) a été peut-être trop rapide dans le texte pour ne pas paraître un peu obscur. On l'éclaircit, en observant que les équations (α''') donnent, par exemple,

$$\frac{1}{A^2} = \frac{1}{a^2}\left(1 + \frac{a^2 a'}{k}\sqrt{-1}\right)^{-2} = \frac{1}{a^2}\left(1 - \frac{2a^2 a'}{k}\sqrt{-1}\right) = \frac{1}{a^2} - 2\frac{a'}{k}\sqrt{-1},$$

et que, d'autre part, avec la formule (α'') de ξ, l'on a

$$\frac{d\xi}{dt} = k\sqrt{-1}\,\xi, \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -k^2\xi;$$

en sorte que les premiers membres des équations (α') et (β) correspondantes sont, tous les deux,

$$-\frac{k^2}{a^2}\xi + 2a'k\sqrt{-1}\,\xi,$$

ce qui les rend bien identiques.

Quoique le calcul des phénomènes d'absorption se trouve très simplifié par l'emploi des solutions symboliques, où ξ, η, ζ ont comme unique facteur variable, d'après la démonstration de la page 493, l'exponentielle $e^{k(t-Lx-My-Nz)\sqrt{-1}}$, il n'est pas inutile de voir qu'on pourrait opérer aussi, directement, sur les expressions réelles de ξ, η, ζ contenant, chacune, les deux produits de l'exponentielle e^{-fu}, ou $e^{-f(\lambda x+\mu y+\nu z)}$, soit par le cosinus, soit par le sinus, de l'arc

$$k\left(t - \frac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\omega}\right),$$

produits affectés de deux coefficients distincts, A et B dans ξ, A_1 et B_1 dans η, A_2 et B_2 dans ζ. Grâce au dédoublement des équations du mouvement par l'égalisation séparée, dans les deux membres, des termes où figure le cosinus et des termes où figure le sinus, il viendrait, en effet, six relations entre les deux constantes f, ω et les six coefficients A, B, ..., B_2. Ceux-ci, d'ailleurs, étant partout au premier degré, on pourrait se donner à volonté deux d'entre eux, A et B par exemple, de même qu'on se donne L' dans la solution symbolique, où les coefficients L', M', N' n'ont de déterminé que leurs rapports mutuels. Et il resterait précisément six constantes (y compris f et ω), disponibles pour vérifier les équations en même nombre obtenues.

J'observerai encore, à propos des calculs du n° 76 *bis*, que la formule appro-

chée (ε''), déduite (p. 489) de (ε') par la suppression, dans le quatrième terme, des trois petites parties en U, V, W du numérateur, ne pourrait pas servir à l'évaluation du coefficient d'extinction f. Car il faudrait, pour cette évaluation, la différentier. Or, quoique U, V, W soient petits *initialement*, c'est-à-dire pour les valeurs a^2, b^2, c^2, s^2 de A^2, B^2, C^2, S^2, leurs variations totales $\delta(U, V, W)$ ne peuvent pas être regardées comme petites, ou comme composées de termes beaucoup moins faibles que ces variations elles-mêmes. En effet, l'on a

$$\delta(U, V, W) = -2\frac{\delta(A, B, C)}{(a^3, b^3, c^3)} - \delta.S^2 = -2\frac{\sqrt{-1}}{k}(a', b', c') - \delta.S^2;$$

et, si l'on admettait que U, V, W restassent *constamment* petits, ou que $\delta(U, V, W)$ fussent presque négligeables, la valeur de $-\delta.S^2$ serait tenue d'être *voisine tout à la fois*, en grandeur *relative*, des *trois* expressions $2\frac{\sqrt{-1}}{k}(a', b', c')$, dont les rapports mutuels sont cependant quelconques.

II. *Formule simple du coefficient d'absorption des cristaux symétriques.* — Voici enfin une remarque importante, concernant la formule (γ') (p. 486) du coefficient f d'absorption, dans un cristal symétrique. Au dénominateur du dernier membre de cette formule, où l'on a vu que $\sin V$ est $\cos\varepsilon$, le produit $\sin V' \cos U$ est le cosinus de l'angle, que nous appellerons V'_1, *fait par le rayon lumineux avec la normale aux plans d'égale amplitude.* Car le rayon lumineux, étant (p. 300) perpendiculaire à la vibration (l', m', n') dans le plan de celle-ci et de la normale à l'onde, détermine, avec la vibration et avec la normale aux plans d'égale amplitude, un trièdre où le dièdre U, opposé à la face V'_1, se trouve compris entre la face V' et une face de 1 droit. On a donc

$$\cos V'_1 = \cos V' \cos\frac{\pi}{2} + \sin V' \sin\frac{\pi}{2}\cos U = \sin V' \cos U.$$

Et la formule citée (γ') devient

$$f = \frac{\omega}{\cos\varepsilon \cos V'_1}(a' l'^2 + b' m'^2 + c' n'^2).$$

Appelons r la longueur, $\frac{\omega}{\cos\varepsilon}$, du rayon lumineux dans l'onde courbe de Fresnel, c'est-à-dire la vitesse de propagation des ondes planes effectives, *estimée le long du rayon.* Alors l'expression de f sera

$$f = \frac{r}{\cos V'_1}(a' l'^2 + b' m'^2 + c' n'^2).$$

Le nouveau coefficient, plus simple, $\frac{r}{\cos V'_1}$, y représente évidemment *la vitesse, estimée le long de la normale aux plans d'égale amplitude* ou à la face d'entrée de la lumière dans le cristal, *d'ondes fictives, qui seraient perpendiculaires au rayon lumineux et auraient leur vitesse de propagation égale à la longueur même r qu'a ce rayon dans l'onde courbe de Fresnel.*

Quant au trinome $a' l'^2 + b' m'^2 + c' n'^2$, il suffit de lui attribuer comme dénominateur la somme $l'^2 + m'^2 + n'^2$, égale à 1, pour reconnaître qu'*il constitue, entre les trois demi-coefficients de résistance* a', b', c', *une moyenne obtenue en comptant chacun d'eux proportionnellement à la force vive de la compo-*

sante du mouvement vibratoire suivant l'axe de symétrie correspondant; car cette composante est, à chaque instant, la fraction l', ou m', ou n' de la quantité de mouvement, estimée suivant le sens même (l', m', n') de la vibration [1].

III. *Existence de trois sortes de résistances; réduction de leurs formules dans les corps pourvus d'un ou de plusieurs axes de symétrie.* — Il ne sera pas inutile de développer un peu plus, ici, les considérations du haut de la page 488, au sujet des formules générales de ces résistances $(\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y, \mathcal{R}_z)$, de la matière pondérable au mouvement vibratoire de l'éther, qui sont fonction des vitesses ξ', η', ζ' de celui-ci. Dans un système rectangulaire donné d'axes Ox, Oy, Oz, où ces formules contiennent (à part le facteur $-\mu$), neuf coefficients distincts a, b, c, d, e, f, d', e', f', on peut remplacer, par exemple, d et d' par $\frac{\mathrm{d}+\mathrm{d}'}{2} \pm \frac{\mathrm{d}-\mathrm{d}'}{2}$; et, alors, en prenant pour nouvelles constantes, que nous continuerons à appeler respectivement d, e, f, d', e', f', les demi-sommes $\frac{\mathrm{d}+\mathrm{d}'}{2}$, ... et les demi-différences $\frac{\mathrm{d}-\mathrm{d}'}{2}$, ..., ces neuf coefficients deviendront a, b, c, d ± d', e ± e', f ± f'. On pourra donc faire deux parts des résistances en question : l'une, où figureront a, b, c, d, e, f et où les trois coefficients *indirects* d, e, f de résistance se présenteront deux fois; l'autre, où figureront seulement, affectés une fois du signe *plus* et une fois du signe *moins*, les trois coefficients indirects d', e', f'.

La première part constituera une résistance analogue à celle qui dépend des accélérations ξ'', η'', ζ'', c'est-à-dire ayant pour composantes suivant les x, y, z (toujours au facteur près $-\mu$), les trois dérivées en ξ', η', ζ' de la fonction

$$\frac{\mathrm{a}}{2}\xi'^2 + \frac{\mathrm{b}}{2}\eta'^2 + \frac{\mathrm{c}}{2}\zeta'^2 + \mathrm{d}\eta'\zeta' + \mathrm{e}\zeta'\xi' + \mathrm{f}\xi'\eta',$$

résistance dont les composantes, dans un système rectangulaire *quelconque* d'axes, contiendront, d'après les formules du n° 5 (p. 275), les coefficients, analogues à a, b, c, d, e, f, de l'équation, *dans le même système d'axes*, de la surface invariable du second degré

$$\frac{\mathrm{a}}{2}\xi'^2 + \frac{\mathrm{b}}{2}\eta'^2 + \frac{\mathrm{c}}{2}\zeta'^2 + \mathrm{d}\eta'\zeta' + \mathrm{e}\zeta'\xi' + \mathrm{f}'\xi'\eta' = \text{const.},$$

---

[1] La fraction de l'énergie vibratoire (ou *intensité lumineuse*) introduite dans le milieu, qui se trouve transmise, sous la face d'entrée, à la profondeur $u = \frac{1}{\omega}$ parcourue au bout d'*une unité de temps*, a la valeur $(e^{-fu})^2$: son logarithme naturel est donc, au signe près,

$$2\frac{f}{\omega} = \frac{2a'.l'^2 + 2b'.m'^2 + 2c'.n'^2}{\cos\varepsilon \cos V'_1}.$$

On voit que les trois coefficients principaux de frottement $2a'$, $2b'$, $2c'$ y figurent *en entier* et non par leurs moitiés. De plus, la vitesse de propagation des ondes en est éliminée, et il n'y paraît, avec la direction (l', m', n') de la vibration, que les deux angles ε, V'_1 du rayon lumineux avec les deux normales aux ondes et à la face d'entrée.

dont ξ', η', ζ' désigneraient les coordonnées x, y, z. La surface en question est un ellipsoïde, les coefficients a, b, c s'y trouvant positifs, quel que soit le système rectangulaire d'axes choisi.

Quant à la seconde part, elle résultera de composantes, suivant les x, y, z, où (au facteur commun près $-\mu$) ξ', η', ζ' auront comme coefficients (o, f', — e') dans $\mathfrak{R}_x$, (— f', o, d') dans $\mathfrak{R}_y$, (e', — d', o) dans $\mathfrak{R}_z$; et les formules (12) (p. 275) montrent que, dans tout autre système, des x_1, y_1, z_1, ces coefficients prendront des valeurs analogues, exprimées, si on les affecte de l'indice 1, par les formules

$$d'_1 = d'(b'c'' - c'b'') + e'(b''c - c''b) + f'(bc' - cb'), \qquad e'_1 = \ldots, \qquad f'_1 = \ldots,$$

revenant, si les nouveaux axes sont de mêmes sens relatifs que les anciens [1], à

$$d'_1 = a\,d' + a'e' + a''f', \qquad e'_1 = \ldots, \qquad f'_1 = \ldots.$$

Appelons φ, comme à la page 491, l'*axe d'asymétrie*, droite émanée de l'origine et ayant, suivant les x, y, z, les projections d', e', f'. Si α, β, γ désignent les angles qu'elle fait avec les x_1, y_1, z_1, il viendra

$$d'_1 = \varphi\left(a\frac{d'}{\varphi} + a'\frac{e'}{\varphi} + a''\frac{f'}{\varphi}\right) = \varphi\cos\alpha, \qquad e'_1 = \varphi\cos\beta, \qquad f'_1 = \varphi\cos\gamma.$$

Donc, *les trois coefficients d'asymétrie, dans tout système d'axes déduits par rotation d'un premier système rectangulaire, sont les trois projections respectives, sur ces nouveaux axes, de l'axe d'asymétrie.* Et s'ils doivent avoir, dans le nouveau système, mêmes valeurs respectives que dans le premier, c'est que les axes coordonnés auront, *individuellement,* tourné autour de l'axe d'asymétrie ou, vu la conservation de leurs inclinaisons mutuelles, que la rotation se sera faite autour de l'axe d'asymétrie lui-même.

---

[1] Car les cosinus directeurs a, a', a'' étant ceux d'une droite normale aux deux directions (b, b', b'') des y_1 et (c, c', c'') des z_1, les deux conditions correspondantes de perpendicularité exigent qu'ils soient proportionnels aux trois différences $b'c'' - c'b''$, $b''c - c''b$, $bc' - cb'$. Or, la somme des carrés de celles-ci est, en vertu d'une identité connue,

$$(b^2 + b'^2 + b''^2)(c^2 + c'^2 + c''^2) - (bc + b'c' + b''c'')^2,$$

c'est-à-dire l'excès de l'unité sur le carré du cosinus de l'angle des deux axes des y_1 et des z_1, ou le carré du sinus, 1, de cet angle. Par suite, a, a', a'' égalent respectivement les trois différences considérées, prises ou toutes les trois avec leurs signes, ou toutes les trois avec les signes contraires. Or, nul passage ne se fait d'un de ces deux cas à l'autre, pendant la rotation *continue* qui peut, si tous nos axes sont de mêmes sens relatifs, amener le trièdre, supposé mobile, des axes des x_1, y_1, z_1 dans sa position effective, *à partir* de la position occupée par les x, y, z : car, les carrés de a, a', a'' ayant pour somme 1, ces cosinus directeurs ne s'annulent jamais à la fois; et l'un d'eux au moins serait discontinu, au moment où la différence qui l'exprime changerait de signe. Ainsi, l'on aura, si les x_1, y_1, z_1 sont de mêmes sens relatifs que les x, y, z,

$$a = b'c'' - c'b'', \qquad a' = b''c - c''b, \qquad a'' = bc' - cb',$$

valeurs se réduisant bien à 1, o, o au début, alors que b, b', b'' sont o, 1, o et que c, c', c'' sont o, o, 1.



Cela posé, admettons qu'il s'agisse d'un cristal, pourvu d'un *axe principal* autour duquel une rotation d'une certaine fraction de circonférence amène le cristal en coïncidence avec lui-même; et supposons qu'on ait pris cet axe pour celui des z. Les trois parties de la résistance, tant les deux, de forme symétrique, dépendant, l'une, des accélérations ξ'', η'', ζ'', ou à coefficients A, B, C, D, E, F, l'autre, des vitesses ξ', η', ζ', à coefficients a, b, c, d, e, f, que la troisième, dissymétrique ou à coefficients $\pm d'$, $\pm e'$, $\pm f'$, devront donc conserver, après une rotation exactement pareille des axes coordonnés eux-mêmes autour de Oz, leurs expressions premières. Ainsi, les ellipsoïdes représentatifs respectivement des deux parties symétriques, si on les conçoit entraînés avec les axes, se retrouveront en coïncidence avec eux-mêmes : ce qui exigera évidemment qu'ils aient, tous les deux, pour axe de symétrie, l'axe même de la rotation ou des z, et ce qui annulera, par le fait même, les quatre coefficients indirects D, E, d, e. Quant à la troisième partie, il faudra, pour qu'elle soit restée la même, que les axes aient tourné autour de l'axe d'asymétrie, comme on vient de voir : celui-ci se trouvera donc sur l'axe principal ou des z.

Par suite, s'il existe, dans le cristal, au moins *deux* axes principaux, comme il arrive dans ceux que nous appelons *symétriques,* l'axe d'asymétrie, tenu d'appartenir à chacun d'eux, se réduit à l'origine O; et l'on a $\varphi = 0$, c'est-à-dire $d' = 0$, $e' = 0$, $f' = 0$. De plus, les deux ellipsoïdes représentatifs ont respectivement deux axes et aussi, par suite, les troisièmes, orientés pareillement; ce qui, en les choisissant pour axes coordonnés, ne laisse plus subsister que les six coefficients directs de résistance A, B, C, a, b, c (les trois derniers, appelés $2a'$, $2b'$, $2c'$ dans le n° 76 *bis*, au facteur commun près $-\mu$). Et quand l'angle des deux axes principaux donnés diffère d'un droit, les deux ellipsoïdes sont nécessairement de révolution autour du troisième axe, perpendiculaire au plan des deux premiers. Alors, si l'un de ceux-ci est lui-même de révolution, les ellipsoïdes se réduiront à des sphères; et le cristal se comportera comme un corps isotrope.

Si enfin, sans qu'il y ait à considérer plus d'un axe principal, la rotation amenant le cristal en coïncidence avec lui-même est inférieure à une demi-circonférence, comme dans les systèmes du prisme droit à base ou carrée, ou hexagonale régulière, et dans celui du rhomboèdre, la coïncidence des ellipsoïdes exigera qu'ils soient encore de révolution, mais autour de l'axe donné; et il y aura *isotropie* du cristal autour de cet axe, isotropie entraînant les relations

$$B = A, \qquad b = a, \qquad (D, E, F, d, e, f, d', e') = 0, \qquad f' = \varphi.$$

L'isotropie sera *symétrique* ou *dissymétrique,* suivant que le coefficient φ d'asymétrie se réduira, ou non, à zéro. Or, il sera nécessairement nul si le plan des xy est un plan de symétrie, c'est-à-dire si l'axe d'asymétrie φ ne peut pas plus se trouver du côté des z négatifs que du côté des z positifs. Cela arrive quand le cristal, retourné de manière que l'un des deux bouts de l'axe principal prenne la place de l'autre bout, peut être, ensuite, amené par une rotation d'une fraction de circonférence autour de cet axe, en coïncidence avec sa position antérieure au retournement.

IV. *Coefficient général d'absorption des corps translucides hétérotropes, où coïncident en direction les axes principaux relatifs aux deux espèces symétriques de résistances.* — Prenons l'équation (ε') (p. 489) sous la forme, déduite de (168) (p. 414),

$$(1) \qquad L^2VW + M^2WU + N^2UV + P^2 + D^2U + E^2V + F^2W + UVW = 0;$$

et différentions-la, en y faisant L, M, N, A, B, C égaux d'abord à l, m, n, a, b, c, puis croissants de δL, δM, δN, δA, δB, δC. Si δU, δV, δW sont les variations simultanées des expressions (δ'') de U, V, W (p. 489), il viendra

$$(2) \qquad (m^2 W + n^2 V + D^2 + VW)\,\delta U + \ldots + 2(l VW + DP)\,\delta L + \ldots = 0.$$

Or le coefficient de δU, dans cette relation, est, d'après l'équation précédente (1) spécifiée pour les valeurs l, m, n, a, b, c de L, M, N, A, B, C, le quotient, par $-$U, de $l^2 VW + P^2 + E^2 V + F^2 W$. De plus, la seconde des formules (δ'') (p. 489) donne pour δU l'expression $-2\dfrac{\delta A}{a^3} - 2(l\,\delta L + m\,\delta M + n\,\delta N)$; et l'on peut enfin remplacer D, E, F par leurs valeurs $-\dfrac{(d, e, f)}{k}\sqrt{-1}$; ce qui conduit à introduire, au lieu de P, le nouveau trinome

$$(3) \qquad p = d l + e m + f n.$$

L'équation (2) devient alors, en posant, pour abréger,

$$(4) \quad K' = \left(\frac{l^2}{U^2} - \frac{p^2 + e^2 V + f^2 W}{k^2 U^2 VW}\right) + \left(\frac{m^2}{V^2} - \frac{p^2 + f^2 W + d^2 U}{k^2 V^2 WU}\right) + \left(\frac{n^2}{W^2} - \ldots\right)$$

et en divisant par 2 UVW,

$$(5) \quad \left[K' l + \left(\frac{l}{U} - \frac{dp}{k^2 UVW}\right)\right]\delta L + \ldots + \left(\frac{l^2}{U^2} - \frac{p^2 + e^2 V + f^2 W}{k^2 U^2 VW}\right)\frac{\delta A}{a^3} + \ldots = 0.$$

Appelons H, I, J les trois nombres (positifs ou négatifs), de somme 1, ou les trois parties de l'unité

$$(6) \quad H = \frac{1}{K'}\left(\frac{l^2}{U^2} - \frac{p^2 + e^2 V + f^2 W}{k^2 U^2 VW}\right), \quad I = \frac{1}{K'}\left(\frac{m^2}{V^2} - \frac{p^2 + f^2 W + d^2 U}{k^2 V^2 WU}\right), \quad J = \frac{1}{K'}\left(\frac{n^2}{W^2} - \ldots\right);$$

et soient, en outre, l_1, m_1, n_1 les trois cosinus directeurs que définissent les formules

$$(7) \quad \left\{\begin{array}{l} l_1 = \dfrac{1}{\sqrt{K_1}}\left(-\dfrac{l}{U} + \dfrac{dp}{k^2 UVW}\right), \quad m_1 = \dfrac{1}{\sqrt{K_1}}\left(-\dfrac{m}{V} + \dfrac{ep}{k^2 VWU}\right), \quad n_1 = \dfrac{1}{\sqrt{K_1}}\left(-\dfrac{n}{W} + \dfrac{fp}{k^2 WUV}\right), \\ \text{où} \\ \qquad K_1 = \left(-\dfrac{l}{U} + \dfrac{dp}{k^2 UVW}\right)^2 + \left(-\dfrac{m}{V} + \ldots\right)^2 + \left(-\dfrac{n}{W} + \ldots\right)^2. \end{array}\right.$$

L'équation (5), multipliée par $\dfrac{\omega}{K'}$, et où l'on remplacera d'ailleurs l, m, n par $\dfrac{\cos(\alpha, \beta, \gamma)}{\omega}$, prendra la forme, analogue à la formule du bas de la page 485,

$$(8) \quad \left(\cos\alpha - \frac{\omega\sqrt{K_1}}{K'} l_1\right)\delta L + \ldots = -\omega\left(H\frac{\delta A}{a^3} + I\frac{\delta B}{b^3} + J\frac{\delta C}{c^3}\right) \text{ (1)}.$$

---

(1) Il est clair que, si dans cette équation (8) l'on annule δ(A, B, C), elle deviendra l'équation différentielle totale en $\delta(l, m, n)$, nécessaire pour déterminer la surface de l'onde courbe (enveloppe des ondes planes de toute direction) dans l'hypothèse des milieux asymétriques qui font l'objet du n° 54 (p. 413) et de



Par suite, la substitution, à $\delta(A, B, C, L, M, N)$ de leurs valeurs

$$\frac{\sqrt{-1}}{k}(a^3a', b^3b', c^3c') \quad \text{et} \quad -\frac{f}{k}(\lambda, \mu, \nu)\sqrt{-1},$$

donnera pour le coefficient f d'absorption, au lieu de (γ') (p. 486), et en désignant par V_1 l'angle de la direction (l_1, m_1, n_1) avec la normale (λ, μ, ν) aux plans d'égale amplitude,

$$(9) \qquad f = \omega \frac{Ha' + Ib' + Jc'}{\cos V'' - \frac{\omega\sqrt{K_1}}{K'}\cos V_1}.$$

On voit que, si d, e, f s'annulent, les fractions $-\frac{l}{U}, -\frac{m}{V}, -\frac{n}{W}$ étant la même chose que $\frac{a^2 l}{a^2 s^2 - 1}, \ldots$, les sommes K_1, K' se confondront avec K défini par (β''') (p. 485); de plus, H, I, J ne différeront pas de l_1^2, m_1^2, n_1^2 et l_1, m_1, n_1 seront les cosinus directeurs l', m', n' de la vibration. Enfin, au dénominateur de (9), le coefficient $\frac{\omega\sqrt{K_1}}{K'}$ de $\cos V_1$ (alors devenu $\cos V'$) exprimera, d'après une des formules du bas de la page 485, le cosinus, qui s'y appelle $\cos V$, de l'angle de la vibration avec la normale aux ondes; en sorte que l'on retombera bien sur la formule (γ') de la page 486.

Plus généralement, et vu la petitesse, dans tous les corps translucides, des coefficients d'asymétrie d, e, f, ainsi que des différences entre les carrés a^2, b^2, c^2, les expressions (4) et (7) de K' et de K_1 sont très grandes du second ordre, ω y étant peu différent de a, b, c, ou les binomes U, V, W s'y trouvant petits à côté de $\frac{1}{\omega^2}$ et, par suite, les expressions de $\frac{l}{U}, \frac{m}{V}, \frac{n}{W}$ étant grandes, *du premier ordre*, en comparaison de ω ou de a, b, c. En conséquence, au second membre de (9), l'expression $\frac{\omega\sqrt{K_1}}{K'}$ est un nombre petit du premier ordre à côté de l'unité; et la formule (9) peut se réduire à celle-ci :

$$(10) \qquad f = (\text{sensiblement}) \cdot \frac{\omega}{\cos V''}(Ha' + Ib' + Jc').$$

Or, à l'espace ω que parcourt chaque onde, le long de sa normale, par unité de temps, correspond le chemin $\frac{\omega}{\cos V''}$ décrit par elle sur une perpendiculaire à sa face d'entrée dans le corps, c'est-à-dire au premier plan d'égale amplitude; car ce chemin, projeté sur la normale aux ondes, c'est-à-dire multiplié par $\cos V''$, doit donner ω. D'autre part, le trinome $Ha' + Ib' + Jc'$ est la moyenne formée entre

---

toute la cinquième Partie. Le rayon lumineux y aurait donc, pour l'onde dont la normale fait les angles α, β, γ avec les axes, ses cosinus directeurs proportionnels aux coefficients de $\delta(L, M, N)$, savoir, à

$$\cos\alpha - \frac{\omega\sqrt{K_1}}{K'}l_1, \qquad \cos\beta - \frac{\omega\sqrt{K_1}}{K'}m_1, \qquad \cos\gamma - \frac{\omega\sqrt{K_1}}{K'}n_1.$$

a', b' et c' par l'attribution des coefficients respectifs d'importance H, I, J à ces trois quantités. Ainsi, *le coefficient d'absorption f vaut sensiblement le produit de la vitesse des ondes, estimée suivant la normale aux plans d'égale amplitude, par une certaine moyenne entre les trois demi-coefficients principaux a', b', c' de la partie symétrique des résistances proportionnelles à la vitesse.*

Si l'on suppose $a' = b' = c'$, il vient donc la formule approchée de la page 492 $f = \frac{\omega a'}{\cos V^2}$, qui se trouve ainsi démontrée sans qu'on ait besoin d'admettre $a = b = c$, c'est-à-dire la monoréfringence, comme nous avons fait au n° 76 *bis*.

V. *Coefficient d'absorption, dans les corps d'une biréfringence négligeable comparativement à leur pouvoir rotatoire magnétique.* — Supposons maintenant a, b, c égaux, ou insensible la biréfringence proprement dite du corps, mais non le pouvoir rotatoire magnétique exprimé par d, e, f, ni les inégalités *relatives* entre les trois coefficients très petits a', b', c' produisant l'extinction. Nous aurons ainsi le cas opposé à celui d'un cristal symétrique, où dominait l'influence de la biréfringence et où la polarisation était rectiligne, qui a fait l'objet de la première partie du n° 76 *bis* (p. 483 à 487).

Et, d'abord, on pourra toujours y admettre notre hypothèse de la coïncidence des axes principaux pour les deux parties symétriques de la résistance fonctions, l'une, des accélérations de l'éther, l'autre, de ses vitesses : car, la supposition $c = b = a$ rendant principaux, pour la première partie, tous les systèmes rectangulaires d'axes, rien n'empêchera de choisir celui d'entre eux que constituent les axes principaux mêmes de la seconde partie.

On aura donc $W = V = U$; et l'équation (1), spécifiée pour les valeurs l, m, n, a, a, a de L, M, N, A, B, C, deviendra

$$(s^2 + U)U^2 + P^2 + (D^2 + E^2 + F^2)U = 0,$$

c'est-à-dire, vu que $s^2 + U = \frac{1}{a^2}$, et en remplaçant D, E, F, P par leurs valeurs $-\frac{(d, e, f, p)}{k}\sqrt{-1}$,

$$(11) \qquad k^2 U^2 = a^2[p^2 + (d^2 + e^2 + f^2)U].$$

Or, dans tous les corps connus, d, e, f, p, U sont petits; de sorte que cette équation, si l'on y néglige la partie du *troisième* ordre $a^2(d^2 + e^2 + f^2)U$, revient pratiquement à poser

$$(12) \qquad k^2 U^2 = a^2 p^2.$$

Mais alors les trois quantités H, I, J, après suppression analogue des parties du troisième ordre en $e^2 V$, $f^2 W$, ... dans leurs formules (6), sont entre elles comme

$$l^2 - \frac{p^2}{k^2 U^2}, \quad m^2 - \frac{p^2}{k^2 U^2}, \quad n^2 - \frac{p^2}{k^2 U^2},$$

c'est-à-dire, d'après (12), comme

$$l^2 - \frac{1}{a^2}, \quad m^2 - \frac{1}{a^2}, \quad n^2 - \frac{1}{a^2},$$

et enfin, l^2, m^2, n^2 y étant les quotients de $\cos^2(\alpha, \beta, \gamma)$ par ω^2 ou, sensiblement, par a^2, comme les trois carrés

$$\sin^2\alpha, \quad \sin^2\beta, \quad \sin^2\gamma.$$

Or leur somme doit être 1, tandis que celle de ces trois carrés est l'excédent, 2, de 3 sur la somme 1 des carrés des cosinus $\cos(\alpha, \beta, \gamma)$. Ainsi, l'on a

$$(13) \qquad (\mathrm{H}, \mathrm{I}, \mathrm{J}) = \frac{\sin^2(\alpha, \beta, \gamma)}{2};$$

et la formule approchée (10) du coefficient f d'absorption devient

$$(14) \qquad f = (\text{sensiblement}) \frac{\omega}{\cos V''} \frac{a' \sin^2\alpha + b' \sin^2\beta + c' \sin^2\gamma}{2}.$$

Mais la vitesse de propagation ω se confond presque avec a. Donc les coefficients d'asymétrie d, e, f sont sans influence appréciable sur f, tout comme quand, la biréfringence étant notable, ils laissaient les vibrations s'effectuer en ligne droite dans les solutions simples et l'absorption dépendre uniquement de leur direction (l', m', n'). Elle dépend ici de l'orientation des ondes, dont la normale fait les angles α, β, γ avec les axes principaux auxquels se rapportent les demi-coefficients de résistance a', b', c'.

VI. *Réduction, à un type unique, des formules du coefficient d'absorption dans les deux cas simples traités.* — Il est, du reste, facile de ramener à un type unique les deux formules de f obtenues, en y introduisant, toujours conformément au sentiment de Fresnel, mais un peu généralisé, les cosinus directeurs l', m', n', sinon invariables, du moins *successifs*, soit du déplacement total (ou *élongation*) (ξ, η, ζ), soit de la vitesse vibratoire (ξ', η', ζ').

Comme les trajectoires des atomes d'éther, situées à fort peu près sur les plans d'onde, se déterminent sensiblement, pour chaque solution simple, dans les suppositions $a' = 0$, $b' = 0$, $c' = 0$, c'est-à-dire en réduisant les résistances à leurs première et troisième parties, l'une, fonction des accélérations et *ici isotrope*, l'autre, fonction des vitesses et *tout entière asymétrique,* on peut déterminer ces formes des trajectoires et les vitesses ω de propagation dans l'hypothèse où l'axe d'asymétrie serait choisi comme nouvel axe des z : ce qui nous ramène au cas de *l'isotropie dissymétrique autour d'un axe*, abordé à la page 490, mais *sans biréfringence* (ou avec $c = a$), c'est-à-dire, en définitive, d'après ce qu'on a vu vers le milieu de la page 483, au cas de la polarisation circulaire magnétique étudié au n° 75 (p. 478). Les trajectoires sont donc à fort peu près circulaires autour de la situation d'équilibre, situées dans le plan de l'onde, et parcourues d'un mouvement uniforme.

Dès lors, appelant d'abord l', m', n' les cosinus directeurs de l'élongation (ξ, η, ζ), cherchons, par exemple, la valeur moyenne de l'^2. A cet effet, menons par l'origine, dans le plan d'onde y passant et normal à la direction

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

la parallèle à l'élongation actuelle (ξ, η, ζ) : soit θ son *azimut,* uniformément variable (avec le temps t), compté à partir de la projection de l'axe des x sur ce même plan.

L'angle dont l' est le cosinus constituera ainsi la face hypoténuse d'un trièdre

rectangle ayant, pour faces de son dièdre droit, le complément de α et l'azimut θ. On aura donc

$$l' = \sin\alpha\cos\theta;\qquad \text{d'où}\qquad l'^2 = \sin^2\alpha\cos^2\theta.$$

Et comme la valeur moyenne, durant une période, du facteur variable $\cos^2\theta$ sera $\frac{1}{2}$, il viendra, si l'on désigne par le symbole $\mathfrak{M}$ la valeur moyenne de la quantité inscrite à la suite, la première des trois formules analogues

$$(15)\qquad \mathfrak{M}.l'^2 = \frac{\sin^2\alpha}{2},\qquad \mathfrak{M}.m'^2 = \frac{\sin^2\beta}{2},\qquad \mathfrak{M}.n'^2 = \frac{\sin^2\gamma}{2}.$$

On arriverait aux mêmes résultats en appelant l', m', n' les cosinus directeurs de la vitesse vibratoire (ξ', η', ζ'), dont la direction, sur la trajectoire circulaire, est constamment à angle droit par rapport à celle de l'élongation et comprise dans le même plan d'onde; en sorte qu'il y aurait simplement à remplacer θ par $\theta \pm \frac{\pi}{2}$.

La relation (14) devient donc

$$(16)\qquad f = (\text{sensiblement})\,\omega\,\frac{a'\mathfrak{M}.l'^2 + b'\mathfrak{M}.m'^2 + c'\mathfrak{M}.n'^2}{\cos V''};$$

et elle comprend bien alors la formule (ζ'') (p. 492) relative au cas contraire d'une trajectoire rectiligne, où l', m', n' sont constants. Ainsi se trouve confirmée, au moins en partie, une conjecture exprimée à la suite de cette formule.

VII. *Coefficient d'absorption d'un corps naturellement isotrope, rendu biréfringent par l'action magnétique.* — Considérons maintenant le cas d'isotropie dissymétrique autour de l'axe des z abordé au n° 76 *bis* (p. 490) et où l'on a non seulement

$$b = a,\qquad (d, e) = 0$$

et, par suite,

$$V = U,\qquad (D, E) = 0,\qquad F = -\frac{f}{k}\sqrt{-1},\qquad p = fn,$$

mais aussi $b' = a'$ et, dès lors, dans (9), f fonction de $H + I$ et de J. Les formules (1) et (6), spécifiées pour les valeurs l, m, n, a, a, c de L, M, N, A, B, C, donneront, en y supprimant, comme au n° V ci-dessus, les termes du troisième ordre, savoir, ceux où figurent f^2W^2 et UVW,

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &(l^2+m^2)UW + n^2\left(U^2 - \frac{f^2}{k^2}\right) = 0,\\ &H + I = \frac{1}{K'U^2}\left(l^2 + m^2 - 2\frac{f^2n^2}{k^2UW}\right),\\ &J = \frac{n^2}{K'W^2}\left(1 - \frac{f^2}{k^2U^2}\right) = -\frac{l^2+m^2}{K'UW},\end{aligned}\right.$$

le dernier membre résultant de l'élimination du binome $1 - \frac{f^2}{k^2U^2}$ grâce à la première (17).

Soit i l'angle de la normale aux ondes avec l'axe d'isotropie ou des z; ce qui rendra les deux expressions $l^2 + m^2$ et n^2 respectivement proportionnelles à $\sin^2 i$

et à $\cos^2 i$. La première relation (17), équation en ω, deviendra

$$(18)\qquad \left(U^2 - \frac{f^2}{k^2}\right)\cos^2 i + UW\sin^2 i = 0;$$

et les deux autres montrent que $H + I$ et J seront entre eux comme

$$\frac{1}{U}\left(\sin^2 i - 2\frac{f^2\cos^2 i}{k^2 UW}\right) \quad \text{et} \quad -\frac{\sin^2 i}{W}.$$

Remplaçons, dans la première de ces deux expressions, $\frac{f^2\cos^2 i}{k^2}$ par sa valeur tirée de (18); et leur rapport mutuel sera celui de

$$(19)\qquad 2U\cos^2 i + W\sin^2 i \quad \text{à} \quad U\sin^2 i.$$

D'une part, la somme de ces deux nouvelles expressions (19) est

$$U + U\cos^2 i + W\sin^2 i;$$

d'autre part, celle de $H + I$ et de J doit égaler 1. Donc on aura la double formule

$$(20)\qquad (H + I, J) = \frac{(2U\cos^2 i + W\sin^2 i,\ U\sin^2 i)}{U + U\cos^2 i + W\sin^2 i};$$

et l'expression approchée (10) du coefficient f d'extinction deviendra

$$(21)\qquad f = \frac{\omega}{\cos V''}\,\frac{a'(2U\cos^2 i + W\sin^2 i) + c'U\sin^2 i}{U + U\cos^2 i + W\sin^2 i}.$$

Dans le cas d'ondes normales à l'axe des z, où $i = 0$, l'on a donc bien, comme à la page 490,

$$U = \pm\frac{f}{k}, \qquad f = \frac{\omega a'}{\cos V''}.$$

Dans celui d'ondes parallèles à l'axe des z, où l'angle i est, au contraire, droit, il vient

$$UW = 0 \quad \text{et} \quad f = \frac{\omega}{\cos V''}\,\frac{a'W + c'U}{U + W},$$

c'est-à-dire, comme au bas de la page 490 et à la page 491,

$$(\text{pour } U \text{ nul})\ f = \frac{\omega a'}{\cos V''}, \qquad (\text{pour } W \text{ nul})\ f = \frac{\omega c'}{\cos V''}.$$

On voit que, plus généralement, le coefficient f d'absorption dépend du rapport mutuel de U et W, qui résulte lui-même de l'équation (18), où

$$U = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{\omega^2} \quad \text{et} \quad W = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{\omega^2}.$$

Je ne m'arrêterai pas à étudier son expression (21) pour les diverses valeurs de i, non plus que les relations qu'elle peut avoir avec le mode approché de polarisation et d'orientation des vibrations dans les plans d'onde : étude que devrait précéder celle, encore à faire, de cette sorte de polarisation elliptique, se produisant alors, dont il est parlé à la fin du n° 76 (p. 481) et que nous retrouvons ici.

VIII. *Théorie générale de la translucidité.* — Généralisant la théorie précédente de l'extinction graduelle des ondes planes à mouvements pendulaires, imaginons notre milieu d'abord transparent, ou parfaitement conservateur de l'amplitude des vibrations à toute distance, et régi par les équations linéaires, aux dérivées partielles d'ordres quelconques en x, y, z, t, étudiées dans la note des pages 473 à 476; puis rendons ce milieu *translucide*, c'est-à-dire *très légèrement* opaque, ou un peu extincteur *sous les épaisseurs comparables à la longueur d'onde*, en introduisant dans ses équations de mouvement de nouveaux termes, pareils à ceux qui y figuraient avec ξ, η, ζ différentiés par rapport au temps t, mais où il y ait toutefois *une dérivation de moins en t*, c'est-à-dire où paraissent, par exemple, comme ci-dessus, les vitesses ξ', η', ζ' au lieu des accélérations ξ'', η'', ζ''. A un degré assez élevé de précision, on trouverait, sans doute, presque autant de ces nouveaux termes qu'en avaient exigé d'anciens les divers phénomènes offerts par les corps transparents.

Il y aurait lieu, en effet, dans la théorie de la dispersion, d'*uniformiser* le *frottement* de l'éther contre les molécules pondérables, c'est-à-dire les résistances proportionnelles et opposées aux vitesses, comme nous avons dû uniformiser (p. 439) celles qui l'étaient aux accélérations; et il en résulterait, dans les équations de mouvement, des termes, en $\Delta_2(\xi', \eta', \zeta')$, analogues à ceux, en

$$\Delta_2(\xi'', \eta'', \zeta''),$$

qui ont introduit (p. 440) le terme de Cauchy dans la formule de la dispersion. De même, si le milieu contient de grosses molécules dissymétriques, où l'inégalité des impulsions de l'éther sur leurs diverses parties a entraîné l'addition, aux équations de mouvement, des termes (218) (p. 456) expliquant les polarisations circulaire et elliptique ordinaires, des inégalités analogues, pour les résistances proportionnelles à la vitesse, y motiveront l'introduction de termes tout pareils en $\frac{d\eta'}{dz} - \frac{d\zeta'}{dy}$, ...

Il n'y a pas jusqu'aux termes de polarisation rotatoire magnétique, en ν (p. 478), et peut-être même à d'autres, semblables, où figureraient, sans le symbole Δ_2, les *suraccélérations* η''', ξ''' au lieu des vitesses η', ξ' (si l'on jugeait à propos de les introduire), qui ne pussent, à la rigueur, avoir leurs analogues d'absorption, où η, ξ et η'', ξ'', respectivement, remplaceraient η', ξ' et η''', ξ'''. Comme les termes en ν, tout au moins, contiennent le paramètre Δ_2 des vitesses η', ξ', leurs corrélatifs d'absorption seront en $\Delta_2(\eta, \xi)$, ou ne feront pas partie des termes de Briot (p. 433); et leur admission semble devoir être moins difficile que ne serait celle des autres termes dont il s'agit, si η, ξ ou η'', ξ'' y figuraient non différentiés en x, y, z. Car ni les termes de Briot en ξ, η, ζ, ni les nôtres, en ξ'', η'', ζ'', ne paraissent susceptibles de la dissymétrie caractérisant la polarisation rotatoire; puisque nous avons été conduits à les regarder, dans les trois équations du mouvement, comme les dérivées en ξ, η, ζ, ou en ξ'', η'', ζ'', de *potentiels*, fonctions (du second degré) de ces trois variables respectives.

La généralisation indiquée ici n'est donc pas purement théorique.

Quoi qu'il en soit, l'hypothèse de *translucidité* reviendra à n'affecter que de très petits coefficients, $2a'$, $2b'$, ..., les termes ainsi introduits pour expliquer l'absorption, tant ceux dont il était déjà question aux numéros précédents que les autres.

Cela posé, la proportionnalité de ξ, η, ζ, dans les solutions simples symboliques, à l'exponentielle $e^{k(t-\mathrm{L}x-\mathrm{M}y-\mathrm{N}z)\sqrt{-1}}$, fera que ces divers termes auront

la forme de leurs analogues anciens, mais avec un facteur $k\sqrt{-1}$ de moins (puisque toute dérivation en t introduit ce facteur), ou, ce qui revient au même, avec les coefficients $\frac{2(a', b', \ldots)}{k\sqrt{-1}}$, équivalant à $-\frac{2(a', b', \ldots)}{k}\sqrt{-1}$. Si, par exemple, $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \cdots$ désignent les coefficients des anciens termes, l'introduction des nouveaux reviendra donc à remplacer $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \cdots$ par

$$\frac{1}{(a^2, b^2, \ldots)} - \frac{2(a', b', \ldots)}{k}\sqrt{-1},$$

ou a, b, ... par

$$a\left(1 + \frac{a^2 a'}{k}\sqrt{-1}\right), \quad b\left(1 + \frac{b^2 b'}{k}\sqrt{-1}\right), \quad \ldots.$$

Dès lors, soient A, B, ... les coefficients modifiés, savoir, les coefficients primitifs a, b, ... du milieu transparent ainsi accrus de *petites* parties imaginaires

$$\delta A = \frac{a^3 a'}{k}\sqrt{-1}, \qquad \delta B = \frac{b^3 b'}{k}\sqrt{-1}, \qquad \ldots;$$

et admettons que, L, M, N s'appelant l, m, n dans ce milieu transparent, l'équation, *réelle* par hypothèse, qui y reliait l, m, n à a, b, ..., fût

$$(22) \qquad F(a, b, \ldots, l, m, n) = 0.$$

La forme *analytique* des équations de mouvement s'est conservée. Donc, les mêmes calculs algébriques qui avaient conduit à cette relation (22) et qui continueront à s'appliquer aux exponentielles, maintenant un peu moins simples, de la question, subsisteront. Et ils donneront actuellement

$$F(A, B, \ldots, L, M, N) = 0,$$

où L, M, N auront désormais, à côté de parties réelles, que l'on peut continuer à appeler l, m, n (sans affirmer encore leur identité à celles de mêmes noms pour le milieu transparent primitif), de très petites parties purement imaginaires δL, δM, δN, imposées, par la présence de δA, δB, ..., aux coefficients de x, y, z dans l'exponentielle $e^{k(t - Lx - My - Nz)\sqrt{-1}}$ des expressions ξ, η, ζ symboliques. Nous savons d'ailleurs que $\delta(L, M, N)$ auront les formules $-\frac{f\sqrt{-1}}{k}\cos(\alpha', \beta', \gamma')$, si f désigne le *coefficient d'absorption* et si α', β', γ' sont les trois angles faits avec les axes par la normale aux plans d'égale amplitude ou à la face d'entrée des ondes dans le corps ([1]).

Les très petites variations $\delta(A, B, \ldots, L, M, N)$ étant ainsi des *quantités purement imaginaires* dans l'équation de forme *réelle*

$$F(a + \delta A, b + \delta B, \ldots, l + \delta L, m + \delta M, n + \delta N) = 0,$$

([1]) Nous appellerons donc ici $\cos(\alpha', \beta', \gamma')$, et non plus λ, μ, ν, les trois cosinus de la normale à la face d'entrée de la lumière dans le corps, c'est-à-dire aux plans d'égale amplitude, parce que nous aurons besoin des lettres λ, μ, ν pour désigner certains déterminants partiels, généralement imaginaires.

qui revient sensiblement à

$$F(a, b. \ldots, l, m, n) + \frac{dF}{da}\delta A + \frac{dF}{db}\delta B + \ldots + \frac{dF}{dl}\delta L + \frac{dF}{dm}\delta M + \frac{dF}{dn}\delta N = 0,$$

le premier terme, $F(a, b, \ldots, l, m, n)$, représente *à lui seul* la partie réelle de l'équation, et, les termes linéaires en $\delta(A, B, \ldots, l, m, n)$, la partie imaginaire. Donc on aura, séparément : 1° d'abord, $F(a, b, \ldots, l, m, n) = 0$, c'est-à-dire, après substitution à l, m, n de $\frac{\cos(\alpha, \beta, \gamma)}{\omega}$ (où seront donnés les angles α, β, γ de la normale aux ondes avec les axes), la même équation (22), aux vitesses de propagation ω des ondes, que dans le milieu transparent primitif; et 2°

$$(23) \qquad \frac{dF}{da}\delta A + \frac{dF}{db}\delta B + \ldots + \frac{dF}{dl}\delta L + \frac{dF}{dm}\delta M + \frac{dF}{dn}\delta N = 0,$$

ou bien, vu les valeurs indiquées de $\delta(A, B, \ldots, L, M, N)$ et en résolvant finalement par rapport à f,

$$(24) \qquad f = \frac{\frac{dF}{da}a^2 a' + \frac{dF}{db}b^2 b' + \ldots}{\frac{dF}{dl}\cos\alpha' + \frac{dF}{dm}\cos\beta' + \frac{dF}{dn}\cos\gamma'}.$$

Telle sera donc la formule du coefficient d'absorption f.

On sait (p. 476) que les dérivées partielles $\frac{dF}{d(l, m, n)}$ du premier membre de (22) sont proportionnelles aux cosinus directeurs du *rayon*, suivant lequel se transmet le mouvement vibratoire dans les ondes planes ayant pour équation $lx + my + nz = t_0$. Par suite, le dénominateur de l'expression (24) de f est le produit du radical $\sqrt{\frac{dF^2}{dl^2} + \frac{dF^2}{dm^2} + \frac{dF^2}{dn^2}}$ par le cosinus de l'angle, appelé plus haut V'_1 (p. 601), que fait la normale aux plans d'égale amplitude avec le *rayon* correspondant aux ondes considérées. Ainsi, *pour un mode donné de polarisation des vibrations, dans des ondes de direction connue et de propagation uniforme, c'est* inversement à ce cosinus (plutôt qu'inversement à $\cos V''$), ou *inversement au sinus de l'inclinaison du rayon sur la face d'entrée de la lumière dans le corps, que se fera l'absorption.*

Nous l'avions déjà constaté (p. 601) dans les corps pourvus de trois plans de symétrie rectangulaires.

IX. *Formation directe de son équation caractéristique.* — L'équation différentielle (23) pourra d'ailleurs se former sur les équations mêmes du mouvement, par la méthode exposée aux pages 474 et 475, c'est-à-dire sans recourir à l'équation finie $F = 0$.

En effet, continuons à appeler L', M', N' les coefficients de $e^{k(t - Lx - My - Nz)\sqrt{-1}}$ dans les expressions *symboliques* de ξ, η, ζ.

La substitution de celles-ci dans les équations de mouvement donnera les relations (γ) de la page 474, sauf l'accentuation actuelle de L, M, N dans ces équations. Mais, à raison des petites parties imaginaires

$$\delta(A, B, \ldots, L, M, N)$$

maintenant adjointes aux parties réelles a, b, $\ldots$, l, m, n des paramètres A

B, ..., L, M, N; ces équations s'écriront

$$(25)\quad \begin{cases} (\varphi + \delta\varphi)\,L' + (\chi + \delta\chi)\,M' + (\psi + \delta\psi)\,N' = 0, \\ (\varphi_1 + \delta\varphi_1)\,L' + (\chi_1 + \delta\chi_1)\,M' + (\psi_1 + \delta\psi_1)\,N' = 0, \\ (\varphi_2 + \delta\varphi_2)\,L' + (\chi_2 + \delta\chi_2)\,M' + (\psi_2 + \delta\psi_2)\,N' = 0, \end{cases}$$

$\varphi, \chi, \psi, \ldots, \psi_2$ y désignant les mêmes polynomes, généralement imaginaires, en $a, b, \ldots, l, m, n$, que dans ces équations (γ) relatives au milieu transparent, et $\delta(\varphi, \chi, \psi, \ldots, \psi_2)$ leurs variations linéaires, simultanées aux variations élémentaires $\delta(A, B, \ldots, L, M, N)$, indiquées ci-dessus, de leurs variables.

Or ajoutons ces trois équations, respectivement multipliées par les fonctions λ', μ', ν' de l, m, n que définissent, à la page 475, les équations (δ): et il viendra évidemment

$$L'(\lambda'\delta\varphi + \mu'\delta\varphi_1 + \nu'\delta\varphi_2) + M'(\lambda'\delta\chi + \mu'\delta\chi_1 + \nu'\delta\chi_2) \\ + N'(\lambda'\delta\psi + \mu'\delta\psi_1 + \nu'\delta\psi_2) = 0.$$

Une altération insignifiante des coefficients L', M', N' permet de leur substituer, sauf erreurs du second ordre dans cette équation, leurs valeurs proportionnelles λ, μ, ν du cas de transparence définies par les équations (γ) (p. 474), déterminants partiels formés, comme λ', μ', ν', avec les éléments $\varphi, \chi, \psi, \ldots$ et fonctions explicites, également connues, de l, m, n. Alors on a

$$(26)\quad \begin{cases} \lambda(\lambda'\delta\varphi + \mu'\delta\varphi_1 + \nu'\delta\varphi_2) + \mu(\lambda'\delta\chi + \mu'\delta\chi_1 + \nu'\delta\chi_2) \\ \qquad + \nu(\lambda'\delta\psi + \mu'\delta\psi_1 + \nu'\delta\psi_2) = 0. \end{cases}$$

Or il suffira de remplacer, dans cette équation, $\delta\varphi, \delta\varphi_1, \ldots, \delta\psi_2$ par leurs développements

$$\frac{d\varphi}{da}\delta A + \frac{d\varphi}{db}\delta B + \ldots + \frac{d\varphi}{dl}\delta L + \frac{d\varphi}{dm}\delta M + \frac{d\varphi}{dn}\delta N, \quad \frac{d\varphi_1}{da}\delta A + \ldots, \quad \ldots,$$

pour obtenir l'équation différentielle existant entre les variations infiniment petites $\delta A, \delta B, \ldots, \delta N$, qui peuvent être, toutes, arbitraires à l'exception d'une seule. Leurs coefficients y seront donc, à un facteur commun près, identiques à ceux que contiendrait l'équation même aux différentielles totales $\delta F = 0$, si on la déduisait de l'expression de F censée formée explicitement; et ils ne pourront manquer d'être réels, comme dans cette dernière équation, du moins après suppression de facteurs imaginaires communs.

X. *Application de cette méthode au cas de coïncidence des axes principaux, pour les deux parties symétriques de la résistance.* — Revenons maintenant, pour leur appliquer cette méthode générale, à nos équations de mouvement (δ') (p. 488), où nous pourrons réduire A, B, C à a, b, c et où D, E, F seront $-\frac{(\mathrm{d}, \mathrm{e}, \mathrm{f})}{k}\sqrt{-1}$. A part le facteur $-k^2$, les polynomes $\varphi, \chi, \psi, \ldots, \psi_2$, en continuant à y appeler U, V, W les trois différences $\frac{1}{(a^2, b^2, c^2)} - (l^2 + m^2 + n^2)$, auront les expressions suivantes :

$$(27)\quad \begin{cases} \varphi = U + l^2, & \chi = lm - \frac{\mathrm{f}}{k}\sqrt{-1}, & \psi = ln + \frac{\mathrm{e}}{k}\sqrt{-1}, \\ \varphi_1 = ml + \frac{\mathrm{f}}{k}\sqrt{-1}, & \chi_1 = V + m^2, & \psi_1 = mn - \frac{\mathrm{d}}{k}\sqrt{-1}, \\ \varphi_2 = nl - \frac{\mathrm{e}}{k}\sqrt{-1}, & \chi_2 = nm + \frac{\mathrm{d}}{k}\sqrt{-1}, & \psi_2 = W + n^2. \end{cases}$$

Or ces valeurs de $\varphi, \chi, \ldots, \psi_2$ ne font différer le système (δ) d'équations (p. 475), dont dépendent λ', μ', ν', du système (γ) (p. 474), dont dépendent λ, μ, ν, que par le signe de $\sqrt{-1}$. Donc les déterminants partiels λ', μ', ν' seront les conjugués de λ, μ, ν. De plus, elles donnent immédiatement à (26) la forme très symétrique

$$(28)\quad \lambda\lambda'\,\delta U + \ldots + [\lambda(l\lambda' + m\mu' + n\nu') + \lambda'(l\lambda + m\mu + n\nu)]\,\delta L + \ldots = 0,$$

où l'on voit, d'une part, que le coefficient de δU, produit des deux facteurs conjugués λ, λ', est le carré de leur module commun; d'autre part, que le coefficient de δL, somme de deux produits conjugués, est réel. Ainsi, l'équation (28) a bien forme réelle, comme il le fallait.

Mais on voit aussi que chacun des deux produits conjugués dont il vient d'être question possède un facteur trinome, $l\lambda' + m\mu' + n\nu'$ ou $l\lambda + m\mu + n\nu$, très petit à raison de la *quasi-transversalité* des mouvements qui résulte, comme on sait, de la petitesse de d, e, f, U, V, W. Donc les seuls termes notables de l'équation (28) sont ceux en δ(U, V, W); et cette équation est réductible, sensiblement, à

$$(29)\qquad \lambda\lambda'\,\delta U + \mu\mu'\,\delta V + \nu\nu'\,\delta W = 0.$$

Remplaçons-y δU, δV, δW par leurs valeurs

$$-2\frac{\delta A}{a^3} - 2(l\,\delta L + m\,\delta M + n\,\delta N),\quad \ldots,$$

puis $\delta A, \ldots, \delta N$, l, m, n par leurs valeurs

$$\frac{\sqrt{-1}}{k}(a^3 a', \ldots, -f\cos\gamma'),\quad \frac{\cos(\alpha, \beta, \gamma)}{\omega};$$

et nous aurons enfin le coefficient d'extinction f sous la nouvelle forme approchée, extrêmement simple,

$$(30)\qquad f = (\text{sensiblement})\,\frac{\omega}{\cos V''}\,\frac{\lambda\lambda' a' + \mu\mu' b' + \nu\nu' c'}{\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu'}.$$

XI. *Introduction des directions successives de la vibration, dans la formule du coefficient d'extinction.* — Soit $G e^{g\sqrt{-1}}$ la *constante arbitraire* affectant les trois déplacements *symboliques* ξ, η, ζ; et désignons par l'', m'', n'' les *arguments* des trois quantités imaginaires λ, μ, ν, dont les modules sont $\sqrt{\lambda\lambda'}$, $\sqrt{\mu\mu'}$, $\sqrt{\nu\nu'}$. L'expression symbolique de ξ, par exemple, sera dès lors

$$G\sqrt{\lambda\lambda'}\,e^{\sqrt{-1}\,[g + l'' + k(t - Lx - My - Nz)]},$$

ou bien, en appelant u la distance $x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma'$ du point (x, y, z) à la face d'entrée de la lumière dans le corps translucide,

$$G\sqrt{\lambda\lambda'}\,e^{-fu}\,e^{\sqrt{-1}\,[g + l'' + k(t - lx - my - nz)]}.$$

Le déplacement effectif ξ suivant les x, dans le système *physique* considéré d'ondes, en sera la partie réelle, savoir

$$(31)\qquad \xi = G\sqrt{\lambda\lambda'}\,e^{-fu}\cos[g + l'' + k(t - lx - my - nz)].$$

Le cosinus qui y figure ayant pour valeur moyenne de son carré (durant une période) $\frac{1}{2}$, la valeur moyenne de ξ^2 est donc

$$\mathfrak{M}.\xi^2 = \lambda\lambda' \left(\frac{G^2}{2} e^{-2fu}\right).$$

Et, de même, la vitesse analogue ξ' aurait pour valeur moyenne de son carré

$$\mathfrak{M}.\xi'^2 = \lambda\lambda' \left(\frac{k^2 G^2}{2} e^{-2fu}\right).$$

Ces valeurs moyennes sont donc, toutes choses égales d'ailleurs, proportionnelles au produit $\lambda\lambda'$. Comme on aurait des moyennes analogues pour η^2 et η'^2, pour ζ^2 et ζ'^2, la formule approchée (30) du coefficient d'extinction revient à

$$(32)\quad f = (\text{sensiblement})\ \frac{\omega}{\cos V''}\ \frac{a'\mathfrak{M}(\xi^2 \text{ ou } \xi'^2) + b'\mathfrak{M}(\eta^2 \text{ ou } \eta'^2) + c'\mathfrak{M}(\zeta^2 \text{ ou } \zeta'^2)}{\mathfrak{M}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \text{ ou } \xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)}.$$

Telle est évidemment la généralisation des deux formules (ζ'') (p. 492) et (16) (p. 609), spéciales aux cas des milieux à vibrations simples rectilignes et circulaires, ainsi que la réponse, bien *naturelle,* à la question que nous nous étions posée (p. 492) après avoir écrit la première de ces deux formules.

Supposons qu'on ait introduit, dans l'expression (32) de f, les carrés *moyens* des vitesses vibratoires ξ', η', ζ', qui évaluent précisément, en chaque point (x, y, z), l'*intensité* lumineuse ou d'*éclairement* produite par ces vitesses. Alors les rapports des trois carrés moyens respectifs $\mathfrak{M}(\xi'^2, \eta'^2, \zeta'^2)$ à leur somme représenteront les fractions de l'intensité totale qui correspondent aux trois composantes du mouvement suivant les axes principaux du corps. Et la formule (32), doublée afin de donner le coefficient $2f$ d'absorption relatif non plus aux amplitudes, mais aux forces vives ou aux intensités lumineuses elles-mêmes, pourra s'énoncer ainsi :

Le coefficient d'absorption $2f$ est sensiblement le produit de la vitesse de propagation des ondes, estimée suivant la normale à la face d'entrée, par la moyenne, entre les trois coefficients principaux $2a'$, $2b'$, $2c'$ de frottement, obtenue en affectant chacun d'eux d'un coefficient d'importance égal à la fraction de l'éclairement due à la composante du mouvement vibratoire suivant l'axe principal correspondant.

Formulée en ces termes, la loi est donc la même que pour les cristaux symétriques.

XII. *Expression concrète, aussi exacte que possible, de ce coefficient.* — L'équation exacte (28) donne mêmes coefficients à $\delta(A, B, C)$ que l'équation approchée (29); et elle ne change, ainsi, rien dans la proportion suivant laquelle a', b', c' contribuent à former f. Mais le coefficient de δL, par exemple, dans (28), au lieu de se réduire, comme dans (30), à $-2(\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu')l$, y dépasse cette quantité de

$$\lambda(l\lambda'+m\mu'+n\nu')+\lambda'(l\lambda+m\mu+n\nu).$$

Autrement dit, si l'on appelle, pour abréger, ϖ, ϖ' les deux trinomes conjugués $l\lambda+m\mu+n\nu$, $l\lambda'+m\mu'+n\nu'$, et ϖ_1 le trinome essentiellement positif $\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu'$, les trois coefficients de $\delta(L, M, N)$ deviennent, au facteur com-

mun près $-2\varpi_1$,

$$(33) \qquad l - \frac{\lambda\varpi' + \lambda'\varpi}{2\varpi_1}, \qquad m - \frac{\mu\varpi' + \mu'\varpi}{2\varpi_1}, \qquad n - \frac{\nu\varpi' + \nu'\varpi}{2\varpi_1}.$$

Nous savons (p. 613) que ces trois quantités sont entre elles comme les cosinus directeurs du rayon lumineux. Soit donc R le radical, pris en valeur absolue,

$$(34) \quad R = \sqrt{\left(l - \frac{\lambda\varpi' + \lambda'\varpi}{2\varpi_1}\right)^2 + \left(m - \frac{\mu\varpi' + \mu'\varpi}{2\varpi_1}\right)^2 + \left(n - \frac{\nu\varpi' + \nu'\varpi}{2\varpi_1}\right)^2}:$$

alors les expressions (33) seront les produits respectifs de R par les trois cosinus directeurs du rayon. Appelons, comme plus haut (p. 601 et 613), V'_1 l'angle de ce rayon lumineux avec la normale aux plans d'égale amplitude; et il viendra aisément

$$(35) \qquad f = \frac{1}{R} \frac{\lambda\lambda' a' + \mu\mu' b' + \nu\nu' c'}{\varpi_1 \cos V'_1}.$$

Pour tâcher d'introduire, au lieu du radical R, la longueur r du rayon lumineux, comme nous avons pu faire plus haut (p. 601), cherchons d'abord l'angle ε du rayon avec la normale aux ondes, laquelle a les cosinus directeurs ωl, ωm, ωn. Vu les expressions (33) qui, multipliées par l, m, n et ajoutées, donnent

$$l^2 + m^2 + n^2 - \frac{\varpi\varpi'}{\varpi_1}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \frac{1}{\omega^2} - \frac{\varpi\varpi'}{\varpi_1},$$

nous aurons

$$\cos\varepsilon = \frac{\omega}{R}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{\varpi\varpi'}{\varpi_1}\right),$$

et, en remplaçant $\frac{\omega}{R}$ par $\frac{r\cos\varepsilon}{R}$, puis résolvant par rapport à la parenthèse du second membre,

$$(36) \qquad \frac{1}{\omega^2} - \frac{\varpi\varpi'}{\varpi_1} = \frac{R}{r}.$$

Or, d'autre part, l'élévation de (34) au carré, suivie du développement du second membre, donne identiquement

$$(37) \quad R^2 = \left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{\varpi\varpi'}{\varpi_1}\right) + \frac{(\lambda\varpi' - \lambda'\varpi)^2 + (\mu\varpi' - \mu'\varpi)^2 + (\nu\varpi' - \nu'\varpi)^2}{4\varpi_1^2}.$$

Nous pouvons y remplacer la différence $\frac{1}{\omega^2} - \frac{\varpi\varpi'}{\varpi_1}$ par sa valeur (36); et, en multipliant par $\frac{r}{R^2}$, nous aurons aisément

$$(38) \qquad \frac{1}{R} = r\left[1 - \frac{(\lambda\varpi' - \lambda'\varpi)^2 + (\mu\varpi' - \mu'\varpi)^2 + (\nu\varpi' - \nu'\varpi)^2}{4\varpi_1^2 R^2}\right].$$

Le second membre, valeur cherchée du coefficient $\frac{1}{R}$ de l'expression (35) de f, *excède* généralement r; car les différences, $\lambda\varpi' - \lambda'\varpi$, ..., *de quantités conjuguées,* sont entièrement imaginaires et ont leurs carrés *négatifs*. Mais il ne l'excède que de quantités négligeables *du second ordre,* les trinomes ϖ et ϖ' étant

petits du premier. Et il se réduit même à r quand, λ, μ, ν, ϖ devenant réels, les vibrations simples sont rectilignes; ce qui ramène le résultat obtenu plus haut pour ce cas (p. 601). La formule (35) deviendra donc, sous une forme aussi concrète que possible, ou presque sans constantes spécifiques,

$$(39)\qquad f = (\text{à très peu près})\ \frac{r}{\cos V'_1}\ \frac{a'\,\mathfrak{M}(\xi^2 \text{ ou } \xi'^2) + b'\,\mathfrak{M}(\eta^2 \text{ ou } \eta'^2) + c'\,\mathfrak{M}(\zeta^2 \text{ ou } \zeta'^2)}{\mathfrak{M}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \text{ ou } \xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)}.$$

Elle ne contient de spécial au corps considéré que les trois demi-coefficients principaux de frottement a', b', c' et comporte évidemment un énoncé analogue à celui du n° II ci-dessus (p. 601). Si l'on considérait, au lieu des amplitudes vibratoires, les forces vives moyennes qui définissent l'intensité lumineuse, l'élévation de ξ', η', ζ' au carré doublerait f et introduirait ainsi, dans le coefficient définitif d'absorption $2f$, les coefficients mêmes de frottement $2a'$, $2b'$, $2c'$, tels que les contiennent les équations du mouvement ([1]).

XIII. *Expression approchée analogue de la vitesse de propagation des ondes.* — La simplicité des résultats précédents invite à chercher pour ω^2 une formule, en fonction de λ, μ, ν et de λ', μ', ν', qui soit généralisée de l'expression (179) (p. 418), linéaire par rapport aux carrés des cosinus directeurs approchés, l'_1, m'_1, n'_1, de la vibration. Après multiplication de son premier membre par la somme

$$l'^2_1 + m'^2_1 + n'^2_1,$$

de valeur 1, afin de la rendre homogène en l'_1, m'_1, n'_1, cette expression (179) de ω^2, rigoureuse dans un milieu symétrique où d, e, f s'annulent, donne aisément

$$\frac{1}{\omega^2}(a^2 l'^2_1 + b^2 m'^2_1 + c^2 n'^2_1) = l'^2_1 + m'^2_1 + n'^2_1.$$

Alors, en substituant à l'_1, m'_1, n'_1, si le milieu est en effet symétrique, les quantités proportionnelles $\frac{l'}{a^2}$, $\frac{m'}{b^2}$, $\frac{n'}{c^2}$, ou encore $\frac{\sqrt{\lambda\lambda'}}{a^2}$, $\frac{\sqrt{\mu\mu'}}{b^2}$, $\frac{\sqrt{\nu\nu'}}{c^2}$, et, par suite, à l'^2_1, m'^2_1, n'^2_1 les expressions $\mathfrak{M}\left(\frac{\xi^2}{a^4}, \frac{\eta^2}{b^4}, \frac{\zeta^2}{c^4}\right)$, il vient

$$(40)\qquad \frac{1}{\omega^2}\mathfrak{M}\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}\right) = \mathfrak{M}\left(\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}\right);$$

en sorte que *le carré de la vitesse* ω *de propagation est exactement fonction rationnelle des carrés moyens des déplacements* ξ, η, ζ.

Or, cette proposition peut s'étendre à nos milieux régis par les équations (δ') (p. 488). En effet, les valeurs (27) (p. 614) des neuf polynomes φ, χ, ..., ψ_2 se trouvant, quand on y remplace U, V, W par $\frac{1}{(a^2, b^2, c^2)} - (l^2 + m^2 + n^2)$, linéaires en l^2, m^2, n^2, mn, nl et lm, les deux systèmes linéaires *conjugués*, de trois équations chacun, auxquels satisfont λ, μ, ν et λ', μ', ν', sont résolubles rationnellement par rapport à ces six produits l^2, m^2, n^2, mn, nl, lm; d'où il suit que la

---

([1]) Ces résultats ont été résumés, avec la théorie générale, dont ils dérivent, sur la translucidité, dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (t. CXXXVI, p. 581, 9 mars 1903).

somme, $\frac{1}{\omega^2}$, de l^2, m^2 et n^2 est bien une fonction rationnelle des six déterminants partiels λ, μ, ν, λ', μ', ν'. Cherchons le plus simplement possible cette fonction.

Appelons encore ϖ et ϖ' les deux trinomes conjugués

$$l\lambda + m\mu + n\nu \qquad \text{et} \qquad l\lambda' + m\mu' + n\nu' :$$

nous aurons, vu (27), la triple équation, définissant λ, μ, ν,

$$(41) \quad (\lambda U, \mu V, \nu W) + (l, m, n)\varpi + \frac{\sqrt{-1}}{k}(e\nu - f\mu, f\lambda - d\nu, d\mu - e\lambda) = 0,$$

et la triple équation conjuguée à celle-là (où $\sqrt{-1}$ changera de signe), en λ', μ', ν', ϖ'.

Ces trois équations (41), multipliées respectivement par $\frac{\lambda'}{a^2}$, $\frac{\mu'}{b^2}$, $\frac{\nu'}{c^2}$ et ajoutées, donnent, en remplaçant $\frac{1}{(a^2, b^2, c^2)}$ par $\frac{1}{\omega^2} + (U, V, W)$ dans les termes en ϖ, d, e, f :

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\lambda\lambda'}{a^2}U + \ldots + \varpi\left(l\lambda' U + \ldots + \frac{\varpi'}{\omega^2}\right) \\ &\qquad + \frac{\sqrt{-1}}{k}\left[\frac{d(\mu\nu' - \nu\mu') + \ldots}{\omega^2} + \lambda' U(e\nu - f\mu) + \ldots\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Or, il résulte des équations conjuguées à (41), multipliées par $l\varpi$, $m\varpi$, $n\varpi$ et ajoutées,

$$\varpi\left(l\lambda' U + \ldots + \frac{\varpi'}{\omega^2}\right) - \frac{\sqrt{-1}}{k}[l\varpi(e\nu' - f\mu') + \ldots] = 0,$$

tandis que, des équations mêmes (41) multipliées par

$$\sqrt{-1}\,\frac{e\nu' - f\mu'}{k}, \quad \sqrt{-1}\,\frac{f\lambda' - d\nu'}{k}, \quad \sqrt{-1}\,\frac{d\mu' - e\lambda'}{k}$$

et ajoutées de même, l'on tire

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{-1}}{k}[\lambda U(e\nu' - f\mu') + \ldots] + \frac{\sqrt{-1}}{k}[l\varpi(e\nu' - f\mu') + \ldots] \\ &\qquad - \frac{(e\nu - f\mu)(e\nu' - f\mu') + \ldots}{k^2} = 0; \end{aligned}$$

et cette équation, ajoutée à la précédente, donne

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} &\varpi\left(l\lambda' U + \ldots + \frac{\varpi'}{\omega^2}\right) - \frac{(e\nu - f\mu)(e\nu' - f\mu') + \ldots}{k^2} \\ &\qquad + \frac{\sqrt{-1}}{k}[\lambda U(e\nu' - f\mu') + \ldots] = 0. \end{aligned} \right.$$

Retranchons enfin celle-ci de (42) et il viendra l'équation cherchée, d'où l'imaginaire $\sqrt{-1}$, n'y multipliant que des différences de quantités conjuguées,

s'élimine d'elle-même :

$$(44)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\lambda\lambda'}{a^2}\mathrm{U}+\ldots+\frac{(\mathrm{e}\nu-\mathrm{f}\mu)(\mathrm{e}\nu'-\mathrm{f}\mu')+\ldots}{k^2} \\ &\quad +\sqrt{-1}\left[\frac{\mathrm{d}(\mu\nu'-\nu\mu')+\ldots}{k\omega^2}+\mathrm{U}\,\frac{\lambda'(\mathrm{e}\nu-\mathrm{f}\mu)-\lambda(\mathrm{e}\nu'-\mathrm{f}\mu')}{k}+\ldots\right]=0. \end{aligned}\right.$$

Elle est bien du premier degré en $\frac{1}{\omega^2}$, que contiennent linéairement U, V, W.

Dans la pratique, les termes où figurent les produits des petites quantités d, e, f soit entre elles, soit par U, V, W, sont insensibles; et il vient, par le groupement des termes en $\frac{1}{\omega^2}$ qui subsistent :

$$(45)\quad \frac{1}{\omega^2}\left[\frac{\lambda\lambda'}{a^2}+\frac{\mu\mu'}{b^2}+\frac{\nu\nu'}{c^2}-\sqrt{-1}\,\frac{\mathrm{d}(\mu\nu'-\nu\mu')+\ldots}{k}\right]=\frac{\lambda\lambda'}{a^4}+\frac{\mu\mu'}{b^4}+\frac{\nu\nu'}{c^4}.$$

Les produits $\lambda\lambda'$, $\mu\mu'$, $\nu\nu'$ y représentent, d'après (31) et ses analogues, au facteur près G^2e^{-2fu}, le double des valeurs moyennes $\mathfrak{M}(\xi^2, \eta^2, \zeta^2)$. Quant aux binomes $\mu\nu'-\nu\mu'$, ..., on reconnaît aisément, en introduisant les *modules* $\sqrt{\mu\mu'}$, $\sqrt{\nu\nu'}$ et les *arguments* m'', n'' de μ et de ν, que, par exemple, la différence $\mu\nu'-\nu\mu'$ est $2\sqrt{-\mu\mu'\nu\nu'}\sin(m''-n'')$, et que, multipliée par $-k\sqrt{-1}$, elle exprime, à part encore le facteur G^2e^{-2fu}, le double de la *constante* $\eta\zeta'-\zeta\eta'$, *des aires,* dans le mouvement du rayon vecteur $\sqrt{\eta^2+\zeta^2}$ d'une particule d'éther, vue en projection sur le plan des yz. Par suite, l'expression

$$-\sqrt{-1}\,k[\mathrm{d}(\mu\nu'-\nu\mu')+\ldots]$$

est, toujours en faisant abstraction du facteur G^2e^{-2fu}, le double produit de l'*axe d'asymétrie* $\varphi=\sqrt{\mathrm{d}^2+\mathrm{e}^2+\mathrm{f}^2}$ du milieu, par la *constante des aires,* S, *dans le mouvement du rayon vecteur d'une particule d'éther, vue en projection sur un plan perpendiculaire à cet axe d'asymétrie.* Et la formule (45), divisée par 2, peut s'écrire

$$(46)\qquad \frac{1}{\omega^2}\left[\mathfrak{M}\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}\right)+\frac{\varphi S}{k^2}\right]=\mathfrak{M}\left(\frac{\xi^2}{a^4}+\frac{\eta^2}{b^4}+\frac{\zeta^2}{c^4}\right):$$

S y représente la constante des aires pour le plan normal à l'axe d'asymétrie, c'est-à-dire le quotient, par la période vibratoire $\frac{2\pi}{k}$, de deux fois l'aire de l'orbite que décrit, en projection sur ce plan, l'atome d'éther dont ξ, η, ζ sont les déplacements suivant les axes de coordonnées.

Quand l'axe, φ, d'asymétrie s'annule, on retombe bien sur la formule (40). Et d'ailleurs, celle-ci est alors exacte; car les termes antérieurement négligés dans (44) contenaient tous d, e, f et s'annulaient avec φ.

Mais revenons au cas où a, b, c sont peu différents et d, e, f petits, pour éliminer a^4, b^4, c^4 de la relation (45). Remplaçons le second membre de celle-ci par sa valeur tirée de l'identité classique

$$\begin{aligned}&(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)\\ &\quad=(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2+(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2+(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2+(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2,\end{aligned}$$

où l'on ferait

$$\alpha = \frac{\sqrt{\lambda\lambda'}}{a^2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{\mu\mu'}}{b^2}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{\nu\nu'}}{c^2}, \quad \alpha' = \sqrt{\lambda\lambda'}, \quad \beta' = \sqrt{\mu\mu'}, \quad \gamma' = \sqrt{\nu\nu'}.$$

Comme cette identité donne

$$\left(\frac{\lambda\lambda'}{a^4} + \frac{\mu\mu'}{b^4} + \frac{\nu\nu'}{c^4}\right)(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu') = \left(\frac{\lambda\lambda'}{a^2} + \frac{\mu\mu'}{b^2} + \frac{\nu\nu'}{c^2}\right)^2 + \mu\mu'\nu\nu'\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)^2 + \ldots,$$

formule où les trois derniers carrés sont négligeables du *second ordre*, la relation (45), multipliée par le trinome $\lambda\lambda' + \ldots$, devient

$$(47) \qquad \frac{\lambda\lambda' + \ldots}{\omega^2}\left(\frac{\lambda\lambda'}{a^2} + \ldots + 2\frac{\varphi S}{k^2 G^2 e^{-2fu}}\right) = \left(\frac{\lambda\lambda'}{a^2} + \ldots\right)^2.$$

Or faisons maintenant, dans la même identité générale,

$$\alpha = \frac{\sqrt{\lambda\lambda'}}{a}, \quad \beta = \frac{\sqrt{\mu\mu'}}{b}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{\nu\nu'}}{c}, \quad \alpha' = a\sqrt{\lambda\lambda'}, \quad \beta' = b\sqrt{\mu\mu'}, \quad \gamma' = c\sqrt{\nu\nu'}.$$

Nous aurons

$$\left(\frac{\lambda\lambda'}{a^2} + \ldots\right)(a^2\lambda\lambda' + \ldots) = (\lambda\lambda' + \ldots)^2 + \mu\mu'\nu\nu'\left(\frac{c}{b} - \frac{b}{c}\right)^2 + \ldots,$$

formule ayant encore ses trois derniers termes négligeables du second ordre, et fournissant dès lors, pour le trinome $\frac{\lambda\lambda'}{a^2} + \ldots$, une valeur simple, à porter dans (47). Il vient ainsi, facilement,

$$(48) \qquad (\lambda\lambda' + \ldots)\omega^2 = (a^2\lambda\lambda' + \ldots) + 2\frac{\varphi S}{k^2 G^2 e^{-2fu}}\left(\frac{a^2\lambda\lambda' + \ldots}{\lambda\lambda' + \ldots}\right)^2,$$

c'est-à-dire, par l'introduction des valeurs moyennes des carrés des déplacements,

$$(49) \quad \omega^2 \mathfrak{M}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \mathfrak{M}(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2) + \frac{\varphi S}{k^2}\left[\frac{\mathfrak{M}(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2)}{\mathfrak{M}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}\right]^2.$$

On voit, en appelant δ l'*élongation* $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ de l'atome d'éther, que le carré ω^2 de la vitesse de propagation est une fonction entière et binome des deux expressions

$$(50) \qquad a^2\frac{\mathfrak{M}.\xi^2}{\mathfrak{M}.\delta^2} + b^2\frac{\mathfrak{M}.\eta^2}{\mathfrak{M}.\delta^2} + c^2\frac{\mathfrak{M}.\zeta^2}{\mathfrak{M}.\delta^2} \quad \text{et} \quad \frac{\varphi S}{k^2 \mathfrak{M}.\delta^2},$$

savoir, une fonction linéaire par rapport à la deuxième expression, mais du second degré par rapport à la première.

Ces deux expressions (50) deviennent d'ailleurs un peu plus simples, quand on y introduit les carrés moyens des vitesses vibratoires au lieu de ceux des déplacements. Car on a vu (p. 616) que

$$k^2 \mathfrak{M}(\xi^2, \eta^2, \zeta^2) = \mathfrak{M}(\xi'^2, \eta'^2, \zeta'^2);$$

d'où il résulte

$$k^2 \mathfrak{M}.\delta^2 = \mathfrak{M}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2).$$

La deuxième expression (50) est donc alors, simplement, le produit du coeffi-

cient φ d'asymétrie par le rapport de la constante S des aires au carré moyen, $\mathfrak{M}(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)$, de la vitesse vibratoire; et la première expression (50) est la moyenne entre les trois carrés constants donnés a^2, b^2, c^2, obtenue en attribuant à chacun, comme coefficient d'importance, la fraction qui exprime, dans l'intensité lumineuse totale, la part due à la composante du mouvement vibratoire suivant l'axe principal correspondant.

Dans le cas de vibrations rectilignes (où $S=0$), la formule (49) redonne bien, pour ω^2, la valeur approchée (179) (p. 418), point de départ de toute cette généralisation.

XIV. *Équations des forces vives et du viriel, pour les milieux transparents doués d'un pouvoir rotatoire magnétique.* — Essayons, en terminant, de faire pour nos milieux biréfringents dissymétriques, mais transparents, doués, comme on voit, d'une propriété identique ou analogue au pouvoir rotatoire *magnétique*, ce que nous avons fait, dans le *Complément* des pages 588 à 591, pour les milieux à pouvoir rotatoire ordinaire; cherchons ce qu'y deviennent les formules des forces vives et du viriel.

Prenons les équations (δ') de mouvement (p. 488) sous la forme

$$(51)\quad \left(\frac{\xi''}{a^2},\frac{\eta''}{b^2},\frac{\zeta''}{c^2}\right)+(\mathrm{f}\eta'-\mathrm{e}\zeta',\ -\mathrm{f}\xi'+\mathrm{d}\zeta',\ \mathrm{e}\xi'-\mathrm{d}\eta')=\Delta_2(\xi,\eta,\zeta)-\frac{d\theta}{d(x,y,z)},$$

où les accents de ξ, η, ζ indiquent des dérivations en t. Et multiplions soit par $(\xi',\eta',\zeta')\,dt\,d\varpi$, pour avoir l'équation des forces vives, soit par $\frac{1}{2}(\xi,\eta,\zeta)\,d\varpi$, pour avoir celle du viriel; puis ajoutons. Enfin, intégrons le résultat dans tout l'espace ϖ où se produit le mouvement.

Dans le premier cas, les termes de dissymétrie, ou affectés de d, e, f, s'entre-détruisent. Donc les résistances productrices du pouvoir rotatoire ont travail nul; et *l'équation des forces vives est, dans ces milieux, la même que dans les milieux symétriques correspondants* où d, e, f s'évanouiraient, mais où a, b, c garderaient leurs valeurs.

Dans le second cas, les termes de dissymétrie donnent en tout, au premier membre du résultat, l'intégrale

$$(52)\qquad \int_\varpi\left(\mathrm{d}\,\frac{\eta\zeta'-\zeta\eta'}{2}+\mathrm{e}\,\frac{\zeta\xi'-\xi\zeta'}{2}+\mathrm{f}\,\frac{\xi\eta'-\eta\xi'}{2}\right)d\varpi.$$

Nous y retrouvons les dérivées en t considérées tout à l'heure (p. 620), $\eta\zeta'-\zeta\eta'$, ..., du double des aires décrites, en projection sur les plans coordonnés, par le rayon vecteur (ξ,η,ζ) de la particule $d\varpi$ d'éther. La fonction sous le signe $\int$, dans (52), est donc le produit de l'axe φ d'asymétrie par la dérivée en t de *l'aire*, Ω, *que décrit le même rayon vecteur en projection sur un plan normal à cet axe d'asymétrie.* Ainsi, les termes affectés de d, e, f introduisent en tout, au premier membre de l'équation (ε'') du viriel (p. 286) et sauf un facteur constant proportionnel à φ, l'expression

$$(53)\qquad \frac{d}{dt}\int_\varpi \Omega\,d\varpi.$$

C'est donc une dérivée première (et non seconde) en t, qui vient s'adjoindre

à l'expression principale (ε''') (p. 286); et, de plus, la fonction Ω sous le signe $\int$ y représente une *aire* dépendant non pas seulement des déplacements ξ, η, ζ *actuels*, mais de tous les déplacements *antérieurs* de la particule $d\varpi$ d'éther. Aussi l'application de l'équation à un système d'ondes se propageant sensiblement, pour y démontrer la conservation de la force vive (comme au bas de la page 286), devient-elle beaucoup plus difficile.

Elle ne paraît simple, en dehors de l'hypothèse d'ondes planes, à mouvements pendulaires, où cette conservation est évidente, que dans le cas d'isotropie du milieu (quant à ses coefficients physiques a, b, c, alors égaux) et de vibrations rectilignes, où l'on a $\Omega = 0$ sans que la rotation du plan de vibration change rien à l'intégrale figurant dans l'expression en question (ε'''), vu qu'il faut y annuler D, E, F et y faire $C = B = A$.

Alors les deux équations des forces vives et du viriel ont même forme que pour un milieu symétrique; et chaque onde conserve sa force vive par le fait même qu'en se propageant à fort peu près elle laisse presque invariable (p. 287) cette intégrale figurant dans (ε''').

Complément a la théorie de la dispersion rotatoire.

On a vu, au n° 63 (p. 439), qu'il y avait lieu, dans les ondes à très courte période vibratoire, d'uniformiser les résistances (R_x, R_y, R_z) des molécules pondérables, mais surtout leurs sommes par unité de volume ($\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$, $\mathcal{R}_z$), et que cela se faisait, après y avoir substitué à ξ, η, ζ leurs valeurs uniformisées ou *moyennes locales*, en retranchant de chaque terme le produit de son paramètre différentiel Δ_2 par $\frac{\varepsilon^2}{10}$. Or on sait que, dans les ondes se propageant avec une vitesse dont la valeur approchée est une constante connue a, le symbole Δ_2 équivaut presque, pour toute fonction de ξ, η, ζ et de leurs dérivées, à $\frac{1}{a^2}\frac{d^2}{dt^2}$, ou même au facteur algébrique $-\frac{k^2}{a^2}$, si les vibrations, supposées pendulaires, ont la période $\frac{2\pi}{k}$. Et cette règle approchée s'applique encore mieux aux petits termes de $\mathcal{R}_x$, $\mathcal{R}_y$, $\mathcal{R}_z$, comme (218) (p. 456), qu'à leurs termes principaux pou lesquels elle pourrait être insuffisante.

Il en résultera donc, à une deuxième approximation, le remplacement du coefficient α de ces termes par $\alpha\left(1+\frac{\varepsilon^2 k^2}{10 a^2}\right)$, ou par $\alpha\left(1+\frac{1+A}{\mu}\frac{\rho\varepsilon^2 k^2}{10}\right)$. Or la rotation du plan de polarisation par unité d'épaisseur du milieu est, d'après (230) (p. 460), $\frac{gk^2}{a}$, c'est-à-dire, vu la seconde formule (219) (p. 457), $\frac{\rho\alpha}{2\mu}k^2$ (¹). Substituons-y à α sa nouvelle valeur binome et de même, à μ, l'expression analogue, comprenant le terme de dispersion de Cauchy qui s'y trouvait implicite-

(¹) *Voir*, à propos de cette formule (230), dans l'*errata*, après la Table des matières, comment il convient de modifier les lignes 6 à 7, 13 à 18 et 20 de la page 461.



ment [comme on a vu avant de poser les équations (220) (p. 458)], expression qui est $\mu(1-\varkappa k^2)$ ou $\mu\left(1-\frac{\rho A \varepsilon^2 k^2}{10\mu}\right)$.

Il viendra, pour cette rotation par unité d'épaisseur, constituant le *pouvoir rotatoire* effectif ou total du corps, la formule

(230 *bis*) $$\text{Pouvoir rotatoire} = \frac{\rho\varkappa k^2}{2\mu}\left(1+\frac{1+2A}{A}\,\frac{\rho A \varepsilon^2 k^2}{10\mu}\right).$$

Le pouvoir rotatoire croît donc, du rouge au violet, un peu plus que proportionnellement à k^2, ou *à l'inverse du carré de la période vibratoire,* comme l'expérience l'a indiqué chez le quartz, l'essence de térébenthine, etc., et même, à l'exception de l'acide tartrique ou peut-être aussi d'une autre substance, chez tous les corps *actifs* connus (¹).

(¹) S'il s'agissait de dispersion ordinaire, avec mise en compte seulement du terme principal ou terme de Cauchy, on aurait, pour le carré de l'indice N de réfraction, la formule

$$N^2 = (1+A)(1+\varkappa k^2) = (1+A)\left(1+\frac{\rho A \varepsilon^2 k^2}{10\mu}\right);$$

et l'élimination, par celle-ci, de ε^2, donnerait au facteur binome de (230 *bis*) la forme

$$1+\frac{1+2A}{1+A}\,\frac{N^2-1-A}{A}.$$

Mais ici, vu la *grosseur* des molécules ou plutôt *des groupes moléculaires* en jeu dans le phénomène (p. 455), le rayon ε d'uniformisation *à choisir* (p. 579) doit être légèrement plus grand, savoir, d'une petite fraction θ de sa valeur relative à la dispersion ordinaire; et il y aura lieu de multiplier le numérateur du second terme par $(1+\theta)^2$, c'est-à-dire par $1+2\theta$, ou mieux, le dénominateur, par $1-2\theta$. Alors l'expression (230 *bis*) devient proportionnelle à

$$k^2\left[N^2-1-A\,\frac{A+2\theta(1+A)}{1+2A}\right].$$

Pour le quartz, on a environ $A=\frac{4}{3}$; et cette expression est, à très peu près, $k^2(N^2-1,485-1,697\theta)$.

Dans un Mémoire publié en mai 1897 aux *Annales de Chimie et de Physique* (6ᵉ série, t. XXVI), M. Carvallo a trouvé, en utilisant les meilleures observations, que ce pouvoir était proportionnel à $k^2\left(N^2-\frac{21,027}{11,970}\right)$, savoir, à $k^2(N^2-1,756)$: on en déduirait $\theta=0,16$ environ (ou mieux 0,2 en ne négligeant pas θ^2).

Mais le carré N^2 doit figurer ici, comme on voit, sans son terme de Briot, inverse de k^2 et négatif. Soit β^2 le coefficient (en valeur absolue) de ce terme. Son rétablissement dans N^2 rendra le produit k^2N^2 trop faible de β^2. Et le pouvoir rotatoire effectif du quartz deviendra proportionnel à la somme $k^2(N^2-1,756)+\beta^2$; ce qui le renforce sensiblement pour les petites valeurs de k, c'est-à-dire pour les radiations infra-rouges. Telle est, sans doute, l'explication des anomalies constatées par M. Carvallo au n° 22 du Mémoire cité.

La même circonstance a lieu dans la polarisation rotatoire magnétique. C'est que, effectivement, les termes qui la produisent, termes en ν des équations (α) de la page 478, devraient être, eux aussi, uniformisés, s'ils ne sont pas déjà une correction d'uniformisation. Et, s'ils en sont une, ils peuvent avoir besoin d'être complétés comme l'a été le terme de dispersion de Cauchy à la page 580, savoir, par la substitution au symbole Δ_2, d'après la formule (a) (même p. 580), du binome symbolique $\left(1 - \frac{9}{14}\frac{\varepsilon^2}{10}\Delta_2\right)\Delta_2$, revenant sensiblement à $\left(1 + \frac{9}{14}\frac{\varepsilon^2}{10}\frac{k^2}{a^2}\right)\Delta_2$. Il faudra donc, dans le second cas, remplacer ν par $\nu\left(1 + \frac{9}{14}\frac{\varepsilon^2}{10}\frac{k^2}{a^2}\right)$ et non par $\nu\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{10}\frac{k^2}{a^2}\right)$: correction analogue, quoique un peu moins forte.

Mais ce n'est pas tout. Les équations (α) se trouvent avoir été implicitement divisées par $\mu(1 - \varkappa k^2)$. Or il faut, de ce chef, introduire dans ν, comme plus haut dans $\frac{\rho\alpha}{2\mu}$, le nouveau facteur binome $1 + \varkappa k^2$, qui le fait croître encore plus rapidement avec k. Enfin le pouvoir rotatoire, exprimé par $\frac{\nu k^2 \cos i}{2a}$, acquerra en outre, à raison du facteur binome $1 - \frac{\varkappa}{2}k^2$ provenant du dénominateur 2ω ou $2a$, le nouveau facteur $1 + \frac{\varkappa}{2}k^2$; ce qui rendra, en définitive, le pouvoir rotatoire croissant, avec k^2, comme le produit $k^2\left(1 + \frac{3}{2}\varkappa k^2\right)$, sans compter le facteur ci-dessus, ou fourni par l'uniformisation des termes en ν [1].

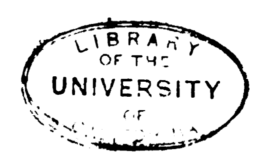
---

[1] **Absorption rotatoire.** — Il est temps de nous arrêter; et, cependant, la mise en œuvre des termes d'absorption mentionnés à la page 611, pour les ondes planes, à propagation uniforme et à mouvements pendulaires circulaires ou elliptiques, des milieux dissymétriques translucides, pourrait, sans qu'on eût presque à sortir du sujet actuel, conduire à des résultats intéressants. En attribuant, par exemple, de petits accroissements imaginaires $\delta(L, M, N, A, H)$ *comparables entre eux,* non seulement à l, m, n, a, mais aussi au coefficient *très petit* de dissymétrie $2h$, dans les équations (225) (p. 459), qu'on peut écrire

$$(l^2 + m^2 + n^2) \pm 2hk\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} - \frac{1}{a^2} = 0$$

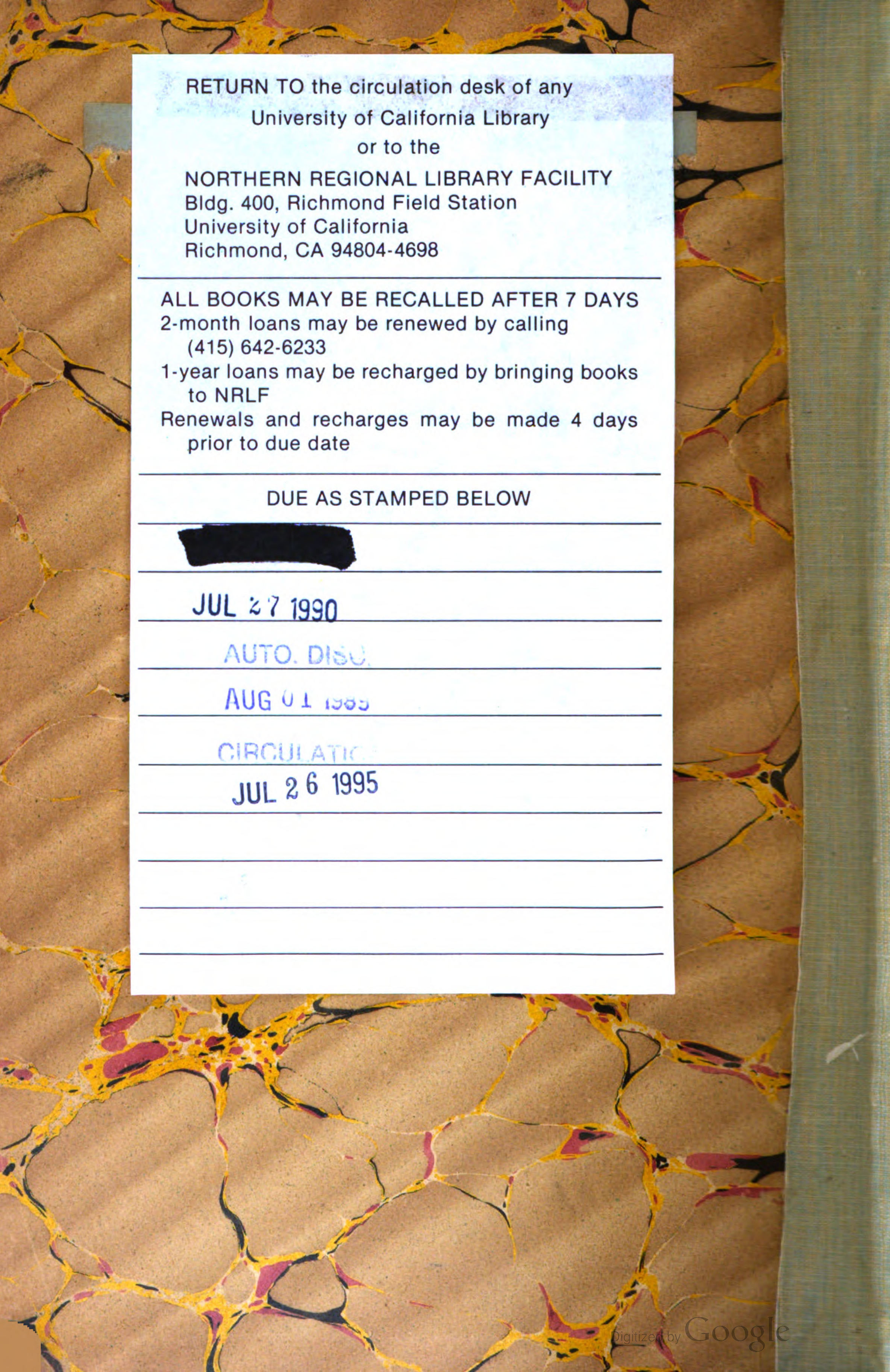
et où h remplace $\frac{g}{a}$, on expliquerait l'inégalité, parfois sensible, des deux coefficients d'absorption d'un milieu isotrope-dissymétrique, pour les deux espèces de ces ondes où la circulation des particules d'éther dans leurs orbites se fait en sens inverses, inégalité qu'a pu constater M. Cotton chez certains corps *actifs* (*Annales de Chimie et de Physique,* 7ᵉ série, t. VIII, p. 347 à 436; juillet 1896); car, dans la formule (γ''') du coefficient f d'absorption (p. 487), le numérateur $\omega a'$, ou aa', deviendrait $aa' \mp kh'$.

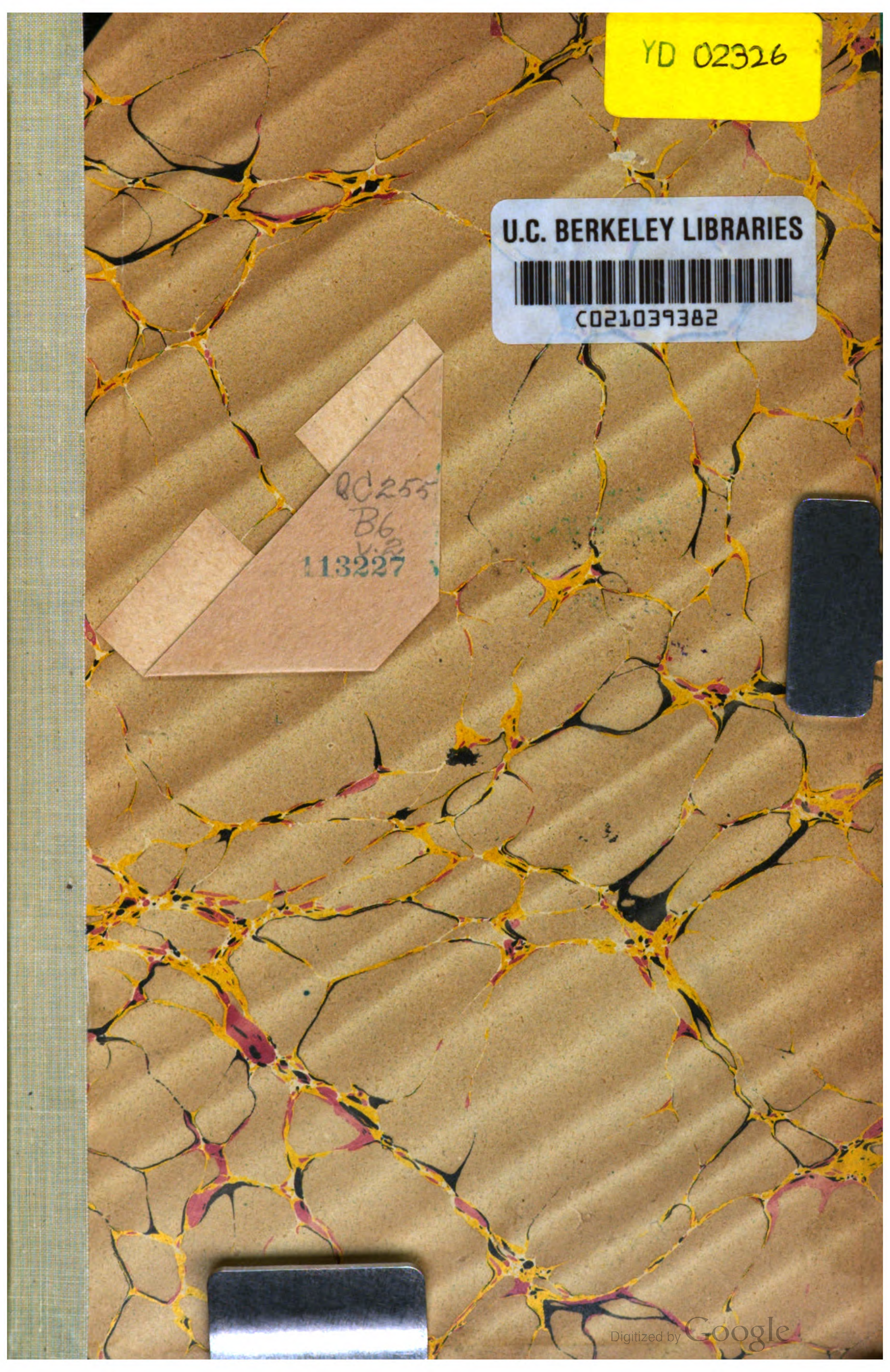
FIN DU TOME II.



30389 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS.
Quai des Grands-Augustins, 55.

30589 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.




YD 02326
U.C. BERKELEY LIBRARIES
C021039382
QC255
B6
v.2
113227
Digitized by Google

